МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1976

УДК 531.36

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ, СОВЕЩАЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Л. В. ДОКУЧАЕВ

(Москва)

Рассмотрены нелинейные уравнения движения твердого тела, на поступательные и угловые перемещения которого ограничения не накладываются, а деформация свободной поверхности жидкости учитывается с точностью до величин второго порядка малости. Показано, что колеблющуюся жидкость в осесимметричной полости можно заменить математическим маятником на сферическом подвесе.

Механический аналог твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью, для линейных уравнений был предложен в работе [1] в виде эквивалентного твердого тела и совокупности математических маятников. Несколько другая модель была рассмотрена в [2], где плескающаяся часть жидкости заменена совокупностью осцилляторов в виде пружин с массами.

При изучении нелинейных колебаний тела с жидкостью уравнения движения значительно усложняются, и рядом авторов делалась попытка свести исследование таких колебаний к известным результатам для механической модели. Однако из-за сложности явления и громоздкости уравнений приходится рассматривать частные случаи движения и принимать дополнительные гипотезы. Так, в работе [3] для плоского случая движения применяется прием «делинеаризации», когда линейная модель математического маятника используется и при немалых углах отклонения. В [4] исследуется пространственное движение маятника, заменяющего жидкость в сфере, в предположении, что свободная поверхность жидкости при колебаниях остается плоской. Эта же гипотеза для общего вида полости, но для плоского движения используется в [5], где предложена модель в виде маятника с переменной длиной, определяемой поверхностью «метацентров». В [2] для цилиндрического бака предложена полуэмпирическая модель в виде пружины с нелинейной жесткостью и массой, движущейся по параболической поверхности, в которой два параметра подлежат определению из эксперимента.

Во всех перечисленных работах предполагалось, что твердое тело совершает малые гармонические перемещения, а колебания свободной поверхности жидкости учитывались с точностью до величин третьего порядка малости. Ниже предлагается механическая модель пространственного движения тела с большими поступательными и угловыми скоростями, имеющего осесимметричную полость с жидкостью. Если в предшествующих работах сравнение с теорией Г. С. Нариманова [6] проводилось по интегральным кривым, то ниже, благодаря использованию в качестве обобщенных координат не углов, а направляющих косинусов, удается в общем виде получить непосредственное совпадение коэффициентов уравнений пространственного движения твердого тела с жидкостью и твердого тела со сферическим маятником с точностью до величин второго порядка малости. Используя прием делинеаризации, можно также описать этой моделью и не малые колебания тела с жидкостью, колебания свободной поверхности которой учитываются с точностью до величин третьего порядка малости, так как структура уравнений совпадает, а интегральные характеристики удовлетворительно согласуются с экспериментом [3].

Рассмотрим движение тела с жидкостью в поле тяжести $\mathbf{g}$ с поступательной $\mathbf{V}_0$ и угловой $\boldsymbol{\omega}$ скоростями. Введем связанные с телом главные центральные оси координат $Oxyz$ и для простоты будем считать, что ось Ox является осью круговой симметрии полости. Внутри объема жидкости введем цилиндрическую систему координат x, $y=r\cos\eta$, $z=r\sin\eta$. Будем учитывать только основные гармоники, возбуждаемые в двух взаимноперпендикулярных плоскостях, которым соответствуют обобщенные координата $\alpha(t)$ с формой $\varphi(r)\sin\eta$ и координата $\beta(t)$ с формой $\varphi(r)\cos\eta$.

