

## УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТОЧЕЧНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ

И. С. МАЛЮТИН

(Москва)

Рассматривается устойчивость и колебания цилиндрической оболочки, упруго закрепленной в произвольных точках поверхности. Для общности предполагается наличие на оболочке сосредоточенных масс в местах закрепления, что позволяет рассмотреть как частный случай также задачу о свободных колебаниях оболочки с сосредоточенными массами. Оболочка нагружена внешним давлением и осевыми силами. Края оболочки принимаются шарнирно опертыми. Учитываются нормальные составляющие сил инерции и реакций в точках закрепления поверхности оболочки.

Задача приводится к алгебраической системе однородных уравнений относительно амплитудных значений нормальных перемещений в точках крепления. Равенство нулю определителя системы является характеристическим уравнением для определения критической нагрузки и частот свободных колебаний. В случае произвольного количества регулярно расположенных опорных точек (масс) характеристическое уравнение получено в явном виде.

Будем исходить из модифицированного уравнения Доннела [1, 2]

$$\nabla^8 w + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{R^4}{D} \nabla^4 Z = 0 \quad (1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты в долях радиуса  $R$  цилиндрической оболочки.

В рассматриваемой задаче устойчивости и колебаний величина  $Z$  будет представлять собой сумму приведенной нагрузки от мембранных усилий, возникающей при изменении кривизн, инерционной нагрузки и реакций в точках закрепления поверхности оболочки

$$Z = -\frac{p}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + w \right) - \frac{q}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^n M_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} \delta(x-x_i, y-y_i) + \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^n Z_i \delta(x-x_i, y-y_i) \quad (2)$$

Здесь  $p$  — внешнее давление,  $q$  — осевое сжимающее усилие,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $M_i$  — сосредоточенная масса,  $t$  — время,  $w_i = w(x_i, y_i, t)$ ,  $(x_i, y_i)$  — точка закрепления оболочки,  $Z_i$  — реакция в этой точке,  $n$  — количество точек закрепления,  $\delta(x, y)$  — дельта-функция.

Считая точечное закрепление упругим, имеем  $Z_i = -c_i w_i$ , где  $c_i$  — жесткость закрепления. Тогда согласно (1) и (2) уравнение устойчивости и колебаний запишется в виде

$$\nabla^8 w + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{pR^3}{D} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + w \right) + \frac{qR^2}{D} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{R^4}{D} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{R^2}{D} \nabla^4 \sum_{i=1}^n M_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} \delta(x-x_i, y-y_i) + \frac{R^2}{D} \nabla^4 \sum_{i=1}^n c_i w_i \delta(x-x_i, y-y_i) = 0 \quad (3)$$

Для оболочки с шарнирно закрепленными краями решение ищем в форме

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} (A_{km} \cos my + B_{km} \sin my) \sin \omega t \quad (4)$$

Здесь  $l$  — длина оболочки. Представив дельта-функцию в виде

$$\delta(x-x_i, y-y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} (a_{km}^{(i)} \cos my + b_{km}^{(i)} \sin my)$$

$$a_{km}^{(i)} = \frac{2-\delta_{m0}}{\pi l} \sin \frac{k\pi x_i}{l} \cos m y_i, \quad b_{km}^{(i)} = \frac{2}{\pi l} \sin \frac{k\pi x_i}{l} \sin m y_i$$

$$\delta_{km}=1, \quad k=m; \quad \delta_{km}=0, \quad k \neq m$$

из уравнения (3) находим

$$A_{km} = \frac{R^2}{D} \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} \sum_{i=1}^n (M_i \omega^2 - c_i) a_{km}^{(i)} W_i$$

$$B_{km} = \frac{R^2}{D} \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} \sum_{i=1}^n (M_i \omega^2 - c_i) b_{km}^{(i)} W_i, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l}$$

$$\Delta_{km} = (\gamma_k^2 + m^2)^4 + \varepsilon^2 \gamma_k^4 - 2m^6 + m^4 - \frac{pR^3}{D} (\gamma_k^2 + m^2)^2 (m^2 - 1) -$$

$$- \frac{qR^2}{D} (\gamma_k^2 + m^2)^2 \gamma_k^2 - \omega^2 \rho h \frac{R^4}{D} (\gamma_k^2 + m^2)^2, \quad w_i = W_i \sin \omega t$$

Полагая в выражении (4) последовательно  $x=x_r$ ,  $y=y_r$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ), получаем однородную систему уравнений относительно амплитудных значений прогибов в местах закрепления поверхности оболочки

$$w_r = \sum_{i=1}^n (M_i \omega^2 - c_i) d_{ri} W_i \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$d_{ri} = \frac{R^2}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} \sin \frac{k\pi x_r}{l} (a_{km}^{(i)} \cos m y_r + b_{km}^{(i)} \sin m y_r)$$

Приравнявая нулю определитель системы (5), получаем характеристическое уравнение задачи.

Если некоторые (или все) точки закреплены жестко, то для них прогибы нужно положить равными нулю, а соответствующие им конечные величины  $c_i W_i = Q_i$  рассматривать как неизвестные.

