МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 543.014.4

МЕТОД АНАЛИЗА ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Ф. ЖУРАВЛЕВ

(Москва)

Предлагается замена переменных, устраняющая бесконечные разрывы в правых частях уравнений движения виброударных систем. В результате этого облегчается применение основных приближенных методов (например метода осреднения) для решения этих уравнений.

1. Рассмотрим простейший случай виброударной системы: движение материальной точки единичной массы между двумя неподвижными ограничениями под действием силы $Q(t, y, \dot{y})$ с коэффициентом восстановления при ударе, равным единице (фиг. 1).

Уравнение движения такой точки может быть записано в виде

$$\ddot{y}+F(y)=Q(t, y, \dot{y}) \tag{1.1}$$

где $F(y)$ представляет собой условную запись, характеризующую воздействие жесткого ограничения (фиг. 2). Величина зазора принята равной π.

Введем следующие три 2π-периодические функции (фиг. 3):

$$\Pi(x)=\begin{cases} -x-\pi & (-\pi\leqslant x\leqslant -\pi/2) \\ x & (-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2) \\ -x+\pi & (\pi/2\leqslant x\leqslant \pi) \end{cases} \qquad \Pi(x+2\pi)=\Pi(x)$$

$$\mathrm{M}(x)=\begin{cases} 1 & (-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2) \\ -1 & (\pi/2< x< 3\pi/2) \end{cases} \qquad \mathrm{M}(x+2\pi)=\mathrm{M}(x)$$

$$\Delta(x)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+1}\delta\left[x-\frac{1}{2}\pi(2k+1)\right]$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Приведем некоторые соотношения, характеризующие свойства введенных функций.

1) Дифференциальные: $\Pi'(x)=\mathrm{M}(x)$, $\mathrm{M}'(x)=\Delta(x)$,

2) Функциональные: $\mathrm{M}^m(x)=1$ при m четном, $\mathrm{M}^m(x)=\mathrm{M}(x)$ при m нечетном

$$|\Pi(x)|={}^1/_2[{}^1/_2\pi+\Pi(2x-{}^1/_4\pi)], \quad x-\mathrm{M}(\pi x)\Pi(\pi x)=E(x+{}^1/_2\pi)$$

Здесь $E(x)$ — известная в теории чисел функция — целая часть числа.

3) Интегральные:

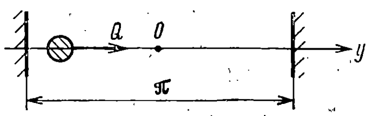
$$\int_0^x \Pi(x)\mathrm{M}(x)\,dx=\frac{1}{2}\Pi^2(x)$$

$$\int \mathrm{M}(x)\cos x\,dx = \mathrm{M}(x)\sin x + 2E\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right), \quad \int \mathrm{M}(x)\sin x\,dx = 1 - \mathrm{M}(x)\cos x$$

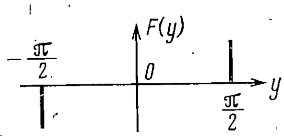
В уравнении (1.1) осуществим замену переменных

$$y = \Pi(x) \tag{1.2}$$

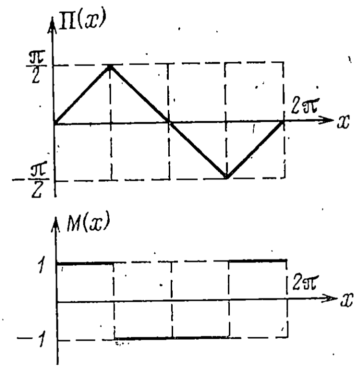
При условии, что $x^{\cdot}$ является непрерывной функцией времени, производные по времени от (1.2) запишутся так: $y^{\cdot} = \mathrm{M}(x)x^{\cdot}$, $y^{\cdot\cdot} = \Delta(x)x^{\cdot 2} + \mathrm{M}(x)x^{\cdot\cdot}$. Уравнение (1.1) в новых переменных примет вид



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\mathrm{M}(x)x^{\cdot\cdot} + \Delta(x)x^{\cdot 2} + F[\Pi(x)] = Q[t, \Pi(x), \mathrm{M}(x)x^{\cdot}] \tag{1.3}$$

