

О ПРИМЕНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ДИНАМИКЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

М. И. ЕРХОВ, В. И. СЕБЕКИНА

(Москва)

Содержится вывод и формулировка постановки и методов решения задач динамики жесткопластического тела с применением линейного и квадратичного программирования. Дано решение задачи о динамике жесткопластической квадратной пластинки, нагруженной давлением по закону «прямоугольного импульса», с помощью линейного программирования.

Точное решение уравнений динамики жесткопластического тела связано с большими трудностями, преодолемыми лишь в простейших случаях (см., например, [1, 2]). Для приближенного решения задач такого рода целесообразно пользоваться методами решения, основанными на минимальных и максимальных принципах динамики жесткопластического тела [3, 4]; применение линейного программирования и квадратичного программирования к решению задач динамики жесткопластических конструкций предложено в [5]. В литературе отсутствует какое-либо приемлемое решение неосесимметричных задач динамики жесткопластических неоднородных конструкций, не имеется примеров применения к таким задачам методов линейного программирования (или квадратичного программирования).

В данной работе впервые получено точное (в пределах принятых допущений) решение задачи о динамике жесткопластической квадратной пластинки методом линейного программирования. Очевидно, что автоматически и без изменений описанный и примененный в статье метод пригоден для широкого класса задач динамики пластического тела; практически же описанный метод применим к произвольным задачам динамики.

1. Решение задач динамики должно удовлетворять следующим условиям:

1) уравнениям движения и граничным условиям на поверхности тела S : $\sigma_{ij, j} + X_i - \gamma u_i = 0$, $\sigma_{ij} n_j = p_i$; 2) условию пластичности: $f(\sigma_{ij}) \leq 0$; 3) компоненты скорости u_i должны удовлетворять условию несжимаемости и кинематическим граничным условиям: $\epsilon_{ij} = 0.5(u_{i, j} + u_{j, i})$; 4) перемещения u_i , скорости \dot{u}_i и ускорения \ddot{u}_i должны

удовлетворять начальным условиям; 5) компоненты ускорения $u_i^{**} = \partial u_i / \partial t$.

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, γ — плотность, X_i — объемные силы, p_i — компоненты вектора поверхностной нагрузки, n_j — направляющий косинус внешней нормали к S , t — время, $i, j = 1, 2, 3$. Соблюдается ассоциированный закон течения, функция текучести $f(\sigma_{ij})$ является пластическим потенциалом.

Для дальнейшего необходимо отметить особенности экстремальных принципов динамики [3, 4], имеющие существенное значение при решении конкретных задач, и привести форму принципа, которая будет затем использована в решении задачи.

Далее используются следующие обозначения:

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV - \int_V X_i u_i^* dV = F(\sigma_{ij}, u_i^*)$$

$$\int_V \gamma u_i^{**} u_i^* dV = J(u_i^{**}, u_i^*), \quad \int_S p_i u_i^* dS = I(p_i, u_i^*)$$

где V — объем тела, объемные силы считаются заданными.

Произвольное поле скоростей, удовлетворяющее условиям 3) и 4), называется [3, 4] допустимым и обозначается звездочками (например, u_i^{**} , ϵ_{ij}^{**}). Произвольное поле σ_{ij} , удовлетворяющее условиям 1) и 2), называется [3, 4] допустимым и обозначается σ_{ij}° . Определение p_i и u_i^{**} приведено ниже.

Если некоторому допустимому полю u_i^{**} соответствует по условию 5) ускорения u_i^{***} , то можно подобрать поле σ_{ij}° так, что будут удовлетворяться условия 1) для поля u_i^{***} . Согласно принципу возможных скоростей будет иметь место:

$$F(\sigma_{ij}^{\circ}, u_i^{***}) + J(u_i^{***}, u_i^{**}) - I(p_i, u_i^{**}) = 0 \quad (1.1)$$

где p_i — значение действующей нагрузки. Следует отметить, что вообще величины σ_{ij} , X_i , p_i , u_i^{**} в (1.1) могут не быть связанными с величинами u_i^* и ϵ_{ij}^* , т. е. в (1.1) может нарушаться условие 5) и закон течения (связь между σ_{ij} и ϵ_{ij}^*); для функций

σ_{ij}^0 , X_i , p_i , u_i^{**} и u_i^{*} , ϵ_{ij}^{*} в (1.1) нарушается закон течения. Таким образом, в общем случае в (1.1) величины p_i , σ_{ij} , X_i , u_i^{**} необходимо должны удовлетворять лишь условиям 1) и 2), а поле u_i^{*} и ϵ_{ij}^{*} должно удовлетворять лишь условиям 3) и 4).

