

К ДИНАМИКЕ ВИБРОДВИГАТЕЛЯ

А. А. КОБРИНСКИЙ

(Москва)

В последнее время проводятся работы по созданию и внедрению новых систем привода, основанных на преобразовании колебательных движений ведущего звена передачи в поступательное или вращательное движение ее ведомого звена [1]. Эти системы получили название «вибрационный двигатель» или вибродвигатель. Преобразование движения в вибродвигателях различных типов достигается за счет непрерывного или прерывистого фрикционного взаимодействия его звеньев, имеющего ярко выраженный асимметричный характер.

Здесь рассматриваются одноударные периодические движения вибродвигателя как двухмассовой системы, работающей в виброударном режиме. Предполагается, что в моменты соударений в зоне контакта возникают силы сухого трения. Учет «асимметрии» действия этих сил позволяет в рамках обычной стереомеханической модели удара получить правдоподобную картину работы системы и в замкнутой форме построить законы ее периодического движения. Выявлены два возможных режима движения системы с проскальзыванием и без проскальзывания. Определены области существования этих режимов и найдены зависимости скорости виброперемещения ведомого звена от параметров системы.

1. Схема, иллюстрирующая принцип действия такого двигателя, работающего в виброударном режиме, представлена на фиг. 1, а. Здесь ведущее звено 1, колебания которого поддерживаются за счет того или иного источника энергии, соударяется с ведомым звеном 2. Считая, что массы звеньев 1 и 2 конечны, построим двухмассовую динамическую модель (фиг. 1, б), в которой ведущее звено является упругой системой, движущейся вдоль оси z под действием периодической силы $F(t) = F \sin \omega t$, а к ведомому звену, перемещающемуся вдоль оси x , приложена сила сопротивления, пропорциональная его скорости. Предполагается, что связи, наложенные на звенья системы и обеспечивающие их прямолинейные перемещения, являются идеальными; возникающие в процессе соударений силы реакции связей ортогональны перемещениям звеньев.

Обозначая X , Y составляющие ударного импульса, приложенные к ведущему звену, можем записать соотношения, связывающие доударные (v_-, w_-) и послеударные (v_+, w_+) скорости звеньев

$$m_1 v_+ = m_1 v_- + X \sin \alpha - Y \cos \alpha, \quad m_2 w_+ = m_2 w_- - X \quad (1.1)$$

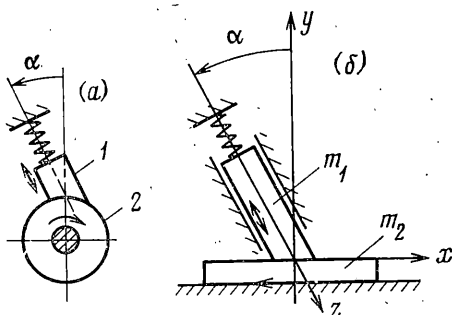
Так как связи идеальные, можно пренебречь составляющими ударного импульса, ортогональными перемещениям звеньев.

Предположим, что в процессе соударения тангенциальная X и нормальная Y составляющие связаны по закону сухого трения [2, 3], т. е.

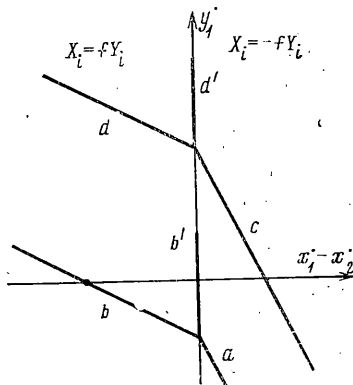
$$|X / Y| \leq f \quad (1.2)$$

f — коэффициент сухого трения при ударе, знак X противоположен знаку относительной скорости проскальзывания $x_1 - x_2$. Поскольку последняя величина в процессе соударения меняет знак, разобьем этот процесс на три этапа, каждый из которых характеризуется определенными знаками

