

Моментность исходного состояния уменьшает величину критического усилия, за исключением случая очень коротких оболочек при больших значениях p . С увеличением параметра η_m относительная величина снижения величины критического усилия уменьшается. Короткие оболочки теряют устойчивость с образованием одной полуволны по длине. Искривление образующих оболочки у опор делают ее более жесткой для такой формы потери устойчивости, чем, по-видимому, и можно объяснить повышение величины критического усилия при учете моментности исходного состояния. Формы потери устойчивости оболочек показаны на фиг. 2.

Поступила 16 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов В. В. Исследование устойчивости оболочек методом конечных разностей. Изв. АН СССР МТТ, 1971, № 1.
2. Липовцев Ю. В. К устойчивости вязкоупругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.

УДК 539.374

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ УДАРА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

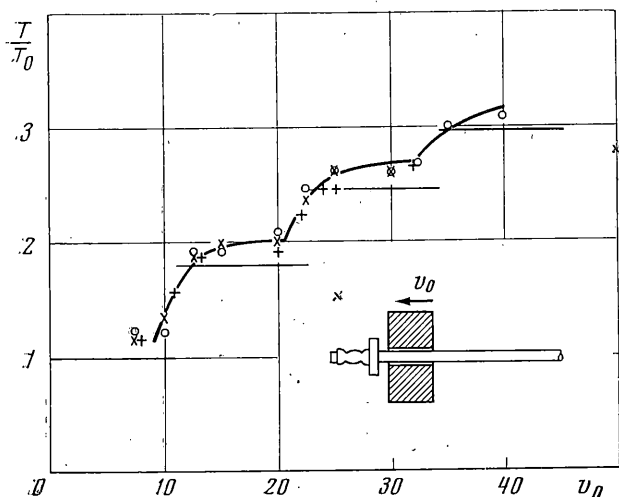
Н. А. ВЕКЛИЧ, Б. М. МАЛЫШЕВ

(Москва)

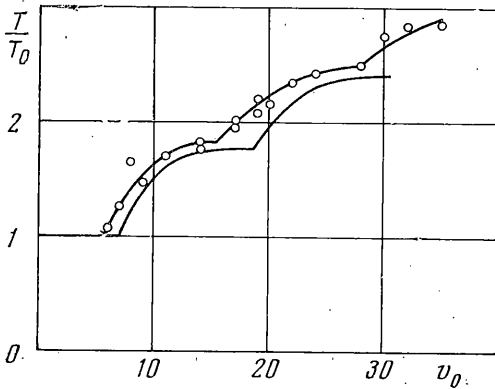
На основе теории распространения упругопластических волн [1] дается объяснение экспериментально определенной продолжительности удара упругопластических стержней при различных скоростях удара. Приведены результаты измерений продолжительности удара T по длинным тонким стержням. Экспериментальные данные сопоставлялись с результатами вычислений, выполненных по теории распространения упругопластических волн. В вычислениях использовалась статическая диаграмма растяжения материала.

Для тонких упругих стержней продолжительность удара T_0 вычисляется на основе одномерной волновой теории Сен-Венана. Предсказания теории, как было показано в работе [2], удовлетворительно согласуются с экспериментом.

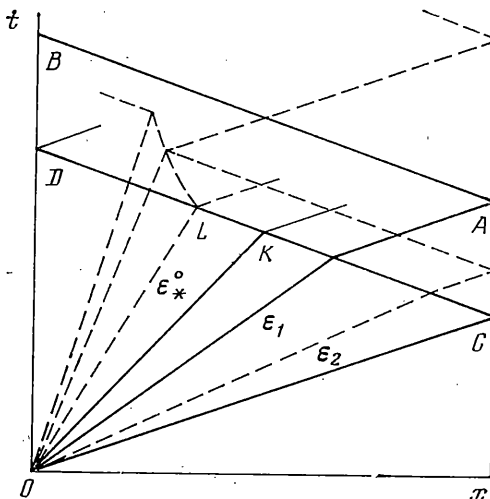
Вопрос о продолжительности удара о жесткую преграду упругопластического стержня при линейном упрочнении (схема Прандтля) теоретически впервые был



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

дены типичные результаты измерений продолжительности удара T/T_0 образцов диаметром 2 мм. Образцы имели значительный предварительный наклеп, полученный путем статической вытяжки. Светлые точки, косые и прямые крестики соответствуют образцам длиной 250 мм, 500 мм и 700 мм.

