$$-\frac{\sigma_y h R^2}{D}(\alpha_k^2+\beta_m^2)^2\alpha_k^2-\omega^2\rho h\frac{R^4}{D}(\alpha_k^2+\beta_m^2)^2$$

где σ_x, σ_y — начальные мембранные напряжения.

Приведем результаты расчета устойчивости оболочки с параметрами $l=2\pi$, $\varepsilon=400$ для различных случаев закрепления поверхности. На фигуре представлены зависимости безразмерного критического давления p/p_0 (p_0 — критическое давление для неподкрепленной оболочки) от параметра $C_*=c/Eh$ жесткости опорных точек для случая закрепления оболочки в среднем сечении в трех, четырех, пяти, шести и семи точках, равноудаленных одна от другой. При закреплении в трех — шести точках, начиная с некоторого значения жесткости C_{**} опорных точек, дальнейшее ее увеличение не изменяет величины критического давления. При закреплении в семи точках имеет место асимптотическое приближение к предельной величине критического давления. Наибольший эффект из рассмотренных случаев дает закрепление в пяти точках.

Были получены результаты расчета для случая закрепления оболочки по каждому из двух сечений ($x_1={}^1/_3l$, $x_2={}^2/_3l$) также в трех — семи точках. Качественная картина получается аналогичная. Но здесь для достижения одинакового результата по критическому давлению требуется примерно в 1.5 раза большая суммарная жесткость опор, чем в предыдущем случае.

Поступила 28 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ting L., Juan S. W.* On radial deflection of a cylinder of finite length with various end conditions. J. Aeronaut Sci., 1958, vol. 25, No. 4.
2. Упругие оболочки. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Даревский В. М., Шаринов И. А.* Свободные колебания цилиндрической оболочки с сосредоточенной массой. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ПО ДЛИНЕ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В. В. КАБАНОВ, Г. И. КУРЦЕВИЧ

(Новосибирск)

Изложена методика расчета на устойчивость круговой цилиндрической оболочки при действии в ее срединной поверхности неоднородных по длине осевых и окружных усилий. Исходное состояние оболочки моментное. В рамках конечно-разностного метода разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать устойчивость оболочки при различных нагрузках и граничных условиях. В отличие от известных алгоритмов исходное состояние оболочки исследуется численно. В качестве примера приводятся результаты исследования устойчивости оболочки при нагружении ее изменяющимися по длине осевыми усилиями. Анализируется влияние моментности исходного состояния и неравномерности усилий.

1. Исходное состояние оболочки. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, в срединной поверхности которой действуют неоднородные по длине усилия $T_1=-Nf(x)$. Функция $f(x)$ характеризует изменение усилий по длине, N — амплитуда усилия. Усилия такого рода могут возникнуть в резервуарах при действии собственного веса, в корпусах ракет от сил инерции при старте и т. д.

Исходное напряжённо-деформированное состояние оболочки определяется решением уравнения нелинейного краевого эффекта

$$Dw_{xxxx}+N(fw_{xx}+f_xw_x)+Ehk_2{}^2w=-k_2\nu fN \tag{1.1}$$

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; w — прогиб оболочки; R, h — радиус и толщина оболочки. Координата x в индексах означает дифференцирование. Уравнение (1.1) имеет переменные коэффициенты, поэтому решается численно.

Введем обозначения

$$\eta=\frac{x}{\theta},\qquad W=\frac{w}{\theta},\qquad N^*=\frac{N}{T_B}=\frac{N}{2Eh\alpha_0^2}$$

$$\theta^2=\frac{hR}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},\qquad \alpha_0=k_2\theta,\qquad T_B=\frac{2Eh^2}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}$$

Запишем уравнение (1.1) в безразмерном виде

$$W_{\eta\eta\eta\eta}+2N^*(fW_{\eta\eta}+f_\eta W_\eta)+W=-2\nu fN^*\alpha_0 \tag{1.2}$$

Заменим уравнение (1.2) системой двух уравнений второго порядка

$$W_{\eta\eta}-\chi=0,\qquad \chi_{\eta\eta}+2N^*(f\chi+f_\eta W_\eta)+W=-2\nu fN^*\alpha_0 \tag{1.3}$$