относительных скоростей $x_1^* - x_2^*$ и y_1^* . В зависимости от величин доударных скоростей и параметров системы возможны различные случаи такого разбиения. Соответствующие изменения относительных скоростей в процессе соударения показаны на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Предположим сначала, что соударение состоит из следующих этапов: 1) $x_1^* - x_2^* > 0, y_1^* < 0$; 2) $x_1^* - x_2^* < 0, y_1^* < 0$; 3) $x_1^* - x_2^* < 0, y_1^* > 0$ (ломаная $a-b$ на фиг. 2). Очевидно начальное условие

$$v_- \sin \alpha > w_- \tag{2.1}$$

необходимо выполняется в периодическом режиме. На первом этапе соударения имеем для составляющих ударного импульса

$$X_1 = -fY_1 \tag{2.2}$$

Конец этого этапа характеризуется обращением в нуль относительной скорости проскальзывания $x_1 - x_2$, откуда

$$w_1 = v_1 \sin \alpha > 0 \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (1.1), где v_+, w_+, X, Y нужно заменить на v_1, w_1, X_1, Y_1 , получим

$$Y_1 = m_1 A (v_- \sin \alpha - w_-) \tag{2.4}$$

$$A = [f(\mu + \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha]^{-1}, \quad \mu = m_1 / m_2$$

Условие $v_1 > 0$ является необходимым в рассматриваемом случае. Из (1.1) и (2.4) следует, что оно эквивалентно неравенству

$$w_- v_-^{-1} > -f\mu (\cos \alpha + f \sin \alpha)^{-1} \tag{2.5}$$

На следующем этапе соударения величина $x_1^* - x_2^*$ становится отрицательной. Это возможно только, если составляющая X_2 ударного импульса, определяемая соотношением

$$X_2 = fY_2 \tag{2.6}$$

недостаточна для совместного движения обоих звеньев (в противном случае $x_1^* - x_2^* = 0$). Условие невозможности совместного движения в силу (1.1) и (2.6) имеет вид

$$f\mu < \sin \alpha (\cos \alpha - f \sin \alpha) \tag{2.7}$$

причем величина $\cos \alpha - f \sin \alpha$ должна быть положительной, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha < f^{-1} \quad (2.8)$$

Последнее условие обеспечивает отсутствие заклинивания ведущего звена в процессе удара.

Если (2.7) и (2.8) выполнены, то поскольку в конце второго этапа соударения $v_2 = 0$, из (1.1) и (2.6) получим

$$Y_2 = [m_1 v_- - Y_1 (\cos \alpha + f \sin \alpha)] / (\cos \alpha - f \sin \alpha) \quad (2.9)$$

так что условие $Y_2 > 0$ эквивалентно (2.5).

На третьем этапе удара происходит восстановление кинетической энергии ведущего звена, так что

$$Y_3 = R(Y_1 + Y_2) \quad (2.10)$$

где R — коэффициент восстановления при ударе. Поскольку скорость проскальзывания $x_1 - x_2$ здесь остается отрицательной, то

$$X_3 = f Y_3 \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в (1.1) с учетом (2.2), (2.4), (2.6) и (2.9), получим уравнения косоугольного удара, связывающие доударные и послеударные скорости обоих звеньев

$$v_+ = -RA \{v_- [f(\mu - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha] + w_- (2f \sin \alpha)\} \quad (2.12)$$

$$w_+ - w_- = f\mu A \left\{ v_- \left[(1-R) \sin \alpha - \frac{f\mu(1+R)}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \right] - w_- \frac{2(\cos \alpha + fR \sin \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \right\}$$

Заметим, что первое из этих соотношений при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в уравнение прямого центрального удара $v_+ = -Rv_-$. Вместе с тем такой предельный переход некорректен, так как при этом нарушается условие (2.7). При косоугольном ударе, если $f > 0$, то в силу (2.1) всегда $|v_+ v_-^{-1}| < R$, поскольку часть кинетической энергии расходуется на преодоление сил трения.

3. Если остаются справедливыми неравенства (2.1), (2.5), (2.8) и нарушается (2.7), то на втором и третьем этапах проскальзывание звеньев невозможно ($x_1 - x_2 = 0$) и изменение относительных скоростей в процессе удара иллюстрируется ломаной $a-b'$ на фиг. 2. Соотношения (2.2), (2.4) в этом случае по-прежнему имеют место, а на следующих этапах ударный импульс лежит внутри угла трения, и из условия $x_1 - x_2 = 0$ находим

$$X_i = Y_i \sin \alpha \cos \alpha / (\mu + \sin^2 \alpha) \quad (i=2, 3)$$

Условие $v_2 = 0$ окончания второго этапа влечет

$$Y_2 = m_2 v_1 (\mu + \sin^2 \alpha) / \cos \alpha$$

Наконец, для третьего этапа снова применим условие (2.10). Окончательно из первого соотношения (1.1) получим

$$v_+ = -R(v_- \mu + w_- \sin \alpha) / (\mu + \sin^2 \alpha) \quad (3.1)$$

и из отсутствия проскальзывания следует

$$w_+ = v_+ \sin \alpha \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) и (3.2) являются уравнениями косоугольного удара, когда (2.7) нарушено. При $\alpha = 0$ из (3.1) получим уравнение прямого удара в одномассовой системе. При этом, если для доударных скоростей v_- , w_- выполняются условия (2.1) и (2.5), то при ударе происходит остановка ведомого звена.