Следуя работе [6], нелинейные краевые задачи гидродинамики сведем к последовательности линейных краевых задач. Потенциал скоростей представим в виде суммы

$$\Phi(x,y,z,t)=V_x x+V_y y+V_z z+\omega_x\left\{-\alpha\left[A_{\beta 0}+A_{\beta\alpha}\alpha+\frac{1}{2}(A_{\beta\beta}-A_{\alpha\alpha})\beta\right]+\right.$$
$$\left.+\beta\left[A_{\alpha 0}+\frac{1}{2}(A_{\beta\beta}-A_{\alpha\alpha})\alpha+A_{\alpha\beta}\beta\right]\right\}+\omega_y(\Omega_0^y+\Omega_\alpha^y\alpha+\Omega_\beta^y\beta)+$$
$$+\omega_z(\Omega_0^z+\Omega_\alpha^z\alpha+\Omega_\beta^z\beta)+\frac{d\alpha}{dt}(A_{\alpha 0}+A_{\alpha\alpha}\alpha+A_{\alpha\beta}\beta)+\frac{d\beta}{dt}(A_{\beta 0}+A_{\beta\alpha}\alpha+A_{\beta\beta}\beta)+\ldots \tag{1}$$

При этом в разложениях потенциалов при угловых и обобщенных скоростях ограничимся линейными членами, кроме компоненты ω_x. В разложении функций при ω_x учтем квадратичный член, так как нулевой член тождественно равен константе (потенциал Жуковского относительно оси вращения полости). Функции $A_{\alpha 0}$, $A_{\beta 0}$, Ω_0^y, Ω_0^z, являющиеся решениями обычных линейных краевых задач [1, 6], могут быть представлены в виде

$$A_{\alpha 0}=h(x,\ r)\sin\eta,\quad A_{\beta 0}=h(x,\ r)\cos\eta$$
$$\Omega_0^y=-F(x,\ r)\sin\eta,\quad \Omega_0^z=F(x,\ r)\cos\eta \tag{2}$$

Функции F и h удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\nabla'^2F-\frac{1}{r^2}F=0,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial\nu}\right|_{L_0+\Gamma}=x\nu_r-r\nu_x$$
$$\nabla'^2h-\frac{1}{r^2}h=0,\quad \left.\frac{\partial h}{\partial\nu}\right|_{\Gamma}=0,\quad \left.\frac{\partial h}{\partial\nu}\right|_{L_0}=\varphi$$

где L_0, Γ — контуры меридионального сечения свободной и смоченной поверхности жидкости, ν_x и ν_r — проекции орта внешней нормали, $\nabla'^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial r^2$.

Выражения Ω_α^y, Ω_β^y, Ω_α^z, Ω_β^z, $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$, представляющие собой решения нелинейных краевых задач, являются квадратичными формами от тригонометрических функций $\sin\eta$, $\cos\eta$.

Используя условия ортогональности тригонометрических функций и вводя обозначения для вектора кажущегося ускорения

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt}=\frac{d\mathbf{V}_0}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_0-\mathbf{g},\quad \left(\frac{d\mathbf{W}}{dt}\right)_x=j,\quad \left(\frac{d\mathbf{W}}{dt}\right)_y=j_y,\quad \left(\frac{d\mathbf{W}}{dt}\right)_z=j_z \tag{3}$$

получим уравнения сил в проекциях на оси связанной системы координат

$$(m^\circ+m_1)j=P_x-\lambda\left[2\left(\frac{d\alpha}{dt}\omega_y-\frac{d\beta}{dt}\omega_z\right)+\alpha\left(\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z\right)-\right.$$
$$\left.-\beta\left(\frac{d\omega_z}{dt}-\omega_x\omega_y\right)\right]-\frac{1}{2}N^2\left[\frac{d^2}{dt^2}(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^2+\beta^2)(\omega_y^2+\omega_z^2)\right] \tag{4}$$

$$(m^\circ+m_1)j_y+\lambda\frac{d^2\beta}{dt^2}=P_y+\lambda\left[2\frac{d\alpha}{dt}\omega_x+\alpha\left(\frac{d\omega_x}{dt}-\omega_y\omega_z\right)+\right.$$
$$\left.+\beta(\omega_x^2+\omega_z^2)\right]-\frac{1}{2}N^2\left[2\omega_z\frac{d}{dt}(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_x\omega_y\right)\right]$$

$$(m^\circ+m_1)j_z+\lambda\frac{d^2\alpha}{dt^2}=P_z-\lambda\left[2\frac{d\beta}{dt}\omega_x+\beta\left(\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z\right)-\alpha(\omega_x^2+\omega_y^2)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}N^2\left[2\omega_y\frac{d}{dt}(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{d\omega_y}{dt}-\omega_x\omega_z\right)\right]$$