Разбив относительную длину оболочки $\eta_m=L/\theta$ на m частей с шагом $c=\eta_m/m$ и заменив производные через центральные разности

$$2cW_{i\eta}=W_{i+1}-W_{i-1},\qquad c^2W_{i\eta\eta}=W_{i+1}-2W_i+W_{i-1}$$

запишем систему (1.3) в конечно-разностной форме

$$W_{i+1}-2W_i+W_{i-1}-c^2\chi_i=0 \tag{1.4}$$

$$\chi_{i+1}-2\chi_i+\chi_{i-1}+2N^*c^2[f_i\chi_i+f_{i\eta}(W_{i+1}-W_{i-1})/2c]+c^2W_i=-2\nu c^2N^*f_i\alpha_0 \qquad (i=0,1,2,\ldots,m)$$

Введем вектор столбец $\vartheta=\{W,\chi\}$ и преобразуем систему (1.4) к одному векторно-матричному уравнению

$$C_i\vartheta_{i-1}+B_i\vartheta_i+A_i\vartheta_{i+1}=\alpha_0E_i \tag{1.5}$$

$$A_i,C_i=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ \pm cN^*f_{i\eta} & 1\end{matrix}\right\|,\qquad B_i=\left\|\begin{matrix}-2 & -c^2\\ 0 & -2(1-c^2f_iN^*)\end{matrix}\right\|,\qquad E_i=\left\|\begin{matrix}0\\ -2\nu c^2f_iN^*\end{matrix}\right\|$$

Уравнение (1.5) следует дополнить граничными условиями, которые в векторно-матричной форме имеют вид

$$G_i(\vartheta_{i+1}-\vartheta_{i-1})+D_i\vartheta_i=0\qquad (i=0,m) \tag{1.6}$$

Матрицы G_i и D_i определяются видом граничных условий. Для опертой оболочки ($w=w_{xx}=0$) имеем: $G_i=\|0\|$, $D_i=\|1\|=I$.

Таким образом, получили систему $m+3$ алгебраических уравнений (1.5), (1.6) с $m+3$ неизвестными. Система имеет рекуррентный характер, ее решение легко получить методом матричной прогонки. Положим

$$\vartheta_i=M_i\vartheta_{i+1}+K_i \tag{1.7}$$

Подставив ϑ_{i+1} из (1.7) в (1.5) и сравнив с (1.7), получим выражение для матриц

$$M_i=-(B_i+A_iM_{i+1})^{-1}C_i,\qquad K_i=(B_i+A_iM_{i+1})^{-1}(\alpha_0E_i-A_iK_i) \tag{1.8}$$

Матрицы M_m и K_m, необходимые для начала счета по рекуррентным формулам (1.8), получим из граничных условий (1.6) при $i=m$

$$G_m(\vartheta_{m+1}-\vartheta_{m-1})+D_m\vartheta_m=0. \tag{1.9}$$

В точке $i=m$ должно выполняться и уравнение (1.5). Решая совместно уравнения (1.9) и (1.5) и принимая во внимание (1.7) при $i=m$, получаем

$$M_m=-2(-D_m+G_mA_m^{-1}B_m)^{-1}G_mA_m^{-1},\qquad K_m=-\alpha_0(D_m-G_mA_m^{-1}B_m)^{-1}G_mA_m^{-1}E_m \tag{1.10}$$

Вектор ϑ_0 в (1.7) получим из граничных условий (1.6) при $i=0$, подставив ϑ_1 и ϑ_{-1} согласно (1.7)

$$\vartheta_0=[G_0(M_0^{-1}-M_1)-D_0]^{-1}G_0(K_1+M_0^{-1}K_0) \tag{1.11}$$

Формулы (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) составляют вычислительный алгоритм матричной прогонки. По найденным значениям ϑ_i определяются его компоненты W_i, $\chi_i = W_{i\eta\eta}$. После этого находится окружное усилие $T_2 = -Ehk_2w + \nu T_1$.