Рассмотрим случай регулярного расположения точек крепления в узлах прямоугольной сетки:  $x_i = il / (n_1 + 1)$ ,  $y_j = 2\pi j / n_2$  ( $i=1, 2, \dots, n_1$ ;  $j=1, 2, \dots, n_2$ ). Общее количество точек, следовательно, равно  $n_1 n_2$ .

Жесткости  $c_i$  и массы  $M_i$  считаем одинаковыми ( $c_i = c$ ,  $M_i = M$ ). Обозначим прогиб в точке  $(x_i, y_j)$  через  $W_{ij}$ . Тогда система уравнений (5) может быть переписана в виде

$$W_{rs} = (M\omega^2 - c) \sum_{i,j} d_{rs}^{ij} W_{ij} \quad (r=1, 2, \dots, n_1; s=1, 2, \dots, n_2) \quad (6)$$

$$d_{rs}^{ij} = \frac{R^2}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} \sin \frac{k\pi x_r}{l} (a_{km}^{ij} \cos m y_s + b_{km}^{ij} \sin m y_s)$$

$$a_{km}^{ij} = \frac{2-\delta_{m0}}{\pi l} \sin \frac{k\pi x_i}{l} \cos m y_j, \quad b_{km}^{ij} = \frac{2}{\pi l} \sin \frac{k\pi x_i}{l} \sin m y_j$$

Решение уравнений (6) ищем в виде

$$W_{ii} = \sin \frac{i\pi \alpha}{n_1 + 1} \left( a \cos \frac{2\pi j \beta}{n_2} + b \sin \frac{2\pi j \beta}{n_2} \right) \quad (7)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — целые числа, характеризующие форму волнообразования, причем  $1 \leq \alpha \leq n_1$ ,  $0 < \beta < n_2/2$ . Этими условиями исключаются из рассмотрения случаи деформации без «захвата» точек крепления поверхности оболочки, когда  $\alpha = k(n_1 + 1)$  и  $\beta = mn_2$  ( $k, m = 1, 2, \dots$ ), а также  $\beta = mn_2/2$  при  $n_2$  четном.

Таким случаям соответствуют критические параметры, определяемые из уравнения  $\Delta_{\alpha\beta} = 0$  при указанных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . Они совпадают с критическими параметрами для неподкрепленной оболочки при соответствующей форме волнообразования. Если, например, давление и осевые усилия изменяются пропорционально одному параметру, то практически из всех возможных случаев форм потери устойчивости (с захватом и без захвата точек крепления) будет реализовываться тот, которому соответствует наименьшее значение параметра нагрузки.

Подстановкой выражений (7) в уравнения (6) убеждаемся, что эти уравнения удовлетворяются при  $a$  и  $b$ , не равных нулю одновременно, если имеет место следующее уравнение (характеристическое):

$$(M\omega^2 - c) \frac{R^2 n_2 (n_1 + 1)}{2\pi l D} \sum_m \sum_k \frac{(\gamma_k^2 + m^2)^2}{\Delta_{km}} = 1 \quad (8)$$

Здесь суммирование производится по  $k$  и  $m$ , принимающим значения  $k = \alpha, 2s(n_1 + 1) \pm \alpha$ ;  $m = \beta, 2s(n_2 + 1) \pm \beta$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). При  $\beta = 0$  слагаемое, соответствующее значению  $m = sn_2$ , входит в сумму уравнения (8) дважды.

При  $\omega = 0$ , придавая величинам  $\alpha$  и  $\beta$  различные значения, из уравнения (8) находим критическую жесткость (наибольшая величина) или критическую нагрузку (наименьшее значение) для случая деформации с захватом точечных опор.

Полагая  $c = p = q = 0$ , получаем уравнение частот цилиндрической оболочки, несущей произвольное количество одинаковых регулярно расположенных масс

$$\omega^2 \frac{M}{\rho h} \frac{n_2 (n_1 + 1)}{2\pi l R^2} \sum_m \sum_k \frac{1}{\omega_{km}^2 - \omega^2} = 1 \quad (9)$$

$$\omega_{km}^2 = \frac{D}{\rho h R^4} \left[ (\gamma_k^2 + m^2)^2 + \frac{c^2 \gamma_k^4 - 2m^6 + m^4}{(\gamma_k^2 + m^2)^2} \right]$$

В случае одной массы из уравнения (9) как частный случай следует результат работы [3] (с учетом того, что в работе [3] используются уравнения теории пологих оболочек и в разложении дельта-функции в ряд у коэффициентов с индексом  $m = 0$  отсутствует множитель  $1/2$ ).

Заметим, что для упруго закрепленных масс в частотном уравнении величину  $M_i$  надлежит заменить на  $k_i M_i / (k_i - M_i \omega^2)$ , где  $k_i$  — жесткость подвески  $i$ -й массы к оболочке.