Экспериментальные данные для безразмерной продолжительности удара T/T_0 в зависимости от скорости удара v_0 достаточно точно ложатся на одну кривую. Это показывает, что безразмерная продолжительность удара не зависит от длины стержней, а зависит только от материала стержня и скорости удара. Рост продолжительности удара в зависимости от скорости имеет четко выраженный неравномерный характер с периодически расположенными изломами.

Измерения продолжительности удара (фиг. 2) для образцов длиной 500 мм из той же латунной проволоки, которой сообщалась несколько меньшая предварительная статическая вытяжка, показали, что рост величины T/T_0 в зависимости от скорости удара имеет аналогичный неравномерный характер, но «ступени» на графике получаются менее резко выраженными.

Были проведены также испытания образцов из латунной проволоки диаметром 1,46 мм и длиной 500 мм. Проволоке перед испытаниями сообщалась небольшой наклеп, при котором она практически почти не выводилась в пластическое состояние. Ее статическая диаграмма имела значительный участок нелинейной зависимости напряжения от деформации. График зависимости продолжительности удара от скорости удара, как и в предыдущем случае, имел достаточно четко выраженный неравномерный характер роста.

рассмотрен в работе [3]. Экспериментально же вопрос о продолжительности удара стержней с большими скоростями не изучался.

1. Экспериментальное определение продолжительности удара по стержню производилось при ударе вылетающим бивнем ротационного копра.

При сжимающем ударе со сравнительно небольшими скоростями длинные стержни теряют устойчивость, продолжительность удара становится очень большой, стержни практически не отскакивают от бивня.

Поэтому испытания проводились в основном при растягивающих ударах. В этом случае на ударяемом конце образца жестко крепились легкая стальная втулка с венчиком, по которой производился удар бивнем (фиг. 1).

Измерение продолжительности удара производилось счетно-импульсным хронометром [2], который измерял продолжительность контакта между бивнем и стержнем (втулкой).

Скорость удара (до 40 м/сек) контролировалась с помощью строботометра по скорости вращения диска ротационного копра.

Влияние массы втулки на продолжительность удара определялось при упругих ударах образца с втулкой. При изменении массы втулки и скорости удара заметных систематических отклонений продолжительности удара от T_0 не наблюдалось.

Испытывались тонкие длинные стержни из латуни. Образцы изготовлялись из проволоки в состоянии поставки. Обычно проволока выпрямлялась путем определенной статической вытяжки. На фиг. 1 приведены типичные результаты измерений продолжительности удара для образцов диаметром 2 мм.

2. Теоретическое исследование [4] показало, что для диаграммы с линейным упрочнением и с упругой разгрузкой зависимость продолжительности удара T/T_0 от скорости удара v_0 можно представить в виде суммы соответствующего числа членов геометрической прогрессии.

$$T/T_0 = 1 + \alpha + \dots + \alpha^k, \quad k = \text{Ent}(v_0/2v_s), \quad \alpha = (1 - a_1/a_0)/(1 + a_1/a_0) \quad (2.1)$$

Здесь v_s — скорость удара, при которой в стержне впервые появляются пластические деформации, a_0 — скорость упругих волн, a_1 — скорость пластических волн, $\text{Ent}(x)$ — целая часть числа x .

На фиг. 1 показан график T/T_0 (горизонтальные отрезки), получающийся при аппроксимации схемой Прандтля статической диаграммы латуни, $a_0/a_1 = 9.25$. Это разрывное решение качественно правильно отражает основную особенность полученной в опытах зависимости. Его можно рассматривать как вырожденное представление ступеней с плавным переходом.

Заметим, что отрезки графика имеют постоянную длину, так как при указанном значении отношения a_0/a_1 изменение длины (и нарушение формулы для k в 2.1) происходит при скоростях удара v_0 , значительно превосходящих рассмотренные [4].

Вычислим продолжительность удара, не прибегая к аппроксимации зависимости напряжения σ от деформации ϵ .