В существовании системы функций σ_{ij}^0 , u_i^{**} , p_i , удовлетворяющей соотношению (1.1), можно убедиться, если рассматривать их, например, как функции точного решения динамической задачи при использовании некоторой поверхности текучести, «вписанной» по отношению к точной. Допустим, что для такой вписанной поверхности текучести найдено точное решение в виде функций σ_{ij}^- , u_i^- , u_i^{*-} , p_i ; естественно, что для этих функций удовлетворяются все условия 1) – 5). Тогда поле σ_{ij}^- будет допустимым для точной поверхности текучести и его можно обозначить σ_{ij}^0 . Поскольку поле u_i^- удовлетворяет условиям 3) и 4), а поле u_i^{*-} – условиям 4) и 5), их можно обозначить u_i^{*} и u_i^{**} . В результате существования функций σ_{ij}^0 , u_i^{**} , p_i в (1.1) доказано (очевидно, что решение динамических задач при этом предполагается вообще существующим).

Согласно (1.1) и принципу максимума Р. Мизеса справедливо соотношение (σ_{ij}^{*} соответствует по ассоциированному закону течения скорости ϵ_{ij}^{*})

$$F(\sigma_{ij}^{*}, u_i^{*}) + J(u_i^{**}, u_i^{*}) - I(p_i, u_i^{*}) \geq 0 \quad (1.2)$$

В (1.2) заключен следующий минимальный принцип: для истинного решения функционал (1.2) минимален и равен нулю.

Решение динамической задачи является следствием минимизации функционала (1.2). Функционал (1.2) имеет нелинейную форму, условия 1) – 3) – линейные.

Для использования методов математического программирования принципу (1.2) можно придать другую форму. Проинтегрируем для этого выражение (1.2) по времени в интервале от 0 до t , получим

$$\int_0^t F(\sigma_{ij}^{*}, u_i^{*}) dt + \frac{1}{2} J(u_i^{**}, u_i^{*}) - \int_0^t I(p_i, u_i^{*}) dt \geq 0 \quad (1.3)$$

где $u_i^{*} = u_i^{**} = 0$ при $t=0$.

Если считать $t \geq t_k$, где t_k – время окончания движения, из (1.3) получим следующее выражение:

$$\int_0^{t_k} F(\sigma_{ij}^{*}, u_i^{*}) dt - \int_0^{t_k} I(p_i, u_i^{*}) dt \geq 0 \quad (1.4)$$

Минимальный принцип в применении к выражениям (1.3) и (1.4) сводится к утверждению о том, что для истинного решения функционалы (1.3) и (1.4) минимальны и равны нулю. Выражение (1.4) является линейным, а выражение (1.3) – квадратичным.

Наряду с минимальным принципом выводится максимальный принцип, а также имеют место и другие формы минимального и максимального принципов динамики жесткопластического тела [3, 4]. Известные экстремальные принципы статики получаются из этих принципов при ускорениях, равных нулю.

В статической теории предельного равновесия большое значение приобрели методы расчета с применением линейного программирования, обеспечивающие необходимую точность и автоматизацию расчетов. Методы линейного программирования хорошо разработаны и запрограммированы. Практическое значение приобретают также методы выпуклого программирования. Можно ожидать, что в динамике жесткопластического тела методы математического программирования будут играть большую роль, чем в статике, поскольку решение задач динамики сталкивается с гораздо большими трудностями в сравнении со статикой. Принципы (1.3) и (1.4) позволяют свести математическую задачу динамики жесткопластического тела соответственно к задачам линейного программирования и квадратичного программирования.