Если неравенство (2.5) не имеет места, то в зависимости от того, выполнено или нет (2.7), изменение относительных скоростей в процессе соударения происходит в соответствии с одной из ломаных $c-d$ или $c-d'$ фиг. 2. В этом случае для первых двух этапов имеем $X_i = -fY_i$ ($i=1, 2$), на третьем этапе $X_3 = fY_3$. Поскольку здесь восстановление скорости происходит на втором и третьем этапах, то в отличие от предыдущего случая должно быть $Y_2 + Y_3 = RY_1$. Отсюда получим изменение количества движения ведомого звена при ударе

$$m_2(w_+ - w_-) = f(Y_1 + Y_2 - Y_3) > 0 \quad (3.3)$$

Так как нарушение (2.5) предполагает $w_- < 0$, то (3.3) влечет торможение ведомого звена в процессе соударения. Поэтому соответствующие законы изменения скоростей не могут реализоваться в рассматриваемой динамической модели при периодических движениях. Вместе с тем если звено 2 также связано с источником энергии, то периодическим режимам могут соответствовать и ударные взаимодействия последних двух типов.

4. Основываясь на уравнениях удара, перейдем к построению одноударных периодических режимов. Уравнения движения системы имеют вид

$$z'' + \omega_0^2(z+S) = (F/m_1) \sin(\omega t + \varphi), \quad x_2'' + c^*x_2' = 0 \quad (4.1)$$

Здесь φ — фаза соударения в периодическом режиме, S — зазор в системе (по направлению оси z). Переходя к безразмерным координатам $\tau = \omega t$, $\sigma = Sm_1\omega_0^2/F$, $\zeta = \omega_0/\omega$, $c = c^*/\omega$, получим после интегрирования (4.1) следующие законы движения звеньев:

$$z = -\sigma + \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \sin(\tau + \varphi) + C_1 \sin(\zeta\tau + \psi), \quad x_2 = C_2 e^{-c\tau} + C_3 \quad (4.2)$$

Граничные условия одноударного режима имеют вид

$$\begin{aligned} z=0, \quad z' = v_+, \quad x_2' = w_+ \quad \text{при} \quad \tau=0 \\ z=0, \quad z' = v_-, \quad x_2' = w_- \quad \text{при} \quad \tau=2\pi \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из второго соотношения (4.2) следует, что доударная и послеударная скорости ведомого звена связаны условием

$$w_- = \varepsilon w_+, \quad \varepsilon = \exp(-2\pi c) \quad (4.4)$$

Используя (4.4), можно исключить из уравнений (2.12) или (3.1), (3.2) величины w_- и w_+ и получить для скоростей ведущего звена условие

$$v_+ = -R_1 v_- \quad (4.5)$$

в котором R_1 является функцией параметров μ , α , R , f , ε системы. Величину R_1 можно по аналогии с одномерными виброударными системами назвать обобщенным коэффициентом восстановления скорости. Введение этого коэффициента позволяет строить периодическое движение ведущего звена, как бы независимо от движения ведомого. При этом к системе, описываемой первым соотношением (4.2) и (4.3), (4.5), оказываются полностью применимы все результаты, полученные для модели Русакова — Харкевича [4] с коэффициентом восстановления R_1 . В частности, фаза соударения и доударная скорость v_- определяются соотношениями

$$\sin \varphi - \frac{1+R_1}{1-R_1} \frac{\text{ctg} \pi \zeta}{\zeta} \cos \varphi = \sigma \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2}, \quad v_- = \frac{2}{1-R_1} \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \cos \varphi \quad (4.6)$$

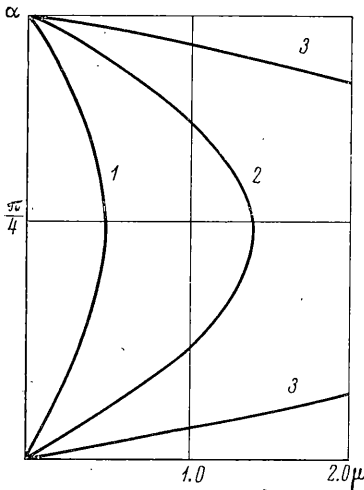
Наконец, для w_- получим из (4.4) и (2.12)

$$\frac{w_-}{v_-} = \frac{f\mu[(1-R)\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha) - f\mu(1+R)]}{2f\mu(\cos\alpha + fR\sin\alpha) + A^{-1}(\varepsilon^{-1} - 1)(\cos\alpha - f\sin\alpha)} \quad (4.7)$$