Покажем, что в силу преобразования (1.2) $x^{\cdot}$ является непрерывной функцией времени. Предположим вначале, что в промежутке между двумя соударениями скорость точки $y^{\cdot}$ нигде в нуль не обращается. Тогда вдоль траектории отображение, обратное к (1.2), имеет вид

$$x = \int_0^t |y^{\cdot}|\,dt$$

Это означает, что x имеет в этом случае смысл полного пути, пройденного точкой. Отсюда $x^{\cdot} = |y^{\cdot}|$. По предположению, удар абсолютно упругий, поэтому модуль скорости в момент удара разрыва не терпит, следовательно, и $x^{\cdot}$ является непрерывной.

Пусть теперь $y^{\cdot}$ может обращаться в нуль. Тогда преобразование (1.2) характеризует переход к переменной, имеющей смысл пути в некоторой окрестности момента удара, не содержащей этого нуля, откуда вновь получаем утверждаемый факт.

Из него следует, что должны обратиться в нуль члены, содержащие дельта-функции, т. е. $\Delta(x)x^{\cdot 2} + F[\Pi(x)] = 0$.

Следовательно, уравнение (1.3) может быть переписано в виде

$$x^{\cdot\cdot} = \mathrm{M}(x)Q[t, \Pi(x), \mathrm{M}(x)x^{\cdot}] \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) эквивалентно уравнению (1.1). В отличие от уравнения (1.1) оно содержит только разрывы первого рода, чем существенно облегчается применение приближенных методов.

В тех случаях, когда уравнение (1.1) может быть решено точно (например методом припасовывания), уравнение (1.4) также решается точно, причем часто более простыми средствами.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1.4).

Пусть $Q=0$, т. е. имеем свободную точку в зазоре. Из (1.4) получим $\ddot{x}=0$, откуда общее решение имет вид $x=C_1t+C_2$.

Возвращаясь к старой переменной (1.2), получим $y=\Pi(C_1t+C_2)$.

Движение осуществляется по «пиле» с произвольной частотой и с произвольной фазой.

Пусть точка движется в среде с нелинейным, симметричным трением $Q(t, y, \dot{y})=-h\dot{y}^m$, m нечетно.

Используя первое из приведенных функциональных соотношений, найдем $Q[t, \Pi(x), \mathrm{M}(x)\dot{x}]=-h[\mathrm{M}(x)\dot{x}]^m=-h\mathrm{M}(x)\dot{x}^m$. Подставляя это выражение в (1.4), получим $\ddot{x}=-h\dot{x}^m$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t)=\begin{cases} C_1e^{-ht}+C_2 & (m=1)\\ [(m-1)(ht+C_1)]^{(m-2)/(m-1)}/h(m-2)+C_2 & (m>2)\end{cases}$$

Возвращаясь к старой переменной y, найдем

$$y(t)=\begin{cases} \Pi(C_1e^{-ht}+C_2) & (m=1)\\ \Pi\{[(m-1)(ht+C_1)]^{(m-2)/(m-1)}/h(m-2)+C_2\} & (m>2)\end{cases}$$

Найденное решение показывает, что в случае линейного сопротивления точка испытывает конечное число ударов до остановки, в случае нелинейного — бесконечное.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания точки, т. е. $Q(t, y, \dot{y})=\mu\cos t$. Уравнение (1.4) запишется в виде $\ddot{x}=\mathrm{M}(x)\mu\cos t$.

На периодическом, с периодом внешней силы, движении $\mathrm{M}(x)=\mathrm{M}(t+t_0)$, следовательно, $\ddot{x}=\mu\mathrm{M}(t+t_0)\cos t$. Так как среднее по времени от правой части есть нуль, то $t_0=\pm{}^1/_2\pi$. Дважды интегрируя полученное уравнение и определяя постоянные интегрирования из условия периодичности, получим $x(t)=t+x_*(t)$, где $x_*(t)$ — периодическая функция времени с периодом π, т. е. $x_*(t+\pi)=x_*(t)$, причем $x_*(t)=\mu(1-\cos t)-2\mu t/\pi$ при $t\in[0, \pi]$.

Решение относительно исходной переменной имеет вид $y=\Pi[t+x_*(t)]$.

