

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ
СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВОЗДУХЕ

Б. Я. ЛОКШИН

(Москва)

Известно, что при поперечном обтекании вращающегося цилиндра потоком воздуха возникает сила, перпендикулярная оси симметрии цилиндра. Этот эффект, впервые описанный в работе Магнуса [1], проявляется при движении различных вращающихся тел в воздухе, таких, как например, закрученного после удара футбольного мяча или шарика для настольного тенниса. Исследование траекторий движения подобных тел представляет определенный интерес. Одна из первых задач такого рода рассмотрена в [2], где в упрощенной постановке исследуется движение в воздухе легкого оперенного шара. В работах [3-5] рассмотрены некоторые стационарные движения быстровращающегося симметричного твердого тела (типа эллипсоида вращения) в воздухе. Показано, что возможны два стационарных режима: планирование и винтовое движение. В этой работе при общих предположениях о характере аэродинамического воздействия исследуются вопросы существования и устойчивости стационарных режимов движения. В частности, показано, что в случае совпадения центра тяжести тела с его геометрическим центром устойчивым является только одно стационарное движение, то или другое в зависимости от параметров. Для каждого из стационарных движений установлены области устойчивости в пространстве параметров.

1. Рассматривается движение твердого осесимметричного тела, имеющего плоскость симметрии, перпендикулярную оси симметрии.

Будем предполагать, что эллипсоид инерции рассматриваемого тела является эллипсоидом вращения вокруг оси симметрии, а центр тяжести тела находится на оси симметрии, не обязательно совпадая с его геометрическим центром.

Такое тело при своем движении в воздухе испытывает определенное аэродинамическое воздействие. Решение гидродинамической задачи обтекания не обсуждается, но предполагается, что в процессе движения тела справедлива гипотеза квазистационарности обтекания, так что в каждый момент времени аэродинамическое воздействие на тело определяется мгновенными значениями параметров, характеризующих движение тела.

Считается, что в процессе движения угол между вектором мгновенной угловой скорости тела и его осью симметрии невелик. Это предположение необходимо для справедливости гипотезы квазистационарности и для существования аналитических выражений сил и моментов аэродинамического воздействия.

Предположим, что скорость вращения тела вокруг оси симметрии достаточно велика. Так что, в частности, для анализа движений тела можно применять методы усреднения, развитые в [6] для систем с быстровращающейся фазой.

Учитывая сделанные предположения, дифференциальные уравнения, описывающие движение рассматриваемого тела, представим в следующем виде [5, 6]:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_0 \rho S}{2m} v^2 + g (\cos \vartheta \cos \delta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \delta)$$
$$v \frac{d\delta}{dt} = vq + \frac{c_0 \rho S}{2m} v^2 + g (\sin \vartheta \cos \delta - \cos \vartheta \sin \delta \cos \gamma)$$

$$v \cos \delta \frac{d\gamma}{dt} = [p \operatorname{tg} \delta - (p \cos \gamma - q \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta] v \cos \delta + \frac{c_y R \rho S}{2m} v r - g \cos \vartheta \sin \gamma$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{m_z R \rho S}{2C} v^2 - \frac{m_z r R^2 \rho S}{2C} v r$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = p \sin \gamma + q \cos \gamma, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p \cos \gamma - q \sin \gamma}{\cos \vartheta} \quad (1.1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = v [\cos \vartheta \cos \delta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \delta]$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v [(\sin \vartheta \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \cos \vartheta) \sin \psi + \sin \gamma \cos \delta \cos \psi]$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v [(\sin \vartheta \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \cos \vartheta) \cos \psi - \sin \gamma \cos \delta \sin \psi]$$