Для оболочек и пластинок, например, вместо напряжений σ_{ij} и скоростей ϵ_{ij}^{*} следует иметь в виду внутренние силы и изгибающие моменты E_r и скорости изменения кривизны и деформации срединной поверхности e_r^{*} ; функция диссипации $D = \sigma_{ij}^{*} \epsilon_{ij}^{*}$ будет равна

$$D = E_r^{*} e_r^{*} \quad (1.5)$$

где r – номер обобщенного напряжения и скорости деформации.

Поверхность текучести в общем случае является некоторой невогнутой замкнутой гиперповерхностью в пространстве E_r . Нелинейную поверхность текучести сле-

дует аппроксимировать кусочно-линейной поверхностью. Поскольку имеет место ассоциированный закон течения, равенство (1.5) заменяется системой неравенств в соответствии со свойствами функции диссипации

$$D \geq E_r^{(g)} e_r^{**} \quad (1.6)$$

где $g=1, 2, \dots$ — номер угловых точек кусочно-линейной гиперповерхности текучести, $E_r^{(g)}$ — обобщенные напряжения в g -й угловой точке.

Для сведения задачи динамики жесткопластических оболочек или пластинок к задаче линейного программирования, которая решается симплекс-методом, с помощью конечных разностей следует дискретизировать задачу по пространству и времени (интегрирование по V в (1.6) для оболочек и пластинок заменяется интегрированием по площади срединной поверхности S).

В результате непрерывные поля напряжений и перемещений и диссипативная функция представляются конечным числом параметров напряжений, перемещений и диссипативной функции. Очевидно, что число такого рода параметров дискретной системы следует согласовать с требуемой точностью возможной конечно-разностной аппроксимации. Этим обстоятельством определяется шаг сетки конечных разностей по координатам пространства и времени, что исключает разработку общих рекомендаций на этот счет.

В итоге задача линейного программирования в рассматриваемом случае формулируется следующим образом. Найти минимум функционала

$$Z = \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=1}^h D_{\alpha\beta} \Delta S_{\alpha} \Delta t_{\beta} - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=1}^h (p_i u_i^{**})_{\alpha\beta} \Delta S_{\alpha} \Delta t_{\beta} \quad (1.7)$$

при ограничениях-равенствах 1), записанных для E_r° и u_i^{**} , и ограничениях-неравенствах 2), записанных для E_r° , и (1.6) для D . Здесь суммирование производится по верхним и нижним индексам β, α , обозначающим номера интервалов по времени и номера точек разностной сетки на поверхности оболочки.

Ограничения-равенства 1), неравенства 2) и (1.6) составляются для каждого интервала времени и точек разностной сетки.

Функционал (1.7) — линейный по u_i^{**} в узлах сетки, $D \geq 0$, E_r и u_i^{**} — свободные переменные.

К решению задачи динамики жесткопластического тела можно применить квадратичное программирование. При этом задачу следует решать шагами по времени, на каждом шаге следует минимизировать функционал (1.3), используя ограничения, сформулированные для задачи линейного программирования.

2. В литературе не известны приемлемые решения неосесимметричных задач динамики жесткопластических пластинок и более сложных конструкций. Рассмотрим применение линейного программирования к решению задачи о динамическом нагружении жесткопластической квадратной пластинки с шарнирным опиранием краев. Равномерное давление интенсивностью P кг/см² действует в интервале времени $0 \leq t \leq t_1$, при $t=t_1$ снимается, — таким образом, на пластинку воздействует «прямоугольный импульс» нормального давления. Требуется определить движение и остаточные прогибы пластинки. Независимо от времени действия импульса сохраняются обычные предпосылки линейной теории пластинок. Такая задача в литературе не решена, решение ее представляет большие трудности и вызывает самостоятельный интерес как с точки зрения практики, так и с точки зрения теории динамически нагруженных систем.

Ниже представлено точное (в пределах принятых допущений) решение этой задачи методом линейного программирования. При описанных условиях скорость тела во времени непрерывна, ускорение может иметь скачки при $t=0, t=t_1, t=t_k$. Погрешность некоторого усреднения ускорения в момент времени $t=t_k$ будет незначительна, так как в конце движения при $t=t_k$ скорость равна нулю. Скачок ускорения при $t=t_1$ описывается, поскольку известен момент времени, в интервале $0 \leq t \leq t_1$ движение равноускоренное.