Рассмотрим случай, когда на точку действует постоянная сила $Q(t, y, \dot{y})=A$. Уравнение (1.4) запишется в виде $\ddot{x}=\mathrm{M}(x)A$.

Это уравнение имеет интеграл движения

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2-A\int\limits_0^x \mathrm{M}(x)\,dx=E \quad \text{или} \quad \dot{x}^2-2A\Pi(x)=2E$$

Возможны два различных типа движения. Первый соответствует условию $E>{}^1/_2A\pi$; в этом случае система по переменной x имеет ротационные движения, т. е. материальная точка испытывает периодические соударения с обеими стенками. Второй тип движения реализуется, если $E\leqslant{}^1/_2A\pi$; в этом случае по переменной x система имеет либрационные движения в окрестности минимума потенциальной энергии $-A\Pi(x)$, т. е. в окрестности точки ${}^1/_2\pi$.

При этом материальная точка испытывает периодические соударения только с одной стенкой. В обоих рассмотренных случаях, как и в предыдущих примерах, система решается точно.

Этот пример интересен тем, что он указывает на возможность применения преобразования (1.2) и в случаях односторонних ограничений, хотя в этих случаях быстрее ведет к цели замена $y=|x|$.

3. В предыдущих примерах уравнения решались точно. Рассмотрим применение приближенных методов.

В задаче о вынужденных колебаниях точки с вязким сопротивлением, когда $Q(t,\ y,\ y^{\cdot})=-hy^{\cdot}+\mu\cos t$, уравнение (1.4) принимает вид: $x^{\cdot\cdot}=-hx^{\cdot}+\mu\mathrm{M}(x)\cos t$.

Запишем его в форме Коши, обозначив $x=x_1$, $x^{\cdot}=x_2$

$$x_1^{\cdot}=x_2, \quad x_2^{\cdot}=-hx_2+\mu\mathrm{M}(x_1)\cos t, \quad t^{\cdot}=1 \tag{3.1}$$

Если считать h и μ малыми, то уравнения (3.1) без каких-либо дополнительных преобразований подходят под схему Волосова, где x_1 и t являются двумя быстрыми фазами.

Рассмотрим случай резонанса: $nx_2-1\sim\mu$, где n — произвольное целое число. Введем замену $\theta=nx_1-t\Rightarrow x_1=(t+\theta)/n$, с учетом которой система (3.1) перепишется так:

$$x_2^{\cdot}=\mu\mathrm{M}[(t+\theta)/n]\cos t-hx_2, \quad \theta^{\cdot}=nx_2-1, \quad t^{\cdot}=1 \tag{3.2}$$

Осредняя уравнения (3.2) по времени, получим

$$x_2^{\cdot}=\frac{2\mu}{\pi n}\sin\left(\theta+\frac{\pi n}{2}\right)-hx_2, \quad \theta^{\cdot}=nx_2-1$$

Условия стационарности режима ($x_2^{\cdot}=\theta^{\cdot}=0$) дают $x_2=1/n$, $\sin(\theta_0+{}^1/_2\pi n)=h\pi/2\mu$. Отсюда условие существования режима: $|h\pi/2\mu|<1$.

Рассмотрев уравнения в вариациях для осредненной системы, получаем условие устойчивости $\mu\cos(\theta_0+{}^1/_2\pi n)<0$.

В предыдущем примере сила $Q(t,\ y,\ y^{\cdot})$ была малой. Примером, когда это не так, может служить задача о материальной точке с упругой связью, линейным сопротивлением и ограничениями. Сила Q имеет вид $Q(t,\ y,\ y^{\cdot})=-Ky-hy^{\cdot}+\mu\sin\nu t$, причем здесь K не мало, h и μ малы.