где v — скорость центра тяжести тела; ψ — угол поворота оси симметрии вокруг вертикали (угол рыскания); ϑ — угол наклона оси симметрии к горизонтальной плоскости (угол тангажа); γ — угол между вертикальной плоскостью содержащей ось симметрии тела, и плоскостью, содержащей вектор \mathbf{V} скорости центра тяжести и ось симметрии; δ — угол между вектором \mathbf{V} и экваториальной плоскостью (угол, дополнительный к углу атаки); ξ, η, ζ — вертикальная и две горизонтальные координаты центра тяжести тела; r — угловая скорость вращения тела вокруг оси симметрии; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность воздуха; R и S — радиус и площадь экваториального сечения тела соответственно; C — полярный момент инерции; m — масса тела; c_v, c_y, c_δ — аэродинамические коэффициенты, характеризующие силу лобового сопротивления, подъемную силу Магнуса и боковую аэродинамическую силу соответственно; m_x, m_y, m_z — аэродинамические коэффициенты, характеризующие кренящий, опрокидывающий и крутящий моменты соответственно; m_z^r — аэродинамический коэффициент, характеризующий демпфирующий момент вокруг оси симметрии; ε — расстояние между центром тяжести тела и его геометрическим центром; $p = (m_y R + \varepsilon c_x) \rho S v^2 / 2Cr$, $q = -(m_x R + \varepsilon c_y R r / v) \rho S v^2 / 2Cr$ — поперечные угловые скорости тела; $c_x = c_v \cos \delta + c_\delta \sin \delta$, $c_z = c_v \sin \delta - c_\delta \cos \delta$.

В общем случае аэродинамические коэффициенты зависят от угла δ , числа Маха и других безразмерных параметров. Учитывая симметричность тела, предположим, что и аэродинамическое обтекание также обладает определенной симметрией. Поэтому аэродинамические коэффициенты имеют следующие свойства.

Коэффициенты c_v, c_y, m_z зависят четным образом от δ , так что при $\delta=0$ имеем

$$\frac{\partial c_v}{\partial \delta} = c_v' = c_y' = m_z' = 0 \quad (1.2)$$

Коэффициенты c_δ, m_x, m_y зависят от δ нечетным образом, так что при $\delta=0$ имеем

$$c_\delta = m_x = m_y = 0 \quad (1.3)$$

При $\delta = \pi / 2$ справедливы равенства

$$c_y = c_\delta = m_x = m_y = 0 \quad (1.4)$$

При $0 \leq \delta \leq \pi / 2$ все аэродинамические коэффициенты, включая m_z^r , неотрицательны.

2. Будем искать стационарные решения уравнений (1.1) вида

$$v = v^\circ = \text{const}, \quad r = r^\circ = \text{const}, \quad \delta = \delta^\circ = \text{const}, \quad \vartheta = \vartheta^\circ = \text{const}, \quad \gamma = \gamma^\circ = \text{const} \quad (2.1)$$

Остальные переменные определяются прямым интегрированием и поэтому в дальнейшем исследовании не используются. Отметим только, что в общем случае решению типа (2.1) будет соответствовать винтовое дви-

жение тела [5], когда ось симметрии тела вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали, а центр тяжести перемещается с постоянной скоростью по винтовой линии, ось которой вертикальна.

Подставляя (2.1) в первые пять уравнений системы (1.1), получим систему алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных v° , r° , γ° , δ° , ϑ° , которую после несложных преобразований можно представить в виде (в дальнейшем верхние индексы у переменных величин опускаются)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \cos \gamma &= n \left(c_x - \frac{m_x + e c_y f}{k f} \sin \delta \right), \quad \sin \vartheta = n \left(c_z + \frac{m_x + e c_y f}{k f} \cos \delta \right) \\ \cos \vartheta \sin \gamma &= n \left\{ c_y f + \frac{m_y + e c_x}{k f} \sin \delta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m_y + e c_x) \cos \gamma + (m_x + e c_y f) \sin \gamma}{k f} \operatorname{tg} \vartheta \cos \delta \right\} \\ (m_y + e c_x) \sin \gamma - (m_x + e c_y f) \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$r = f v / R, \quad k = C / m R^2, \quad e = \varepsilon / R, \quad f = m_z / m_z^r, \quad n = \rho S v^2 / 2 m g$$

Существенным параметром в этой системе уравнений является относенный сдвиг центра тяжести, т. е. параметр e . Из физического смысла задачи ясно, что $|e| \leq 1$.

