МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1976

УДК 539.31

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РЕГУЛЯРНОЙ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В. Н. ДОЛГИХ, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

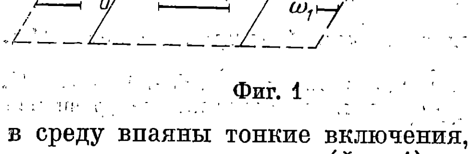
(Сумы)

Рассматривается упругая изотропная среда с двоякопериодическими группами инородных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой впаянных или вклеенных ребер, или как упругая композиционная среда с конгруэнтными группами волокон, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники.

Дается теоретическое описание указанной среды, позволяющее определить напряженное состояние в ней. В соответствии с общей постановкой задачи приведения [1] определяются макроскопические упругие параметры композиционной среды. Приводятся результаты расчетов.

Для случая одиночного стрингера в пластине решение содержится в [2]. Решения ряда задач приведения для композиционного материала со сплошными волокнами кругового сечения содержатся в [3]. Соответствующие задачи для трубчатых волокон методом работы [1] решены в [4].

1. Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1=0$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1>0$) — основные периоды плоской области D, граница которой L состоит из конгруэнтных групп различных параллельных отрезков L_{mn}^j ($j=1, 2, \ldots, k$; $m, n=0, \pm1, \pm2, \pm\ldots$). Внутри основного параллелограмма периодов $\cup L_{00}^j=l_{00}$.



Фиг. 1

В любом параллелограмме, конгруэнтном основному, $\cup L_{mn}^j=l_{mn}\equiv\equiv l_{00}(\operatorname{mod}\omega_1, \ \omega_2)$. Полная граница $L=\cup l_{mn}$. Отрезок L_{00}^j характеризуется концевыми точками a_j и b_j ($\operatorname{Im}a_j=\operatorname{Im}b_j$, $j=1, 2, \ldots, k$).

Будем считать, что область D заполнена упругой изотропной средой, в которой имеют место средние напряжения S_1, S_2, S_{12}, а вдоль L_{mn}^j ($j=1, 2, \ldots, k$; $m, n=0, \pm1, \pm2, \pm\ldots$) в среду впаяны тонкие включения, имеющие сосредоточенные жесткости на растяжение — сжатие (фиг. 1).

Задача заключается в изучении напряженного состояния среды и включений, а также в описании жесткости всей системы в целом.

Обозначим через $q_0(t)$ действующее на единицу толщины пластины (матрицы) усилие взаимодействия ее с включением в точке $t\in L$. Тогда функции Колосова — Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяющие напряженное и деформированное состояние в D, можно представить в виде

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\int\limits_{l_{00}} q_0(t)\ln\sigma(z-t)\,dt+Az, \qquad \operatorname{Im}q_0(t)=0 \qquad (1.1)$$

$$\psi(z)=\frac{\varkappa}{2\pi(\varkappa+1)}\int\limits_{l_{00}} q_0(t)\ln\sigma(z-t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\int\limits_{l_{00}} q_0(t)\left[\zeta_1(z-t)+\bar{t}\zeta(z-t)\right]dt+Bz$$

Здесь A и B — константы, подлежащие определению, $\varkappa=(3-\mu)/(1+\mu)$, если рассматривается задача о взаимодействии пластины с включениями. При изучении композиционной среды следует положить $\varkappa=3-4\mu$ (μ — коэффициент Пуассона материала среды); $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса. Мероморфная функция $\zeta_1(z)$ определена в [3].

К представлениям (1.1) необходимо присовокупить условия равновесия включений

$$\int\limits_{L_{00}^{j}} q_0(t)\,dt=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k) \tag{1.2}$$

Представления (1.1) являются корректными, поскольку можно показать, что, во-первых, обеспечивается двоякопериодическое распределение напряжений в D и, во-вторых, скачок касательных напряжений в любой точке $t\in L$ равен $q_0(t)$. Кроме того, представления (1.1) обеспечивают существование заданных в D средних напряжений S_1, S_2 и S_{12}.