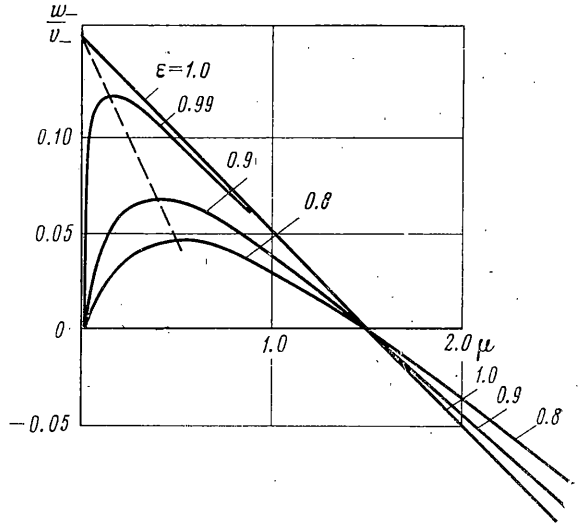
если выполнено (2.7), или из (3.1) и (3.2)

$$w_-/v_- = -R\mu\varepsilon \sin\alpha / [\mu + (1+R\varepsilon)\sin^2\alpha] \quad (4.8)$$

в противном случае. Нетрудно проверить, что оба соотношения (4.7) и (4.8) удовлетворяют как условию (2.1), так и (2.5), и единственным условием существования периодического режима является (2.8).



Фиг. 3



Фиг. 4

Соотношения (4.6) — (4.8) полностью определяют периодический режим системы и позволяют изучить вопросы виброперемещения ведомого звена. Поскольку средняя скорость перемещения пропорциональна w_- , достаточно изучить зависимость w_- от параметров системы.

На фиг. 3 показана область существования периодических одноударных режимов в плоскости параметров (μ, α) при $R=0.5, f=0.1, \varepsilon=0.8$. Штрихпунктирная линия, ограничивающая эту область сверху, определяется условием отсутствия заклинивания (2.8). Кривая 1 соответствует значениям μ , для которых величина w_- достигает максимума. При меньших значениях μ величина w_- растет с увеличением μ , при больших — убывает. Кривая 2 определяется условием $w_- = 0$, откуда

$$\mu = \frac{1-R}{1+R} \frac{\sin\alpha}{f} (\cos\alpha - f\sin\alpha)$$

Эта кривая разделяет области параметров с различным направлением движения ведомого звена, т. е. регулированием угла α установки ведущего звена можно осуществлять реверс ведомого звена. Наконец, справа от кривой 3 в соответствии с (2.7) имеем режимы с совместным движением обоих звеньев в процессе соударения (при этом $w_- < 0$).

Графики на фиг. 4 отражают зависимость величины w_-/v_- от параметров μ и ε (здесь $R=0.5, f=0.1, \alpha=0.8$). Пунктирной линией соединены

точки, соответствующие максимумам w_- / v_- . Согласно (2.12) для тех же значений μ максимальное значение принимает и обобщенный коэффициент восстановления R_i , т. е. получаем максимально возможную (при фиксированном α) скорость виброперемещения в системе.

Анализ устойчивости построенных периодических режимов можно провести методом припасовывания [4]. При этом возмущения $\Delta_i v_-$, $\Delta_i w_-$ доударных и $\Delta_i v_+$, $\Delta_i w_+$ послеударных скоростей обоих звеньев связаны уравнениями косоуго ударов (2.12) или (3.1), (3.2). Существенно, что число независимых возмущений, равное трем ($\Delta_i \varphi$, $\Delta_i v_+$, $\Delta_i w_+$) для режимов с проскальзыванием, уменьшается до двух в силу (3.2) в режимах без проскальзывания. Поэтому в зависимости от рассматриваемого режима движения анализ устойчивости сводится к определению корней характеристического уравнения второй или третьей степени.

Поступила 3 ХН 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Бансевичюс Р. Ю., Рагульскис К. М. О новом виде исполнительного элемента систем привода — вибродвигателях. Вибротехника, 1972, т. 3(16).
2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
3. Асташев В. К., Бабицкий В. И., Дольник Е. С. Об одном способе возбуждения колебаний. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 1.
4. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М., «Наука», 1973