Пусть нелинейный участок диаграммы $\sigma = \sigma(\epsilon)$, выпуклый в сторону оси напряжений, плавно сопрягается с линейным упругим участком в точке (σ_s, ϵ_s) , а разгрузка из состояния (σ_*, ϵ_*) происходит по упругому закону (где ρ — плотность материала)

$$\epsilon = \epsilon_* + (\sigma - \sigma_*)/\rho a_0^2, \quad \sigma_* = \sigma(\epsilon_*) \quad (2.2)$$

Схема распространения волн в плоскости xt при растягивающем ударе по неподвижному стержню с постоянной скоростью v_0 изображена на фиг. 3 непрерывными линиями. Такая схема будет иметь место, когда скорость удара v_0 меньше некоторой скорости v^* , значение которой будет определено ниже.

Из точки O выходит со скоростью a_0 упругая волна OC , за которой следует веер волн Римана OSK и область постоянных параметров OKD .

Рассмотрим скачок деформации $\Delta\epsilon$ на волне ударной разгрузки CD

$$\Delta\epsilon = -\epsilon_s - \frac{1}{2} \int_{\epsilon_s}^{\epsilon_*} \left[\frac{a^2(\epsilon)}{a_0^2} - \frac{a(\epsilon)}{a_0} \right] d\epsilon, \quad a(\epsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} \quad (2.3)$$

Для таких материалов, как алюминий, латунь и медь, скачок $\Delta\epsilon$ обращается в нуль при некоторой деформации ϵ_*^0 , удовлетворяющей уравнению

$$\epsilon_s - \frac{1}{2} \int_{\epsilon_s}^{\epsilon_*^0} \left[\frac{a(\epsilon)}{a_0} - \frac{a^2(\epsilon)}{a_0^2} \right] d\epsilon = 0 \quad (2.4)$$

Соответствующая скорость удара v^* определяется при помощи интеграла Римана

$$v^* = - \int_0^{\epsilon_*^0} a(\epsilon) d\epsilon \quad (2.5)$$

При ударе стержня со скоростью, меньшей v^* , ударная волна разгрузки CD достигает ударяемого конца. Если при этом выше CD не возникают повторно пластические деформации [5], то продолжительность удара можно определить следующим образом.

В области разгрузки на прямолинейных характеристиках в соответствии с (2.2) имеем соотношения между скоростью v и напряжением σ

$$\rho a_0 v \pm \sigma = c_{1,2} \quad (2.6)$$

Отсюда скорость свободного конца в точке A равна

$$v_A = - \int_0^{\epsilon_*} a(\epsilon) d\epsilon - \frac{\sigma_*}{\rho a_0} \quad (2.7)$$

При некотором значении $\varepsilon_* = \varepsilon_1$ скорость $v_A = -v_0$. Тогда из условия на характеристике AB находим, что в точке B напряжение $\sigma_B = 0$. Будем считать, что этот момент соответствует концу удара. Безразмерная продолжительность удара равна

$$T/T_0 = 1 + \alpha(\varepsilon_1), \quad \alpha(\varepsilon) = [1 - a(\varepsilon)/a_0] [1 + a(\varepsilon)/a_0]^{-1} \quad (2.8)$$

Скорость удара v_0 связана с деформацией ε_1 равенством

$$v(\varepsilon_1) = \int_0^{\varepsilon_1} a(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\sigma(\varepsilon_1)}{\rho a_0} = v_0 \quad (2.9)$$

Функция $v(\varepsilon_1)$ введена для упрощения записи. Придавая ε_1 различные значения из интервала $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_*$, при помощи (2.8) и (2.9) можно построить зависимость продолжительности удара от скорости.

Если скорость удара v_0 превосходит v_0^* , то ударная волна разгрузки переходит в точке L в непрерывную криволинейную волну разгрузки, как показано на фиг. 3 пунктиром. Соотношения (2.8) и (2.9) остаются справедливыми до скоростей удара v_0^* , причем

$$v_0^* = x(\varepsilon_*^0) \quad (2.10)$$

При $v_0 > v_0^*$ безразмерную продолжительность удара T/T_0 вычисляем по формуле

$$T/T_0 = 1 + \alpha(\varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2) \quad (2.11)$$

Деформация ε_1 в (2.11) по-прежнему определяется уравнением (2.9), а для ε_2 имеем уравнение

$$\int_0^{\varepsilon_2} a(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\sigma(\varepsilon_2)}{\rho a_0} = \int_0^{\varepsilon_1} a(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon_1)}{\rho a_0} \quad (2.12)$$

Если ввести функцию $f(\varepsilon)$

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{\rho a_0} \quad (2.13)$$

то для определения ε_1 и ε_2 по заданной скорости удара v_0 получаем систему уравнений

$$v(\varepsilon_1) = v_0, \quad v(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_1) \quad (2.14)$$

являющуюся более простой формой уравнений (2.9) и (2.12). Уравнения (2.14) можно решать графически.