Определим A и B из статических условий. Введем функцию $g(z)=$ $=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$.

Главный вектор сил, действующих вдоль произвольной дуги cd в пределах параллелограмма периодов, выражается соотношением $X+iY=$ $=-ig(z)\big|_c^d$ [5].

Статические условия в пределах параллелограмма периодов дают (фиг. 1)

$$g(z+\omega_1)-g(z)=-i\omega_1(S_{12}+S_2e^{i\alpha}),\qquad g(z+\omega_2)-g(z)=i|\omega_2|(S_1+S_{12}e^{i\alpha}) \tag{1.3}$$

Имеют место соотношения [3] (γ_ν^* — несущественная константа)

$$\begin{gathered}\ln\sigma(z+\omega_\nu)-\ln\sigma(z)=\pi i+\delta_\nu(z+\omega_\nu/2)\\ \zeta_1(z+\omega_\nu)-\zeta_1(z)=\bar{\omega}_\nu\zeta(z)-\gamma_\nu z-\gamma_\nu^*\\ \delta_\nu=2\zeta(\omega_\nu/2),\quad \gamma_2\omega_1-\gamma_1\omega_2=\delta_1\bar{\omega}_2-\delta_2\bar{\omega}_1,\quad \delta_1\omega_2-\delta_2\omega_1=2\pi i\end{gathered} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.1) в (1.3) вычисляя соответствующие приращения и учитывая (1.4), приходим к системе уравнений относительно постоянных A и B. Решение этой системы дает

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}A=\frac{S_1+2S_{12}\cos\alpha+S_2}{4\sin\alpha}+a\left[\frac{\pi(1+\varkappa)}{2S}-\frac{\operatorname{Re}\delta_1}{\omega_1}\right]\\ B=-\frac{S_1+2S_{12}e^{-i\alpha}+S_2e^{-2i\alpha}}{2\sin\alpha}+a\left[\frac{\varkappa\delta_1-\gamma_1}{\omega_1}-\frac{\pi(1+\varkappa)}{S}\right]\\ a=\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\int\limits_{l_{00}} q_0(t)\,t\,dt,\qquad S=\omega_1|\omega_2|\sin\alpha,\qquad \alpha=\arg\omega_2\end{gathered} \tag{1.5}$$

Мнимую часть A можно положить равной нулю.

2. Вещественная плотность $q_0(t)$ в представлениях (1.1) определяется из условия совместности деформаций на L.

Приравнивая деформацию e_x среды и включений на l_{00}, приходим к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

$$\int_{l_{00}} K(\tau-t)\, q_0(t)\, dt+\beta_j^* \int_{\tau}^{b_j} q_0(t_j)\, dt_j+M\{q_0(t)\}=F^* \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

$$K(\tau-t)=\operatorname{Re}\left\{\zeta(\tau-t)-\frac{1}{1-2\varkappa}\left[(\tau-t)\overline{\rho(\tau-t)}-\overline{\rho_1(\tau-t)}\right]\right\}$$

$$M\{q_0(t)\}=\frac{1}{1-2\varkappa}\left[\frac{\pi(1+\varkappa)^2}{2S}-\frac{(2\varkappa-1)\operatorname{Re}\delta_1-\operatorname{Re}\gamma_1}{\omega_1}\right]\int_{l_{00}} q_0(t)\, t\, dt$$

$$F^*=-\frac{\pi(\varkappa+1)}{1-2\varkappa}\left[\frac{(\varkappa+1)(S_1+2S_{12}\cos\alpha)+(\varkappa-1+2\cos 2\alpha)S_2}{2\sin\alpha}\right]$$

$$\beta_j^*=\frac{16\pi\delta G}{E_jF_j(3\mu-5)} \text{ — для пластинки со стрингерами}$$

$$\beta_j^*=\frac{16\pi G(1-\mu)}{E_jd_j(8\mu-5)} \text{ — для композиционного материала} \qquad (2.1)$$

Здесь δ — толщина пластинки, G — модуль сдвига среды, d_j и F_j — соответственно толщина и площадь поперечного сечения j-го волокна.