Уравнение (1.4) запишется в виде: $x^{\cdot\cdot}+hx^{\cdot}+K\Pi(x)\mathrm{M}(x)=\mu\mathrm{M}(x)\sin\nu t$, или, в нормальной форме Коши ($x=x_1$, $x^{\cdot}=x_2$)

$$x_1^{\cdot}=x_2, \quad x_2^{\cdot}=\mu\mathrm{M}(x_1)\sin\nu t-K\Pi(x_1)\mathrm{M}(x_1)-hx_2 \tag{3.3}$$

При $\mu=h=0$ система (3.3) имеет первый интеграл

$$x_2^2+2K\int_0^{x_1}\Pi(x)\mathrm{M}(x)\,dx=2E$$

Используя первое из интегральных соотношений для введенных функций, этот интеграл можно записать в виде

$$x_2^2+K\Pi^2(x_1)=2E \tag{3.4}$$

Осуществим в (3.3) замену $(x_1,\ x_2)\to(x_1,\ E)$ по формуле (3.4). Уравнения в новых переменных имеют вид

$$E^{\cdot}=\mu\mathrm{M}(x_1)\sqrt{2E-K\Pi^2(x_1)}\sin\varphi-h[2h-K\Pi^2(x_1)]$$
$$x_1^{\cdot}=\sqrt{2E-K\Pi^2(x_1)}, \quad \varphi^{\cdot}=\nu$$

Таким образом преобразование (3.4) сводит систему (3.3) к схеме Волосова с двумя быстрыми фазами.

Рассматривая случай главного резонанса $[2E-K\Pi^2(x_1)]^{1/2}-\nu\sim\mu$ и вводя медленную переменную $\theta=x_1-\varphi$, получим уравнения с одной быстрой фазой φ

$$E^{\cdot}=\mu\mathrm{M}(\varphi+\theta)[2E-K\Pi^2(\varphi+\theta)]^{1/2}\sin\varphi-h[2E-K\Pi^2(x_1)]$$
$$\theta^{\cdot}=[2E-K\Pi^2(\varphi+\theta)]^{1/2}-\nu, \quad \varphi^{\cdot}=\nu$$

Если уравнение $2E-K\Pi^2(\varphi)=0$ имеет действительные корни, то это означает, что материальная точка колеблется на пружине, не достигая упоров. Решение в этом случае имеет одинаковый вид гармонических колебаний как по переменной y, так и по переменной x. Рассмотрим случай, когда написанное уравнение не имеет действительных решений.

Уравнения первого приближения метода осреднения имеют вид

$$E^{\cdot} = -\frac{2\mu\sqrt{2E}}{\pi} L\left(\sqrt{\frac{K}{2E}}\right)\sin\theta - 2Eh$$

$$\theta^{\cdot} = \frac{1}{2}\sqrt{2E - \frac{K\pi^2}{4}} + \frac{2E}{\pi\sqrt{K}}\arcsin\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K}{2E}} - \nu \tag{3.5}$$

Здесь $L(a)$ представляет собой неэлементарную монотонноубывающую функцию, определяемую выражением

$$L(a) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-a^2\varphi^2}\cos\varphi\, d\varphi$$

При условии стационарности режима ($E^{\cdot}=\theta^{\cdot}=0$) второе уравнение системы (3.5) дает амплитудно-частотную характеристику $E(\nu)$. Найдя из нее E, из первого уравнения системы (3.5) находим выражение для фазы θ

$$\sin\theta = -\pi h\sqrt{E} / \mu\sqrt{2}L(\sqrt{K/2E})$$

Условие существования этого режима имеет вид

$$\pi h\sqrt{E} \leqslant |\mu|\sqrt{2}L(\sqrt{K/2E})$$

4. Обобщение рассмотренного метода на случай произвольного числа степеней свободы не представляет затруднений, при этом замена переменных (1.2) осуществляется для относительных координат соударяющихся тел.

Для обобщения метода на случай произвольного, не равного единице коэффициента восстановления, вместо преобразования (1.2) следует сделать преобразование $y=-\lambda\cos x+\Pi(x)$, где $\lambda=(1-r)/(1+r)$, а r — коэффициент восстановления ($x^{\cdot}>0$).

Например, для случая, когда $Q\equiv 0$, в переменной x получим уравнение

$$x^{\cdot\cdot} = -\lambda x^{\cdot 2}\cos x / [\lambda\sin x + \mathrm{M}(x)]$$

Применяя к нему метод осреднения, получим $x=\pi/2\lambda\ln|2\lambda t+C_1|+C_2$ или, в исходной переменной

$$y = -\lambda\cos(\pi/2\lambda\ln|2\lambda t+C_1|+C_2) + \Pi(\pi/2\lambda\ln|2\lambda t+C_1|+C_2)$$

Поступила 5 V 1975