Заметим, что если при некотором значении $e_1 \in [-1, 1]$ существует решение системы (2.2) $v_1, r_1, \vartheta_1, \gamma_1, \delta_1$, то при значении $e_2 = -e_1$ существует решение $v_1, r_1, -\vartheta_1, -\gamma_1, -\delta_1$. Этим решениям соответствуют два симметричных противоположно ориентированных винтовых движения. Учитывая симметрию такого рода, достаточно рассмотреть решения системы (2.2) при значениях e из интервала $[0, 1]$.

Учитывая сравнительно небольшой диапазон установившихся значений скоростей снижения тел в воздухе, предположим, что все аэродинамические коэффициенты, входящие в уравнения (2.2), зависят только от угла δ .

Итак, при $e=0$ существуют два различных тривиальных решения [3]:

$$\begin{aligned} e=0, \quad \delta=0, \quad \gamma &= \operatorname{arctg} \frac{c_y f}{c_x}, \quad v = \left(\frac{2 m g \cos \gamma}{c_x \rho S} \right)^{1/2}, \quad r = \frac{m_z v}{m_z^r R}, \quad \vartheta=0 \\ e=0, \quad |\delta| &= \pi/2, \quad \gamma=0, \quad v = \left(\frac{2 m g}{c_z \rho S} \right)^{1/2}, \quad r = \frac{m_z v}{m_z^r R}, \quad |\vartheta| = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первому из решений (2.3) соответствует движение типа планирования, когда ось симметрии тела горизонтальна и не меняет своей ориентации, а центр тяжести перемещается по прямой, наклоненной под углом γ к вертикали. Второй группе решений соответствует вертикальное снижение тела с вертикально ориентированной осью симметрии.

Перейдем далее к общему случаю, когда $e \neq 0$. Учитывая ранее принятые предположения о неотрицательности аэродинамических коэффициентов и неравенство $e \neq 0$, будем иметь $m_y + e c_x \neq 0$. Тогда, следуя работе [5], получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = (m_x + e c_y f) / (m_y + e c_x) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} e^3 \{ c_y f [c_x^2 + (c_y f \sin \delta)^2] \} - e^2 \{ 2 m_y c_x c_y f + c_x^2 (m_x - c_\delta k f) + \\ + c_y^2 f^2 (3 m_x \sin \delta - c_x k f) \sin \delta \} + e \{ m_y [2 c_x (m_x - c_\delta k f) + c_y f (m_y + c_y f^2 k \sin \delta)] + \\ + 3 m_x c_y f \sin \delta (m_x \sin \delta - c_x k f) \} + \{ m_y [c_y k f^2 (c_x k f - m_x \sin \delta) - m_y (m_x - c_\delta k f)] - \\ - m_x [c_x k f - m_x \sin \delta]^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) для каждого фиксированного значения $e \in [0, 1]$ определяет все возможные стационарные значения угла δ . Затем последовательно находим угол γ из выражения (2.4), угол ϑ по формуле

$$\operatorname{tg} \vartheta = \cos \gamma \frac{c_x k f + (m_x + e c_y f) \cos \delta}{c_x k f - (m_x + e c_y f) \sin \delta} \quad (2.6)$$

скорость v и угловую скорость r по формулам

$$v^2 = \frac{2mgkf \cos \vartheta \cos \gamma}{\rho S [c_x k f - (m_x + e c_y f) \sin \delta]}, \quad r = f \frac{v}{R} \quad (2.7)$$

В частности, решения вида (2.3) вытекают непосредственно из (2.4) — (2.7) (с учетом равенства (1.3)). Из равенств (1.4) следует, что стационарное вертикальное движение тела с вертикально ориентированной осью возможно при любых значениях e . Последнее ясно и из физических соображений. Возвращаясь к вопросу о существовании стационарных решений, отличных от (2.3), следует сказать, что ответ на этот вопрос неоднозначен и определяется видом уравнения (2.5).