К системе (2.1) необходимо присовокупить дополнительное условие (1.2).

Если в пределах параллелограмма периодов имеется лишь одно включение длины $2l$ ($k=1$, $a_1=-l$, $b_1=l$), расположенное на оси x, то, вводя безразмерные параметры по формулам: $\xi=x/l$, $\lambda=2l/\omega_1$ и используя разложения функций $\zeta(z)$, $\rho(z)$, $\rho_1(z)$ в степенные ряды [3], приходим к одному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\int_{-1}^{1}\frac{q(\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}\Lambda_j\int_{-1}^{1} q(\xi)(\xi_0-\xi)^{2j+1}d\xi+\beta\int_{\xi_0}^{1} q(\xi)\,d\xi=\pi f$$

$$(-1\leqslant\xi_0\leqslant 1),\quad q(\xi)=q_0(x)$$

$$\Lambda_0=\frac{\omega_1}{2\varkappa}\left[(2\varkappa-1)\operatorname{Re}\delta_1-\operatorname{Re}\gamma_1-\frac{\pi(\varkappa+1)^2}{2|\omega_2|\sin\alpha}\right] \qquad (2.2)$$

$$\Lambda_j=\frac{1}{\varkappa}\left[(j+1)\operatorname{Re}\rho_{j+1}-(j+1-\varkappa)\operatorname{Re} g_{j+1}\right] \qquad (j=1,2,\ldots)$$

$$\rho_{j+1}=\sum_{m,n}{}'\frac{(m+n\bar\omega_2/\omega_1)}{(m+n\omega_2/\omega_1)^{2j+3}},\qquad g_{j+1}=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(m+n\omega_2/\omega_1)^{2j+2}}$$

$$\beta=\frac{4\pi}{(3-\mu)(1+\mu)}\frac{E\delta l}{E_1F_1} \text{ — для пластины со стрингерами}$$

$$\beta=\frac{4\pi(1-\mu)}{(3-4\mu)(1+\mu)}\frac{El}{E_1d_1} \text{ — для композиционного материала}$$

$$f=-\frac{\varkappa+1}{4\varkappa}\left[\frac{(\varkappa+1)(S_1+2S_{12}\cos\alpha)+(\varkappa-1+2\cos 2\alpha)S_2}{\sin\alpha}\right]$$

где E — модуль упругости среды. К этому уравнению необходимо добавить условие (1.2).

Средние напряжения S_1, S_2, S_{12} можно выразить через напряжения σ_1, σ_2 и τ_{12}, действующие на площадках, перпендикулярных координатным осям. В этом случае правая часть уравнения (2.2) примет вид $f=-[(\varkappa+1)\sigma_1+(\varkappa-3)\sigma_2](\varkappa+1)\,/\,(4\varkappa)$.

3. Решение уравнения (2.3) будем искать в виде

$$q(\xi)=q^*(\xi)(1-\xi^2)^{-1/2} \tag{3.1}$$

Искомую функцию $q^*(\xi)$ представим в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$q^*(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kT_k(\xi), \qquad T_k(\xi)=\cos(k\arccos\xi) \tag{3.2}$$

Дополнительное условие (1.2) при этом удовлетворится автоматически.