Для приближенного определения значения t_k при воздействии прямоугольного импульса нагрузки воспользуемся формулой [6]

$$t_k \geq t_1 P_i / P_i^s = t_k^- \quad (2.1)$$

где P_i^s — предельная статическая нагрузка, взятая в форме заданной динамической нагрузки P_i .

Согласно формуле (2.1) определяется нижняя граница t_k ; в расчете конструкции на динамическую нагрузку предварительно следует назначать значение t_k^+ большим правой части (2.1). Если в результате решения окажется, что расчетное значение t_k больше предварительно назначенного, следует увеличить предварительное значение t_k^+ .

При воздействии произвольного импульса нагрузки, т. е. при произвольной зависимости $P_i = P_i(t)$, нижняя граница t_h определяется формулой

$$t_h \geq \int_0^{t_1} P_i dt / P_i^s \quad (2.2)$$

где t_1 — время действия нагрузки P_i .

В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad m = \frac{M}{\sigma_s h^2}, \quad n = \frac{N}{\sigma_s h^2}, \quad s = \frac{S}{\sigma_s h^2}, \quad p = \frac{PL^2}{\sigma_s h^2}$$

$$w^{**} = \frac{\gamma L^2 W^{**}}{\sigma_s h^2}, \quad w^* = \frac{\gamma L^2 W^*}{\sigma_s h^2 t_1}, \quad w = \frac{\gamma L^2 W}{\sigma_s h^2 t_1^2}, \quad d = \frac{\gamma L^4 D}{\sigma_s^2 h^4 t_1} \quad (2.3)$$

Здесь M и N — изгибающие моменты соответственно в направлении осей X и Y (фиг. 1); S — крутящий момент, W — прогиб пластинки, γ — плотность, L — половина стороны пластинки (фиг. 1); точки над W обозначают дифференцирование по времени.

Дифференциальное уравнение движения пластинки можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + p - \gamma w^{**} = 0 \quad (2.4)$$

Принимается, что материал пластинки подчиняется условию пластичности Треска — Сен-Венана

$$-1 \leq \frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + s^2} \leq 1, \quad -1 \leq 2 \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + s^2} \leq 1 \quad (2.5)$$

Поверхность текучести, соответствующая соотношениям (2.5) изображена на фиг. 2. Будем пользоваться линейризованным выражением поверхности текучести в следующей форме:

$$\begin{aligned} -1 \leq m-n+2s \leq 1, \quad -1 \leq m+s \leq 1, \quad -1 \leq n+s \leq 1 \\ -1 \leq -m+n+2s \leq 1, \quad -1 \leq m-s \leq 1, \quad -1 \leq n-s \leq 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Такая поверхность текучести использовалась в [7] при определении несущей способности квадратной пластинки и обеспечивает вполне приемлемую точность результатов. Поверхность текучести (2.6) является вписанной по отношению к поверхности (2.5) и изображена на фиг. 2.

Для определенности считаем, что на пластинку действует давление $p = 3p^s$, где p^s — предельное статическое давление, определяемое ниже. Тогда в соответствии с (2.1) принимаем $t_h^+ = 17/3 t_1$ и интервал $t_1 \leq t \leq t_h^+$, равный $14/3 t_1$, разбиваем на семь частичных интервалов, размером $2/3 t_1$ каждый (фиг. 3).

Вследствие симметрии пластинки достаточно рассмотреть один ее октант (фиг. 1). Назначаем разностную сетку с шагом $\delta x = 0.2$, т. е. разбиваем каждую сторону пластинки на десять частей. Выбор размера частичных интервалов времени, равного $2/3 t_1$, а также шага разностной сетки на поверхности пластинки, равного $\delta x = 0.2$, определяется, как это объяснялось выше, требуемой точностью расчета. Далее приведены результаты расчета круглой пластической пластинки на динамическую нагрузку такого же уровня, в котором при общем интервале $t_h = 17/3 t_1$ частичные интервалы времени также были взяты равными $2/3 t_1$, а радиус пластинки разбивался на пять частей. Сравнение полученных результатов расчета методом линейного программирования с точными результатами показывает довольно высокую точность расчета при таких шагах разностной сетки по координатам и времени.