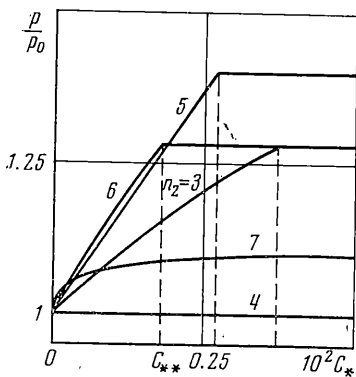
Аналогично может быть рассмотрена задача для цилиндрической панели с точечным креплением поверхности. Приведем окончательный результат для шарнирно опертой панели, связанной с системой регулярно расположенных упругих точечных опор (в узлах прямоугольной сетки). Характеристическое уравнение в этом случае будет (при деформировании с захватом опорных точек)

$$(M\omega^2 - c) \frac{R^2 n_2 (n_1 + 1)}{ab} \sum_m \sum_k \frac{(\alpha_k^2 + \beta_m^2)^2}{\omega_{km}} = 1$$

Здесь  $Ra$  и  $Rb$  — размеры прямолинейной и криволинейной сторон панели  $\alpha_k = k\pi/a$ ,  $\beta_m = m\pi/b$ ,  $x_i = ia/(n_1 + 1)$ ,  $y_j = jb/(n_2 + 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n_1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n_2$ ) — координаты точек крепления, суммирование производится по  $k$  и  $m$ , принимающим значения  $k = \alpha$

$$2s(n_1 + 1) \pm \alpha; \quad m = \beta, \quad 2s(n_2 + 1) \pm \beta \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (1 \leq \alpha \leq n_1, 1 \leq \beta \leq n_2)$$

$$\omega_{km} = (\alpha_k^2 + \beta_m^2)^4 + \varepsilon^2 \alpha_k^4 - 2\beta_m^6 + \beta_m^4 - \frac{\sigma_x h R^2}{D} (\alpha_k^2 + \beta_m^2)^2 (\beta_m^2 - 1) -$$



$$-\frac{\sigma_y h R^2}{D} (\alpha_k^2 + \beta_m^2)^2 \alpha_k^2 - \omega^2 \rho h \frac{R^4}{D} (\alpha_k^2 + \beta_m^2)^2$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — начальные мембранные напряжения.

Приведем результаты расчета устойчивости оболочки с параметрами  $l=2\pi$ ,  $\varepsilon=400$  для различных случаев закрепления поверхности. На фигуре представлены зависимости безразмерного критического давления  $p/p_0$  ( $p_0$  — критическое давление для неподкрепленной оболочки) от параметра  $C_* = c/Eh$  жесткости опорных точек для случая закрепления оболочки в среднем сечении в трех, четырех, пяти, шести и семи точках, равноудаленных одна от другой. При закреплении в трех — шести точках, начиная с некоторого значения жесткости  $C_{**}$  опорных точек, дальнейшее ее увеличение не изменяет величины критического давления. При закреплении в семи точках имеет место асимптотическое приближение к предельной величине критического давления. Наибольший эффект из рассмотренных случаев дает закрепление в пяти точках.

Были получены результаты расчета для случая закрепления оболочки по каждому из двух сечений ( $x_1=1/3l$ ,  $x_2=2/3l$ ) также в трех — семи точках. Качественная картина получается аналогичная. Но здесь для достижения одинакового результата по критическому давлению требуется примерно в 1.5 раза большая суммарная жесткость опор, чем в предыдущем случае.

Поступила 28 III 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ting L., Juan S. W. On radial deflection of a cylinder of finite length with various end conditions. J. Aeronaut Sci., 1958, vol. 25, No. 4.
2. Упругие оболочки. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Даревский В. М., Шаринов И. А. Свободные колебания цилиндрической оболочки с сосредоточенной массой. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.

УДК 539.3:534.1

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ПО ДЛИНЕ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В. В. КАБАНОВ, Г. И. КУРЦЕВИЧ

(Новосибирск)

Изложена методика расчета на устойчивость круговой цилиндрической оболочки при действии в ее срединной поверхности неоднородных по длине осевых и окружных усилий. Исходное состояние оболочки моментное. В рамках конечно-разностного метода разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать устойчивость оболочки при различных нагрузках и граничных условиях. В отличие от известных алгоритмов исходное состояние оболочки исследуется численно. В качестве примера приводятся результаты исследования устойчивости оболочки при нагружении ее изменяющимися по длине осевыми усилиями. Анализируется влияние моментности исходного состояния и неравномерности усилий.

1. Исходное состояние оболочки. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, в срединной поверхности которой действуют неоднородные по длине усилия  $T_1 = -Nf(x)$ . Функция  $f(x)$  характеризует изменение усилий по длине,  $N$  — амплитуда усилия. Усилия такого рода могут возникнуть в резервуарах при действии собственного веса, в корпусах ракет от сил инерции при старте и т. д.

Исходное напряженно-деформированное состояние оболочки определяется решением уравнения нелинейного краевого эффекта

$$Dw_{xxxx} + N(fw_{xx} + f_x w_x) + Ehk_2^2 w = -k_2 v f N \quad (1.1)$$