В дальнейшем понадобятся следующие соотношения для полиномов Чебышева первого и второго рода:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\xi}{\xi-\xi_0}=\pi U_{k-1}(\xi_0), \qquad U_k(\xi)=\frac{\sin[(k+1)\arccos\xi]}{\sin(\arccos\xi)}$$

$$\int_{-1}^{1}(1+\xi)^sT_k(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi(2S)!}{2^s(s+k)!\,\Gamma(s-k+1)}=\pi b_{k,s} \tag{3.3}$$

$$\int_{-1}^{1}(1+\xi)^s\sqrt{1-\xi^2}\,U_k(\xi)d\xi=\frac{\pi(2s+1)!(k+1)}{2^s(s+k+2)!\,\Gamma(s-k+1)}=\pi a_{k,s}$$

Подставляя (3.1), (3.2) в (2.2) и используя свойства (3.3) и ортогональность полиномов $U_k(\xi)$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_k

$$A_{2n+1}+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}\alpha_{k,n}=f_{2n} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3.4}$$

$$A_{2m}=0 \quad (m=1,2,\ldots), \qquad f_0=f, \qquad f_{2n}=0 \quad (n=1,2,\ldots)$$

$$\alpha_{k,n}=2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}\Lambda_j\sum_{s=0}^{2j+1}(-1)^s\frac{(2j+1)!}{s!(2j+1-s)!}a_{2n,s}b_{2k+1,2j+1-s}+$$

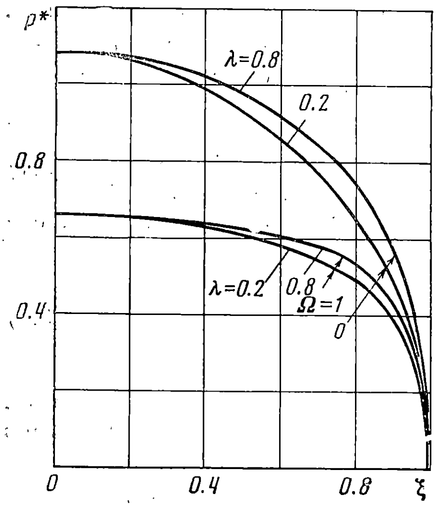
$$+\frac{2\beta}{\pi^2}\left[\frac{1}{4(n+1)^2-(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2-4n^2}\right]$$

4. Макроскопические упругие параметры композиционной среды находим из решения задачи приведения. Для смещений в D имеем формулу [5]

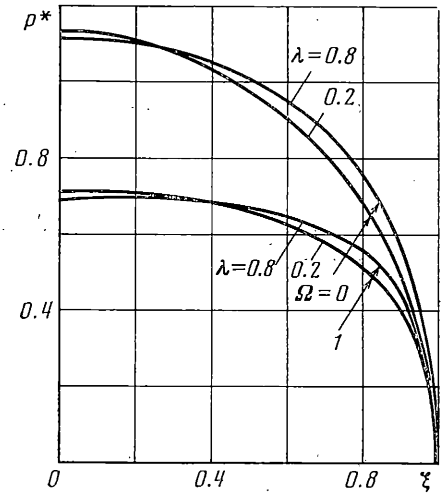
$$u+iv=\frac{1}{2G}\{\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\} \tag{4.1}$$

Вычисляя соответствующие приращения смещений, запишем

$$(u+iv)\big|_z^{z+\omega_\nu}=\frac{1}{2G}\{(\varkappa-1)A\omega_\nu-\overline{B\omega_\nu}+(2\varkappa\operatorname{Re}\delta_\nu-\bar{\delta}_\nu-\bar{\gamma}_\nu)a\} \qquad (\nu=1,2) \tag{4.2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

С другой стороны, эти приращения можно выразить через компоненты средней деформации и среднего вращения по формулам [6]

$$u|_z^{z+\omega_1}=e_1\omega_1,\qquad v|_z^{z+\omega_1}=(e_{12}+\omega)\,\omega_1,\qquad \omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\tag{4.3}$$

$$u|_z^{z+\omega_2}=e_1|\omega_2|\cos\alpha+(e_{12}-\omega)\,|\omega_2|\sin\alpha$$

$$v|_z^{z+\omega_2}=(e_{12}+\omega)\,|\omega_2|\cos\alpha+e_2|\omega_2|\sin\alpha$$