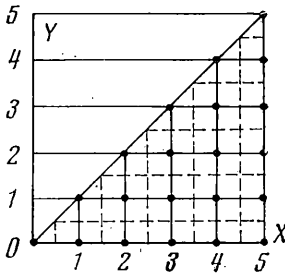
Интеграл по площади заменяется суммой

$$\int_S d \, dS = 0.04 [0.125 (d_{00} + d_{55}) + 0.5 (d_{10} + d_{20} + d_{30} + d_{40} + d_{11} + d_{43} + d_{51} + d_{22} + d_{52} + d_{33} + d_{53} + d_{44} + d_{54}) + 0.25 d_{50} + d_{21} + d_{31} + d_{41} + d_{32} + d_{42}]$$

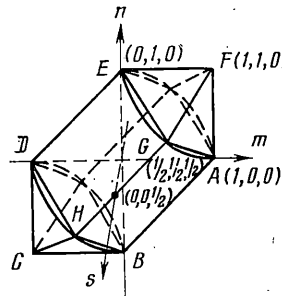
а-интеграл по времени – следующим образом:

$$\int_0^{t_k} d dt = d^1 \frac{5}{6} t_1 + \frac{2}{3} t_1 (d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6)$$

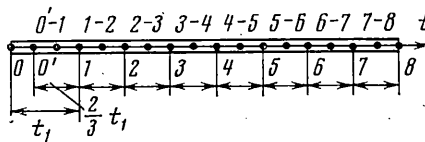
Здесь верхний индекс у d означает соответствие этих величин моментам времени t_1, t_2 и т. д.; нижний индекс у d означает соответствие точкам разностной сетки (первая цифра указывает номер по оси x , вторая – по оси y , см. фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Система неравенств (1.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} D \geq \pm \sigma_s h^2 \kappa_X^*, \quad D \geq \pm \sigma_s h^2 \kappa_Y^*, \quad D \geq \pm \sigma_s h^2 (\kappa_X^* + \kappa_Y^*) \\ D \geq \pm 1/2 \sigma_s h^2 (\kappa_X^* + \kappa_Y^* + 2\kappa_{XY}^*), \quad D \geq \pm 1/2 \sigma_s h^2 (\kappa_X^* + \kappa_Y^* - 2\kappa_{XY}^*) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где κ_X^*, κ_Y^* – скорости изменения кривизн в направлении осей X и Y , κ_{XY}^* – скорость относительного кручения поверхности пластинки относительно осей X и Y ; эти величины равны

$$\kappa_X^* = -\frac{\partial^2 W^*}{\partial X^2}, \quad \kappa_Y^* = -\frac{\partial^2 W^*}{\partial Y^2}, \quad \kappa_{XY}^* = \frac{\partial^2 W^*}{\partial X \partial Y}$$

Система (2.7) составляется для моментов времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 (скорость прогиба в момент t_6 принимается равной нулю).

Производные выражаются с помощью центральных разностей. Учитывается, что на диагонали пластинки $m=n$, на осях x и y : $s=0, m_{sj}=0, n_{is}=0$ ($i, j=0, 1, \dots, 5$).

Прогиб задается в моменты времени $t_1, t_{1-2}, t_{2-3}, t_{3-4}, t_{4-5}, t_{5-6}$ и в узлах разностной сетки. Соответственно граничному условию $w_{sj}=0, w_{is}=0$ ($i, j=0, 1, \dots, 5$). Здесь нижний индекс у w означает номер соответствующего узла разностной сетки; верхний индекс у w ниже будет означать соответствие их моментам времени, обозначенным тем же индексом. Распределение прогибов симметрично относительно осей X и Y и диагонали.

Для фазы $0 \leq t \leq t_1$ имеем $w^{0-1} = 2w^1/t_1^2, w^{1*} = 2w^1/t_1$.