Итак, для определения всех установившихся движений типа (2.1) прежде всего необходимо решить уравнение (2.5). Последнее можно трактовать как уравнение, задающее неявным образом функцию $\delta(e)$. Эта функция, вообще говоря, может быть неоднозначной и иметь несколько ветвей. В работе [5] представлены примеры такой зависимости для устойчивого и неустойчивого планирования.

При достаточно малых смещениях центра тяжести ($e \ll 1$) одним из приближенных решений уравнения (2.5) является

$$\delta = - \frac{c_y c_x}{k^2 f [m_y' f c_y - m_x' c_x]} \Big|_{\delta=0} e^3 \quad (2.8)$$

Это решение при $e \rightarrow 0$ переходит в решение $\delta = 0$.

3. Для дальнейшего исследования, следуя [7] и учитывая (1.1) — (1.4), аэродинамические коэффициенты представим в виде

$$\begin{aligned} c_x &= c_1 \cos \delta, & c_y &= c_2 \cos \delta, & c_z &= c_3 \sin \delta, & m_x &= m_1 \sin \delta \cos \delta \\ m_y &= m_2 \sin \delta \cos \delta, & m_z &= m_3, & m_z^r &= m_3^r \end{aligned} \quad (3.1)$$

где c_k и m_k ($k=1, 2, 3$) — некоторые постоянные.

Выражения (3.1) представляют собой первые ненулевые члены разложений соответствующих коэффициентов в ряды Фурье. Уравнение (2.5) после подстановки соотношений (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} e^3 [c_2 f (c_1^2 + c_2^2 f^2 \sin^2 \delta)] \cos^3 \delta - e^2 [2m_2 c_1 c_2 f + c_1^2 (m_1 - (c_1 - c_3) k f) + \\ + c_2^2 f^2 (3m_1 \sin^2 \delta - c_1 k f)] \cos^3 \delta \sin \delta + e \{m_2 [c_2 f (m_2 + c_2 k f)^2 + \\ + 2c_1 (m_1 - (c_1 - c_3) k f)] + 3m_1 c_2 f (m_1 \sin^2 \delta - c_1 k f)\} \cos^3 \delta \sin^2 \delta + \\ + \{m_2 [c_2 k f^2 (c_1 k f - m_1 \sin^2 \delta) - m_2 \sin^2 \delta (m_1 - (c_1 - c_3) k f)] - \\ - m_1 [c_1 k f - m_1 \sin^2 \delta]^2\} \cos^3 \delta \sin \delta = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Коэффициенты при e^i ($i=0, 1, 2, 3$) содержат множитель $\cos^3 \delta$, который можно считать отличным от нуля¹. Для малых значений e можно выписать одно приближенное решение уравнения (3.2)

$$\delta = -c_2 c_1 [k^2 f (m_2 f c_2 - m_1 c_1)]^{-1} e^3 \quad (3.3)$$

которое является частным случаем решения (2.8).

¹ В противном случае получим ранее рассмотренный режим вертикального падения (второе решение в (2.3)).

Рассмотрим более подробно ненулевые решения при $e=0$. В этом случае уравнение (3.2) приводится к биквадратному уравнению относительно $\sin \delta$. Для малых δ получим приближенное решение этого уравнения

$$\delta^2 = \frac{c_1 k^2 f^2 (m_2 c_2 f - m_1 c_1)}{m_1 k f (m_2 c_2 f - 2m_1 c_1) + m_2^2 (m_1 - (c_1 - c_3) \frac{L}{v} f)} \quad (3.4)$$

Таким образом, равенство (3.4) при $e=0$ (если его правая часть положительна) определяет два симметричных относительно нуля решения.

В [3] доказана асимптотическая устойчивость по первому приближению первого решения и неустойчивость второго решения в (2.3). В [4] условия устойчивости свелись к неравенствам

$$m_1 - (c_1 - c_3) k f > 0, \quad m_1 c_1 - m_2 c_2 f > 0 \quad (3.5)$$

Из изложенного следует, что при малых значениях e знак угла δ совпадает со знаком отклонения e в случае устойчивого планирования и противоположен знаку e в случае неустойчивого планирования (см. (3.3)–(3.5)).