2. Устойчивость оболочки. Устойчивость исходного равновесного состояния оболочки исследуем, используя уравнения устойчивости пологих оболочек

$$D\nabla^4 w - k_2 F_{xx} - T_1^\circ w_{xx} - T_2^\circ w_{yy} - T_{1x}^\circ w_x - F_{yy} w_{xx}^\circ - F_{xyy} w_x^\circ = 0$$
$$\nabla^4 F + Eh(k_2 w_{xx} + w_{xx}^\circ w_{yy}) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2)$, $\nabla^2 = (\ )_{xx} + (\ )_{yy}$ — оператор Лапласа; x, y — продольная и окружная координаты; w, F — прогиб и функция усилий дополнительного состояния, ответвляющегося от исходного состояния в точке бифуркации. Все величины, обозначенные градусом в степени, здесь и далее относятся к исходному состоянию оболочки, которое было определено в п. 1.

Введем подстановку (где n — число волн по окружности)

$$\eta = x/\theta, \qquad s = y/\theta, \qquad \beta = n/\alpha_0, \qquad w = W\theta \cos\beta s, \qquad F = \Phi Ehk_2\theta^3 \cos\beta s$$

и преобразуем систему (2.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W_{\eta\eta\eta\eta} - (2\beta^2 - 2fN^*)W_{\eta\eta} + \beta^2(\beta^2 - 2\nu fN^* - W^\circ\alpha_0^{-1})W +$$
$$+\beta^2 W_{\eta\eta}^\circ \alpha_0^{-1}\Phi - \Phi_{\eta\eta} + 2N^* f_\eta W_\eta + \alpha_0^{-1}\beta^2 W_\eta^\circ \Phi_\eta = 0$$
$$\Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\beta^2\Phi_{\eta\eta} + \beta^4\Phi - \beta^2\alpha_0^{-1}W_{\eta\eta}^\circ W + W_{\eta\eta} = 0$$

Заменим их системой четырех уравнений второго порядка

$$W_{\eta\eta} - U = 0, \qquad \Phi_{\eta\eta} - \Psi = 0, \qquad U_{\eta\eta} - 2(\beta^2 - fN^*)U + \beta^2(\beta^2 + 2\nu fN^* - W^\circ\alpha_0^{-1})W + \tag{2.2}$$
$$+\beta^2\alpha_0^{-1}W_{\eta\eta}^\circ\Phi - \Psi + 2f_\eta N^* W_\eta + \beta^2\alpha_0^{-1}W_\eta^\circ\Phi_\eta = 0, \qquad \Psi_{\eta\eta} - 2\beta^2\Psi + \beta^4\Phi - \beta^2\alpha_0^{-1}W_{\eta\eta}^\circ W + U = 0$$

Введя вектор-столбец $\vartheta = \{\Phi, W, U, \Psi\}$ и заменив производные конечно-разностными соотношениями, как и в случае исходного состояния оболочки, запишем систему (2.2) в виде системы векторно-матричных алгебраических уравнений

$$C_i\vartheta_{i-1} + B_i\vartheta_i + A_i\vartheta_{i+1} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Здесь A_i, B_i, C_i — матрицы четвертого порядка.

Уравнения (2.3) необходимо дополнить граничными условиями, которые в общем случае можно записать в виде

$$G_i(\vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}) + D_i\vartheta_i = 0 \qquad (i = 0, m) \tag{2.4}$$

Здесь G_i, D_i — матрицы четвертого порядка. Их содержание определяется характером граничных условий. Например, для свободно опёртых оболочек ($w = w_{xx} = F_{xx} = F_{yy} = 0$) имеем: $G_i = 0$, $D_i = I$.

Нетривиальному решению системы уравнений (2.3), (2.4) соответствует равенство нулю ее определителя. Определитель имеет трехчленное строение и легко приводится к треугольному определителю методом Гаусса в матричной форме [1]. В результате для вычисления определителя получается рекуррентный процесс

$$\Delta = \Delta_p\Delta_1, \quad \Delta_1 = |B_0^\circ|\Delta^\circ, \quad \Delta^\circ = \Delta_p^\circ\Delta_1^\circ, \quad \Delta_p^\circ = |B_1^\circ|, \quad \Delta_p = |(D_0 + G_0M_1)M_0 - G_0|$$
$$\Delta_1^\circ = |B_2^\circ B_3^\circ \ldots B_m^\circ A_m|, \qquad B_i^\circ = B_i - A_iB_{i+1}^\circ C_{i+1} = B_i + A_iM_{i+1} \tag{2.5}$$
$$M_i = -B_i^\circ C_i = -(B_i + A_iM_{i+1})^{-1}C_i, \quad B_m^\circ = D_m - G_mA_m^{-1}B_m, \quad M_m = B_m^{\circ -1}G_m(I + A_m^{-1}C_m)$$