Учет непрерывности скорости в момент $t=t_1$ приводит к выражениям $w^{1-2} = 5/3 w^1, w^{0'-1} = 1/3 w^1$, причем точка o' назначается для описания скачка в ускорении при $t=t_1$.

Скорости в точках t_2, t_3, t_4, t_5 выражаются формулами

$$w^{2*} = \frac{3}{2t_1} \left(w^{2-3} - \frac{5}{3} w^1 \right), \quad w^{t*} = \frac{3}{2t_1} (w^{t-(t+1)} - w^{(t-1)-t})$$

где $t=3, 4, 5$, причем принято, что $w^{5-6} = w^{6-7}$.

Уравнения движения в конечных разностях и в безразмерной форме составляются для узлов разностной сетки и промежуточных точек по времени t_{1-2} , t_{2-3} , t_{3-4} , t_{4-5} , t_{5-6} , а также для точки t_1 . Нетрудно записать и ускорения в эти моменты времени через прогибы.

В результате приведенного описания составляются условия рассматриваемой задачи, включающие в себя выражения функции цели и ограничений на переменные m , n , s , w , d .

Осталось определить лишь значение предельной статической нагрузки p^s , входящее в определение действующей нагрузки $p=3p^s$. Для этого методом линейного программирования была решена задача о несущей способности квадратной пластинки; разбив половину стороны пластинки на пять частей и используя конечные разности, максимизируя значение p при соблюдении уравнений (2.4) при $w''=0$ и неравенств (2.6), получим значение $p^s=5.716$. Данное значение нагрузки и принимаем в качестве величины несущей способности шарнирно опертой квадратной пластинки. Полученное значение $p^s=5.716$ близко к значению $p^s=5.784$, полученному в [7] также с помощью симплекс-метода при несколько иной разностной схеме.

В результате расчета на ЭВМ описанной задачи были получены следующие результаты. Значения приведенных прогибов пластинки, согласно (2.3), в узлах разностной сетки для различных моментов времени приведены в табл. 1. Поскольку имеем $w^{4-5}=w^{5-6}$, при принятой дискретизации полученное время движения следует считать равным $t_5=1^4/3t_1$. Остаточные прогибы пластинки равны прогибам в момент времени $t_{4-5}=1^0/3t_1$ (табл. 1).

Таблица 1

№№	$t/t_1=1$	$t/t_1=1/3$	$t/t_1=2$	$t/t_1=2/3$	$t/t_1=10/3$	$t/t_1=4$
00	8.913	14.855	25.111	30.396	30.710	30.710
10	8.913	14.855	23.054	27.278	27.529	27.529
20	6.915	11.525	17.665	20.830	21.018	21.018
30	4.645	7.742	11.825	13.929	14.054	14.054
40	2.323	3.872	5.901	6.947	7.009	7.009
11	8.151	13.585	21.783	26.007	26.258	26.258
21	6.915	11.525	17.665	20.830	21.018	21.018
31	4.645	7.742	11.822	13.924	14.049	14.049
41	2.323	3.872	5.890	6.930	6.991	6.991
22	6.809	11.348	16.640	19.367	19.529	19.529
32	4.645	7.742	11.472	13.394	13.508	13.508
42	2.323	3.872	5.744	6.709	6.767	6.767
33	3.778	6.297	9.107	10.555	10.641	10.641
43	2.106	3.510	4.848	5.537	5.578	5.578
44	1.053	1.755	2.424	2.769	2.790	2.790

Соответственно этому были равны нулю значения функции диссипации d в узлах разностной сетки и в моменты времени $d_{00}^4=d_{10}^4=d_{21}^4=d_{31}^4=d_{10}^2=d_{20}^2=d_{10}^3=d_{20}^3=d_{10}^4=d_{20}^4=d^5=0$.

В этих точках скорости кривизн равны нулю, и их можно считать «жесткими».

Были получены также значения моментов m , n , s в узлах сетки в моменты времени t_1 , t_{1-2} , t_{2-3} , t_{3-4} , t_{4-5} , t_{5-6} . Не приводя полной сводки значений m , n , s , можно отметить, что за исключением жестких точек напряженное состояние в разные моменты времени и в различных точках соответствовало граням FAG , EFC , ребрам AF , FG , EF , EG , GH и угловым точкам F , G (фиг. 2).