В работе [5] показано, что в случае неустойчивого планирования при $e=0$ всегда существует хотя бы одна пара симметричных винтовых движений, угол δ в которых приближенно выражается равенством (3.4).

Исследование устойчивости в малом подобного стационарного решения принципиальных трудностей не вызывает: необходимо выписать характеристическое уравнение соответствующей системы в вариациях относительно исследуемого решения и исследовать его с помощью, например, критерия Гурвица. Тем не менее, в рассматриваемом случае система уравнений в вариациях будет пятого порядка, и коэффициенты характеристического уравнения оказываются слишком громоздкими. Поэтому в целях наглядности и простоты выкладки исследование устойчивости нетривиального решения уравнения (3.2) при $e=0$ в случае неустойчивого планирования будет носить только качественный характер.

4. Будем считать, что исследуемое стационарное решение таково, что углы δ и ϑ малы, так что можно использовать вместо тригонометрических функций этих углов их разложения в ряды Маклорена с точностью до члена первого порядка малости. Для удобства введем новое время $\tau = \rho S v t / (2 m k f)$. Тогда уравнения в вариациях системы (1.1) при $e=0$ относительно ненулевого стационарного решения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u}{d\tau} &= -2c_1 k f \Delta u - (m_1 - (c_1 - c_3) k f) \delta \Delta \delta - b \sin \gamma \Delta \gamma + b (\delta - \vartheta \cos \gamma) \Delta \vartheta \\ \frac{d\Delta \gamma}{d\tau} &= b \sin \gamma \Delta u + c_2 k f^2 \Delta \omega - b \cos \gamma \Delta \gamma + \left[(b \sin \gamma) \vartheta - \frac{m_2 \delta}{\cos \gamma} \right] \Delta \vartheta + \\ &\quad + \left[m_2 \left(2\delta - \frac{\vartheta}{\cos \gamma} \right) - \delta b \sin \gamma \right] \Delta \delta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\Delta \delta}{d\tau} = -(m_1 + c_3 k f) \Delta \delta + b \Delta \gamma \delta \sin \gamma + b \Delta \vartheta + m_1 \delta \Delta \omega + [2(c_1 - c_3) k f - 3m_1] \delta \Delta u$$

$$\frac{d\Delta \omega}{d\tau} = m_3 (\Delta u - \Delta \omega), \quad \frac{d\Delta \vartheta}{d\tau} = \frac{m_2 \delta}{\cos \gamma} \Delta \gamma$$

$$b = \frac{k f}{n}, \quad u = \frac{v}{v^0}, \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v^0}, \quad r = \frac{m_z v^0}{m_z r R} \omega, \quad \Delta \omega = \Delta r \left(\frac{m_z v^0}{m_z r R} \right)^{-1}$$

Исследуемое стационарное решение в новых безразмерных переменных записывается так: $u^0=1$, $\omega^0=1$, $\gamma=\gamma^0$, $\delta=\delta^0$, $\vartheta=\vartheta^0$.

При принятых предположениях угол ϑ с помощью (2.6) линейным образом выражается через δ . Поэтому характеристический определитель

системы (4.1) $\Delta(\lambda)$ удобно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)\delta + a_2(\lambda)\delta^2 + \dots + a_5(\lambda)\delta^5$$

где δ — решение уравнения (3.2) при $e=0$.

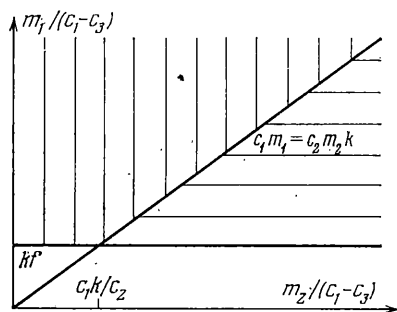
Коэффициенты $a_i(\lambda)$ представляют собой полиномы по λ степени не выше пятой. Можно ожидать, что при малых δ достаточно ограничиться нулевым или первым приближением (по δ) корней характеристического уравнения. Однако для определения действительных частей корней характеристического уравнения необходимо, по крайней мере, учитывать член $a_2(\lambda)\delta^2$.