Приравнивая, согласно [1], соответствующие приращения из (4.2) и (4.3), получаем

$$e_1=\frac{1}{2G}\left\{(\varkappa-1)\operatorname{Re}A-\operatorname{Re}B+a\left[\frac{(2\varkappa-1)\operatorname{Re}\delta_1-\operatorname{Re}\gamma_1}{\omega_1}\right]\right\}$$

$$e_2=\frac{1}{2G}\left\{(\varkappa-1)\operatorname{Re}A+\operatorname{Re}B+\frac{a}{\omega_1}[\operatorname{Re}\gamma_1-\operatorname{Re}\delta_1]\right\}$$

$$2e_{12}=\gamma_{12}=\frac{1}{G}\tau_{12},\qquad \omega=\frac{a}{2G}\frac{(\varkappa+1)\operatorname{Im}\delta_1}{\omega_1}\tag{4.4}$$

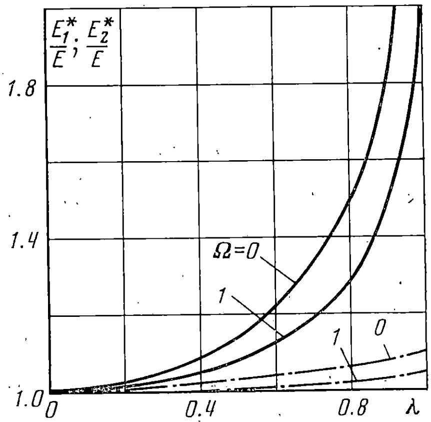
Решение уравнения (2.2) можно представить в виде $q(\xi)=[(\varkappa+1)\sigma_1+(\varkappa-3)\sigma_2]q^{(1)}(\xi)$, где $q^{(1)}(\xi)$ — решение (2.2) при $f=-(\varkappa+1)/(4\varkappa)$. Отсюда следует, что

$$a=l^2[(\varkappa+1)\sigma_1+(\varkappa-3)\sigma_2]a^{(1)},\qquad a^{(1)}=\frac{1}{2\pi(\varkappa+1)}\int_{-1}^{1}q^{(1)}(\xi)\,\xi\,d\xi\tag{4.5}$$

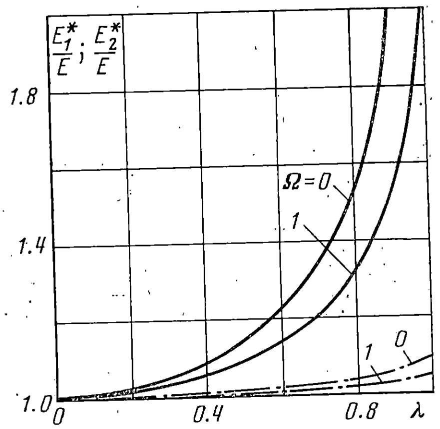
Функционал $a^{(1)}$ с учетом формул (3.1) и (3.2) примет вид $a^{(1)}=0.25A_1(\varkappa+1)^{-1}$, тогда, подставляя (4.5) в (4.4) и учитывая (1.5), получим закон Гука для модельной среды

$$e_1=\frac{1}{E_1^*}\sigma_1-\frac{\mu_2^*}{E_2^*}\sigma_2,\qquad e_2=-\frac{\mu_1^*}{E_1^*}\sigma_1+\frac{1}{E_2^*}\sigma_2,\qquad \gamma_{12}=\frac{\tau_{12}}{G^*}$$

$$E_1^*\mu_2^*=E_2^*\mu_1^*$$



Фиг. 4



Фиг. 5

композиционный материал

$$e_1=\frac{1-\mu^2}{E}\left[1+\frac{\pi(1-\mu)\lambda^2A_1\omega_1}{2|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_1-$$

$$-\frac{\mu(1+\mu)}{E}\left[1+\frac{\pi(1-\mu)\lambda^2A_1\omega_1}{2|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_2$$

$$e_2=-\frac{\mu(1+\mu)}{E}\left[1+\frac{\pi(1-\mu)\lambda^2A_1\omega_1}{2|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_1+$$

$$+\frac{1-\mu^2}{E}\left[1+\frac{\pi\mu^2\lambda^2A_1\omega_1}{2(1-\mu)|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_2$$

$$2e_{12}=\gamma_{12}=\frac{\tau_{12}}{G}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{12}$$