Два соседних вектора при этом связаны зависимостью

$$\vartheta_{i+1} = M_{i+1}\vartheta_i \tag{2.6}$$

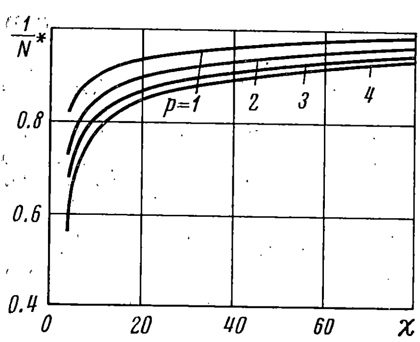
Уравнение $\Delta = 0$ позволяет найти критическую нагрузку, которая определяется как наименьший корень этого уравнения. Его можно найти графически, насчитав Δ для ряда значений параметра нагрузки $t_1 = N^*$ и проминимизировав значения наименьших корней по параметру волн β. Из зависимости (2.6) можно найти все векторы с точностью до произвольного множителя и, следовательно, определить форму потери устойчивости.

Вместо $\Delta = 0$ можно использовать также уравнение $\Delta_p = 0$, которое соответствует решению системы (2.3), (2.4) методом матричной прогонки [2]. Однако при этом в зависимости определителя от параметра нагрузки могут появляться разрывы второго рода, которые соответствуют нулям отброшенной части полного определителя (2.5). Это обстоятельство надо иметь в виду при нахождении корней уравнения $\Delta_p = 0$.

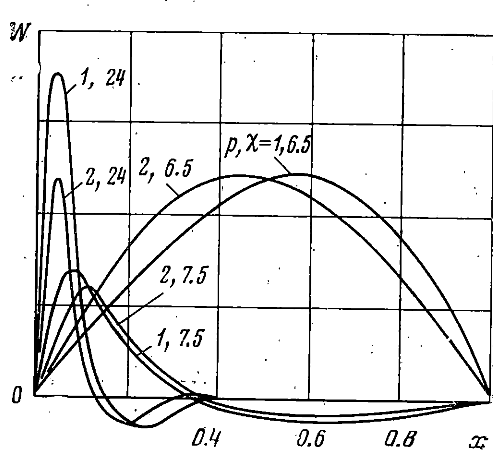
p	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1.048	1.078	1.113	1.135	1.088	1.198	1.322	1.430
B	1.058	1.111	1.138	1.186				
C	0.894	0.943	0.996	1.047				
D	0.905	0.959	1.012	1.066				
E	0.890	0.939	0.986	1.032	1.003	1.091	1.179	1.269
G	0.900	0.954	1.003	1.048	1.008	1.098	1.195	1.280
A	1.089	1.137	1.180	1.216	1.214	1.456	1.670	1.966
B	1.102	1.184	1.238	1.310				
C	0.948	1.054	1.157	1.255				
D	0.961	1.073	1.187	1.278				
E	0.944	1.041	1.131	1.214	1.101	1.290	1.479	1.680
G	0.958	1.057	1.149	1.234	1.111	1.300	1.498	1.703
A	1.142	1.225	1.294	1.354	1.422	1.905		
B	1.195	1.321	1.440	1.585				
E	1.055	1.245	1.423	1.615	1.342	1.792		
G	1.073	1.264	1.448	1.646	1.355	1.827		

В качестве примера исследуем устойчивость оболочки при полиномиальном законе изменения осевых усилий $T_1^\circ=-N(1-x/L)^p$, где $p=0, 1, 2\ldots$ При $p=0$ оболочка сжата равномерно, случаи $p>0$ соответствуют различным законам неравномерного сжатия.