Уравнения моментов, в которых в отличие от [6] не пренебрегается членами, содержащими переносную скорость, имеют вид

$$J_x^\circ\frac{d\omega_x}{dt}=M_x-(J_z^\circ-J_y^\circ)\,\omega_y\omega_z$$
$$(J_y^\circ+J)\frac{d\omega_y}{dt}-\left(\lambda_0\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\lambda j\alpha\right)=M_y-(J_x^\circ-J_z^\circ-J)\,\omega_x\omega_z+$$
$$+\frac{1}{2}N^2(\alpha^2+\beta^2)j_z+\lambda_0\left[2\frac{d\beta}{dt}\omega_x+\beta\left(\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z\right)+\alpha(\omega_z^2-\omega_x^2)\right]-$$
$$-\mu\left[(\alpha^2+\beta^2)\,\omega_x\omega_z+\left(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\omega_z\right]+\ldots$$
$$(J_z^\circ+J)\frac{d\omega_z}{dt}+\left(\lambda_0\frac{d^2\beta}{dt^2}-\lambda j\beta\right)=M_z+(J_x^\circ-J_y^\circ-J)\,\omega_x\omega_y-$$
$$-\frac{1}{2}N^2(\alpha^2+\beta^2)j_y+\lambda_0\left[2\frac{d\alpha}{dt}\omega_x+\alpha\left(\frac{d\omega_x}{dt}-\omega_y\omega_z\right)+\beta(\omega_x^2-\omega_y^2)\right]+$$
$$+\mu\left[(\alpha^2+\beta^2)\,\omega_x\omega_y+\left(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\omega_y\right]+\ldots \qquad (5)$$

Уравнения для обобщенных координат могут быть определены, как и в [6], из интеграла Коши — Лагранжа, но в котором следует брать не абсолютную, а локальную производную по времени [7]

$$\mu\frac{d^2\alpha}{dt^2}+N^2j\alpha+\lambda j_z-\lambda_0\frac{d\omega_y}{dt}=-\lambda_0\omega_x\omega_z-\mu\left(2\frac{d\beta}{dt}\omega_x+\beta\frac{d\omega_x}{dt}-\alpha\omega_x^2\right)+\ldots$$
$$\mu\frac{d^2\beta}{dt^2}+N^2j\beta+\lambda j_y+\lambda_0\frac{d\omega_z}{dt}=-\lambda_0\omega_x\omega_y+\mu\left(2\frac{d\alpha}{dt}\omega_x+\alpha\frac{d\omega_x}{dt}+\beta\omega_x^2\right)+\ldots \qquad (6)$$

В уравнениях (4) — (6) нелинейные члены перенесены в правую часть, а коэффициенты определяются квадратурами

$$\lambda=\rho\pi\int\limits_{L_0}r^2\varphi\,ds,\quad \mu=\rho\pi\int\limits_{L_0}rh\varphi\,ds,\quad N^2=\rho\pi\int\limits_{L_0}r\varphi^2\,ds$$
$$\lambda_0=\rho\pi\int\limits_{L_0+\Gamma}r(x\nu_r-r\nu_x)\,\varphi\,ds,\quad J=\rho\pi\int\limits_{L_0+\Gamma}r(x\nu_r-r\nu_x)F\,ds \qquad (7)$$

где ρ, m_1 — плотность и масса жидкости; m°, J_x°, J_y°, J_z° — масса и моменты инерции тела.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из эквивалентного твердого тела и математического маятника с массой m, длиной l, который закреплен в сферическом подвесе на продольной оси Ox на расстоянии $c+l$ от центра масс O.