Соотношениями (2.11) и (2.14) можно пользоваться и для вычисления T/T_0 при скоростях удара, меньших v_0^* . В этом случае деформация ε_2 попадает в интервал $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_*$, следовательно, $\alpha(\varepsilon_2) = 0$, и формула (2.11) совпадает с (2.8).

Результаты вычислений, проводившихся по формулам (2.8) — (2.14), показаны на фиг. 2 (нижняя кривая). Приведенные результаты показывают, что теория дает для продолжительности удара несколько заниженное значение по сравнению с экспериментальными данными. Непрерывное решение для продолжительности удара согласуется с экспериментом лучше, чем разрывное решение, полученное при аппроксимации статической диаграммы материала схемой Прандтля.

Некоторое увеличение продолжительности удара в эксперименте по сравнению с теорией, возможно, обусловлено кажущимся увеличением продолжительности контакта между бивнем и втулкой за счет электрического пробоя очень небольшого зазора между ними. Особенно это сказывается в конце неупругого удара, когда втулка отходит от бивня с постепенным возрастанием критической скорости. К тому же, масса втулки будет замедлять образование критического зазора, при котором нарушается электрический контакт.

Теоретическое решение для рассмотренных материалов получено лишь для первых двух ступеней. При больших скоростях удара определение продолжительности удара осложняется тем, что в областях, претерпевших упругую разгрузку, возникают повторные пластические деформации.

Поступила 19 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Малышев Б. М. Измерение продолжительности удара. Вестн. МГУ, 1952, вып. 5.
3. Ленский В. С. Об упругопластическом ударе стержня о жесткую преграду. ПММ, 1949, т. 13, вып. 2.
4. Веклич Н. А. О распространении и взаимодействии упругопластических волн в стержне при ударе о преграду. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
5. Lee E. H. A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 10, No. 4.

УДК 531/534 : 0.61.6+004

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

Семинары

Теоретический семинар под руководством Ю. Н. Работнова, Л. А. Галина, Г. С. Шапиро, В. Д. Ключникова.

17 XI 1975. В. Керас (Каунас) *Операции кинетики деформации (применение исследования операций для воспроизведения процесса разрушения на ЭВМ).*

Рассмотрены вопросы применения методов исследования операций для изучения процесса деформирования — разрушения (анализ операций) и последующего управления им (планирование операций).

24 XI 1975. В. П. Шатилов (Воронеж) *Применение вариационных принципов к расчету пластин и оболочек.*

В предположении, что для среды существуют потенциалы напряжений и скоростей деформации, построен смешанный вариационный принцип для σ_{ij} и ϵ_{ij} . В частном случае принцип формулируется для вязкопластической среды и используется для построения технической теории изгиба пластин и оболочек. Рассмотрены примеры расчета пластин и оболочек на основе предложенного вариационного принципа.

1 XII 1975. Д. Д. Ивлев (Москва), И. А. Бережной (Куйбышев) *Об определяющих неравенствах теории пластичности.*

Для упругопластического упрочняющегося материала рассматриваются замкнутые циклы нагружения и деформирования. Предполагается, что упругие свойства не зависят от пластических, причем отрезок нагружения при выходе за первоначальную поверхность нагружения достаточно мал, так что приобретаемая при этом пластическая деформация δe^p также достаточно мала.

Если A — точка на первоначальной поверхности нагружения, а B — любая точка внутри поверхности нагружения, то для путей, замкнутых по нагружениям, с точностью до малых высшего порядка, устанавливаются соотношения

$$\oint_{\sigma} \sigma de = \sigma_A \delta e^p, \quad \oint_{\sigma} e d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) \delta e^p, \quad \oint_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de = (\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p$$

Аналогично, для путей, замкнутых по деформациям

$$\oint_e \sigma de = (\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p, \quad \oint_e e d\sigma = -\sigma_A \delta e^p, \quad \oint_e (e - e_B) d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) \delta e^p$$

Из полученных соотношений следует с точностью до малых высшего порядка:

$$\oint_{\sigma} \sigma de + \oint_e e d\sigma = 0, \quad \oint_{\sigma} e d\sigma + \oint_e \sigma de = 0$$