Для решения уравнения (2.5) была составлена программа для ЭВМ типа М-20. Результаты вычислений значений N^* приведены в таблице; для свободно опертой



Фиг. 1



Фиг. 2

(левая часть таблицы) и защемленной (правая часть) оболочек при $\eta_m=60$, 30, 15 (соответственно верхняя, средняя и нижняя части таблицы). Значение параметра β равнялось 0.39–0.45.

В случае A исходное состояние оболочки считалось безмоментным (в уравнениях $w^\circ=w_{xx}^\circ=0$); в случае B дополнительно принято $T_{1x}^\circ=0$, что соответствует действию следящих усилий T_1°; в случае C учтена моментность исходного состояния ($w_{xx}^\circ\neq0$) и принято $w_x^\circ=T_{1x}^\circ=0$ (следящие усилия); $T_{1x}^\circ=0$, $w_{xx}^\circ\neq0$, $w_x^\circ\neq0$ в случае D; $w_{xx}^\circ\neq0$, $w_x^\circ=0$; $T_{1x}^\circ\neq0$ в случае E; учтены моментность исходного состояния и консервативность усилия T_1° ($w_{xx}^\circ\neq0$, $w_x^\circ\neq0$, $T_{1x}^\circ\neq0$) в случае G.

На фиг. 1 показаны зависимости N^* от параметра $\chi=\eta_m/\pi$ при различных значениях p для оболочек при безмоментном исходном состояниях (случай А). Для относительно длинных и толстых оболочек это влияние незначительно.

Моментность исходного состояния уменьшает величину критического усилия, за исключением случая очень коротких оболочек при больших значениях p. С увеличением параметра η_m относительная величина снижения величины критического усилия уменьшается. Короткие оболочки теряют устойчивость с образованием одной полуволны по длине. Искривление образующих оболочки у опор делают ее более жесткой для такой формы потери устойчивости, чем, по-видимому, и можно объяснить повышение величины критического усилия при учете моментности исходного состояния. Формы потери устойчивости оболочек показаны на фиг. 2.

Поступила 16 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанов В. В.* Исследование устойчивости оболочек методом конечных разностей. Изв. АН СССР МТТ, 1971, № 1.
2. *Липовцев Ю. В.* К устойчивости вязкоупругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.

УДК 539.374

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ УДАРА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

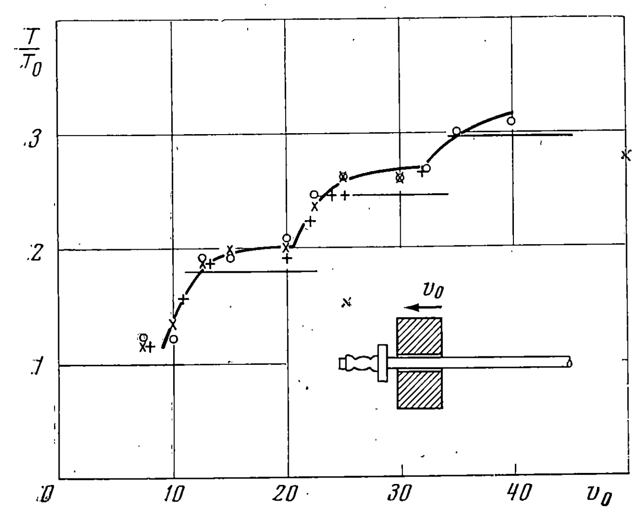
Н. А. ВЕКЛИЧ, Б. М. МАЛЫШЕВ

(*Москва*)

На основе теории распространения упругопластических волн [1] дается объяснение экспериментально определенной продолжительности удара упругопластических стержней при различных скоростях удара. Приведены результаты измерений продолжительности удара T по длинным тонким стержням. Экспериментальные данные сопоставлялись с результатами вычислений, выполненных по теории распространения упругопластических волн. В вычислениях использовалась статическая диаграмма растяжения материала.

Для тонких упругих стержней продолжительность удара T_0 вычисляется на основе одномерной волновой теории Сен-Венана. Предсказания теории, как было показано в работе [2], удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Вопрос о продолжительности удара о жесткую преграду упругопластического стержня при линейном упрочнении (схема Прандтля) теоретически впервые был



Фиг. 1