Действительно, нулевое приближение характеристического уравнения имеет вид

$$\Delta^{(0)}(\lambda) = a_0(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 2c_1kf & b \sin \gamma & 0 & 0 & 0 \\ -b \sin \gamma & \lambda + bc \cos \gamma & -c_2kf & 0 & 0 \\ -m_3 & 0 & \lambda + m_3 & 0 & 0 \\ -2(c_1 - c_3)kf + 3m_1 & 0 & 0 & \lambda + m_1 + c_3kf & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Здесь четыре корня имеют отрицательную действительную часть [3], а один корень нулевой. Поэтому судить об устойчивости на основании корней нулевого приближения нельзя. Проведя необходимые вычисления, получим $a_1(\lambda) = 0$, так что учет следующего слагаемого $a_1(\lambda)\delta$ в характеристическом уравнении ничего нового не дает. Следовательно, необходимо учитывать, по крайней мере, слагаемое $a_2(\lambda)\delta^2$.

Выражение для $a_2(\lambda)$ весьма громоздко, но выписывать его целиком нет необходимости, так как в первую очередь представляет интерес влияние этого слагаемого на нулевой корень. Поэтому достаточно рассмотреть знак величины $a_2(0)$. Если $a_2(0) > 0$, то при достаточно малых δ все корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные действительные части (нулевой корень перейдет в отрицательный, а остальные, имевшие отрицательные действительные части, по непрерывности сохраняют это свойство). Проведя необходимые выкладки, получим



$$a_2(0) = \frac{2m_2m_3}{\cos \gamma} \left\{ (m_1 + c_3kf)^2 \cos \gamma \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) + 2bm_2 \frac{m_1 - (c_1 - c_3)kf}{c_1kf} \right\}$$

В частности, $a_2(0)$ будет положительно, если $m_1 < m_2$, $m_1 - (c_1 - c_3)kf > 0$.

Первое условие на практике всегда выполняется: для вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов момент крена (m_1) относительно экваториальной оси всегда меньше опрокидывающего момента (m_2). Второе условие совпадает с условием (3.5) устойчивости планирования.

На фигуре изображена плоскость параметров $m_1/(c_1 - c_3)$, $m_2/(c_1 - c_3)$. Область устойчивости планирования отмечена вертикальной штриховкой; в горизонтально заштрихованной области существует и устойчиво винтовое движение тела.

Таким образом, при $e=0$ либо существует устойчивое планирование, либо планирование неустойчиво, но существует устойчивое винтовое движение.

Для малых значений e картина качественно не изменяется. Если планирование при $e=0$ было устойчивым, то при $e \neq 0$ устанавливается устойчивое винтовое движение, определяемое равенством (3.3), которое при $e \rightarrow 0$ непрерывно переходит в планирование. Если же планирование было неустойчиво, то решение (3.3), непрерывно переходящее в планирование,

также неустойчиво, но существуют два других стационарных движения, устойчивых и непрерывно переходящих при $\epsilon \rightarrow 0$ в пару рассмотренных симметричных движений.

Поступила 22 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus G.* Uber die Abweichung der Geschosie. Abhandl. Acad. Wiss., Berlin, 1852.
2. *Аппель П.* Теоретическая механика. М., Физматгиз, 1960.
3. *Локшин Б. Я.* Об одном движении быстровращающегося тела в воздухе. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1970, № 6.
4. *Локшин Б. Я.* Об устойчивости плоского движения быстровращающегося симметричного тела в атмосфере. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1971, № 4.
5. *Локшин Б. Я.* О винтовом движении быстровращающегося твердого симметричного тела в воздухе. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1973, № 4.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
7. *Пугачев В. С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе. Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского. М., вып. 70, 1940.