пластина со стрингерами

$$e_1=\frac{1}{E}\left[1+\frac{\pi\lambda^2A_1\omega_1}{2(1+\mu)|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_1-\frac{\mu}{E}\left[1+\frac{\pi\lambda^2A_1\omega_1}{2(1+\mu)|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_2$$

$$e_2=-\frac{\mu}{E}\left[1+\frac{\pi\lambda^2A_1\omega_1}{2(1+\mu)|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_1+\frac{1}{E}\left[1+\frac{\pi\mu^2\lambda^2A_1\omega_1}{2(1+\mu)|\omega_2|\sin\alpha}\right]\sigma_2$$

$$2e_{12}=\gamma_{12}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{12}$$

5. В случае смыкания включений ($\lambda=1$) решение находится элементарно. Так, например, для среды, армированной периодической системой волокон (слоев), параллельных оси x, в которой действуют средние напряжения σ_1, σ_2, τ_{12}, получим

$$\sigma_x=(\sigma_1\Omega_*+\mu\sigma_2)\,/\,(1+\Omega_*),\qquad \sigma_y=\sigma_2,\qquad \tau_{xy}=\tau_{12},\qquad E_2^*\mu_1^*=E_1^*\mu_2^*$$

$$P=\frac{\delta|\omega_2|}{1+\Omega_*}(\sigma_1-\mu\sigma_2),\qquad \frac{E_1^*}{E}=\frac{1+\Omega_*}{\Omega_*},\qquad \frac{E_2^*}{E}=\frac{1+\Omega_*}{1-\mu^2+\Omega_*},\qquad \mu_1^*=\mu,\qquad G^*=G$$

Для композиционного материала $\Omega_*=E|\omega_2|/(E_1d_1)$. Для пластины со стрингерами в этой формуле следует считать $d_1=F_1/\delta$.

Для композиционного материала в формуле для P следует положить $\delta=1$.

6. Рассмотрим пример. Пусть $\omega_2=\omega_1 e^{i\pi/3}$. В среде действуют средние напряжения $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$.

Распределение усилий P в волокне (стрингере) в зависимости от относительного размера области λ и параметра усиления Ω даны на фиг. 2, 3. Изменение макроскопических упругих параметров композита и пластины со стрингерами в функции от тех же величин при $\mu=0.3$ приведены соответственно на фиг. 4, 5 (сплошные линии – E_1^*/E, штрихпунктирные – E_2^*/E).

Обозначения, фигурирующие на фиг. 2–5, имеют следующий смысл:

$$P^*=\frac{P}{\delta l}=-\int\limits_{\xi_0}^{1} q(\xi)\,d\xi,\qquad \xi=\frac{x}{l},\qquad \lambda=\frac{2l}{\omega_1}$$

Для композиционного материала следует положить $\delta=1$. Для композиционного материала $\Omega=2El/(E_1d_1)$. Для пластины со стрингерами в этой формуле следует принять $d_1=F_1/\delta$.

Здесь E, E_1 – модули упругости матрицы и волокна соответственно, $2ld_1$ – площадь поперечного сечения волокна.

Поступила 25 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильштинский Л. А.* Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
2. *Толкачев В. М.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4.
3. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
4. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. Киев, «Наукова думка», 1971.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4. М., Изд-во АН СССР, 1954.
6. *Фильштинский Л. А.* К теории неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.