Из анализа картины движения пластинки можно сделать вывод, что в центре пластинки в первой фазе движения образуется зона равных прогибов, ограниченная шарнирной «линией» (в данном случае в силу принятой дискретизации шарнирная линия проходит через точки 10, 01.). Известно, что аналогичная зона образуется и при движении круглой пластинки при воздействии «высоких» давлений.

В моменты t_1 и t_{1-2} прогиб пластинки (начиная от точек 10, 11) от центра к краю изменяется по закону прямой линии. В дальнейшие моменты времени центральный участок перестает быть горизонтальным и движение осуществляется по другому закону.

Для суждения о точности получаемых с помощью линейного программирования решений можно воспользоваться сравнением результатов расчета динамически нагруженной круглой пластинки методом линейного программирования с точным решением этой же задачи [6]. Приведем лишь результаты сравнения.

Круглая пластинка нагружена давлением $p=3p^s$ в интервале $0 \leq t \leq t_1$, при $t \geq t_1$ значение $p=0$; p^s — предельная статическая нагрузка. Интервал $0 \leq t \leq t_1$ принят

равным $17/3t_1$, радиус пластинки разбивался на пять частей. С помощью конечных разностей методом линейного программирования (аналогично тому, как это было описано выше в задаче о динамике квадратной пластинки) получена была картина деформирования пластинки во времени, значения остаточных прогибов, а также величины изгибающих радиальных и окружных моментов и значения функции диссипации в узлах разностной сетки в различные моменты времени. Сравнение полученных и точных значений прогибов $w = \gamma R^2 W / \sigma_s h^2 t_1^2$ в различные моменты времени приведено в табл. 2 (здесь R — радиус круглой пластинки, r — текущая координата радиуса, остальные обозначения — такие же, что и выше, $w^{1-2} = 5/3 w^1$, в верхней строке даны значения расчетных величин прогибов, в нижней — точных).

Таблица 2

t/t_1	$r/R=0$	$r/R=0.2$	$r/R=0.4$	$r/R=0.6$	$r/R=0.8$	$r/R=1.0$
1	9.57	9.57	7.18	4.79	2.39	0
	9.00	9.00	7.75	4.95	2.50	0
2	26.61	24.16	18.12	12.08	6.04	0
	25.50	23.30	18.60	12.10	6.20	0
$8/3$	31.16	28.12	21.09	14.08	7.03	0
	30.80	27.60	21.80	14.20	7.30	0
$10/3$	31.16	28.12	21.09	14.08	7.03	0
	31.50	28.10	22.20	14.55	7.40	0

Расчетное значение $t_h = 3t_1$ совпало с точным; отклонение расчетных и точных значений прогибов пластинки — практически малосущественно. Поля напряжений также получились близкими к точным. Характерно образование в первой фазе движения центральной горизонтальной зоны.

Следовательно, с помощью методов линейного программирования с высокой степенью точности можно решать различные задачи о динамическом нагружении жесткопластического тела.

Поступила 5 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходж Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М., Машгиз, 1963.
2. Шапиро Г. С. О поведении пластических конструкций при импульсивном действии нагрузки. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек», ч. I. Тарту, 1966.
3. Ерхов М. И. Об экстремальных принципах динамики жесткопластического тела. Строительная механика и расчет сооружений, 1970, № 5.
4. Ерхов М. И. О теории предельного равновесия динамически нагруженных тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.
5. Ерхов М. И., Себекина В. И. Теория предельного равновесия динамически нагруженных тел и математическое программирование. Тр. Центр. н.-и. ин-та строит. конструкций, 1970, вып. 13.
6. Ерхов М. И. Вопросы расчета конструкций за пределом упругости на динамическую нагрузку. Тр. Центр. н.-и. ин-та строит. конструкций, 1970, вып. 6.
7. Коортан D. C. A., Лансе R. H. On linear programming and plastic limit analyses. J. Mech. and Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 2, p. 77—87. (Рус. перев.: О линейном программировании и теории предельного равновесия. Механика. Сб. перев., 1966, № 2.)