Положение массы m характеризуется вектором

$$\mathbf{r}_m=c\mathbf{i}_x+l\boldsymbol{\gamma}+(c+l)\,\mathbf{i}_x+\mathbf{l},\quad \boldsymbol{\gamma}\{{}^1/_2(\alpha^2+\beta^2),\ \beta,\ \alpha\}$$

где α и β — направляющие косинусы оси маятника с осями Oy и Oz соответственно.

Уравнения движения такой системы имеют вид

$$(m^\circ+m_1)\frac{d\mathbf{W}}{dt}+ml\left[2\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})+\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2}\right]=\mathbf{P}^\circ \tag{8}$$

$$\begin{gathered}(J^\circ+J)\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times[(J^\circ+J)\cdot\boldsymbol{\omega}]+ml\left(\boldsymbol{\gamma}\times\frac{d\mathbf{W}}{dt}\right)+\\
+mlc\left\{\frac{d}{dt}[\mathbf{i}_x\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})+\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_x)]+\mathbf{i}_x\times\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{i}_x\times\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\right)+\right.\\
\left.+\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{i}_x\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})+\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_x)]\right\}+ml^2\left\{2\boldsymbol{\gamma}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\right)+\right.\\
\left.+\boldsymbol{\gamma}\times\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\gamma}\right)+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})]+\boldsymbol{\gamma}\times\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2}\right\}=\mathbf{M}^\circ\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}ml\left\{\mathbf{l}\times\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2}+\mathbf{l}\times\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{\gamma}\right)+2\mathbf{l}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\right)+\mathbf{l}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})]\right\}+\\
+m\left(\mathbf{l}\times\frac{d\mathbf{W}}{dt}\right)+mc\left\{\mathbf{l}\times\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{i}_x\right)+\mathbf{l}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}_x)]\right\}=0\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $(J^\circ+J)$ — тензор инерции эквивалентного тела; $\mathbf{P}^\circ$, $\mathbf{M}^\circ$ — внешние силы и моменты.

Проектируя векторные уравнения на оси координат, отбрасывая члены, которыми пренебрегали при составлении уравнений (4)—(6), получаем уравнения такой же структуры. Если параметры маятника выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$c=\lambda_0/\lambda,\quad m=\lambda^2/\mu,\quad N^2/\mu=1/l \tag{11}$$

то уравнения сил (4) и (8) совпадают полностью. Структура уравнений (5), (6) и (9), (10) также одинакова и они с точностью до отбрасываемых членов совпадают. Это объясняется тем, что в качестве обобщенных координат выбраны направляющие косинусы сферического маятника.

Таким образом, если исключить специфический случай возбуждения круговой волны в жидкости, для которого необходим учет кубичных членов, то уравнения сферического маятника (8)—(10) можно использовать в большинстве практических случаев для описания конечных разворотов летательного аппарата с жидкостью, так как эффект отброшенных членов обычно мал. Достоинством предлагаемой модели является то обстоятельство, что ее параметры (11) определяются характеристиками (7) линейных задач, заранее рассчитанных для широкого класса полостей (см., например, [1]).

Для строгого описания эффекта круговой волны, который наблюдается при вынужденных поступательных колебаниях закрепленного тела в довольно узком диапазоне частот, модель сферического маятника непригодна, так как коэффициенты при кубических членах в соответствующих уравнениях количественно различаются. Качественно же области устойчивого и неустойчивого вращения и характер движения вынужденных колебаний сферического маятника похожи на соответствующие области и движение свободной поверхности жидкости.

Поступила 18 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., Машиностроение, 1968.
2. *Bauer H.* Non-linear mechanical model for description of propellant sloshing. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 9.
3. *Луковский И. А.* К исследованию твердого тела с жидкостью, совершающей нелинейные колебания. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 6.
4. *Столбецов В. И., Фишкис В. М.* Об одной механической модели жидкости, совершающей немалые колебания в сферической полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. *Моисеев Г. А.* Некоторые вопросы делинеаризации в динамике сложных колебательных систем. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
6. *Нариманов Г. С.* О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
7. *Моисеев Н. Н.* К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.