

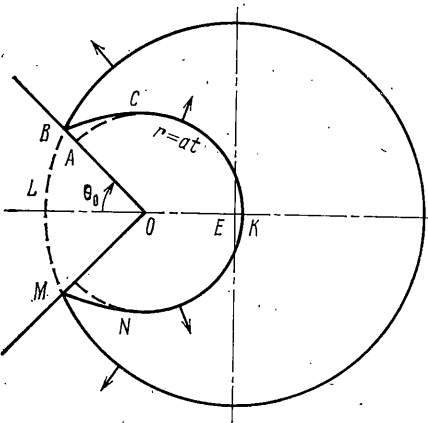
ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КОНУСЕ

В. Б. ПОРУЧИКОВ

(Москва)

Задачи о дифракции плоских упругих волн на гладком клине и конусе рассматривались в [1, 2]. Здесь исследуется осесимметричная задача о дифракции сферической продольной волны на гладком конусе произвольного угла раствора. При помощи решения задачи о дифракции плоской акустической волны на конусе [3] и формулы [4], связывающей это решение с решением задачи дифракции сферической волны, получено точное аналитическое решение задачи с учетом условия в вершине конуса.

1. Пусть продольная сферическая волна смещения $\varphi_0 = f(at + r_0 - R)/(4\pi R)$ набегает на жесткий бесконечный круговой конус с углом раствора $2\theta_0$ ($0 < 2\theta_0 < \pi$), вставленный без трения в безграничную упругую среду (Фиг. 1) с модулем сдвига μ и скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b . Здесь r, θ — сферические координаты с началом системы в вершине конуса, t — время, φ_0 — продольный потенциал падающей волны, r_0 — расстояние от вершины конуса до источника сферической волны, расположенного на оси конуса в точке E и начинающего действовать в момент $t = -r_0/a$ ($f(t) = 0$ при $t < 0$), $R = (r_0^2 + r^2 + 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}$.



Фиг. 1

В момент $t = 0$ фронт падающей волны достигает вершины конуса. Так как задача осесимметрична, то уравнения движения упругой среды вместе с граничными условиями запишутся через продольный (φ) и поперечный (ψ) потенциалы следующим образом [5]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{a^2 \partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{\sin^2 \theta} = r^2 \frac{\partial^2 \psi}{b^2 \partial t^2} \quad (1.2)$$

$$s_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0 \quad (1.3)$$

$$s_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} - \frac{\partial (r\psi)}{r \partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{\partial s_r}{r \partial \theta} \right] \quad (1.4)$$

$$s_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial (\psi \sin \theta)}{r \sin \theta \partial \theta}$$

где s_r, s_θ — компоненты вектора смещения s , $\sigma_{r\theta}$ — компонент тензора напряжений в сферической системе координат. Кроме того, будем считать, что в окрестности вершины конуса вектор смещения s ограничен, это обеспечит единственность решения задачи¹

$$s = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

При помощи выражения (1.2) для $\sigma_{r\theta}$ получим

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(\psi r)}{r \partial r} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{b^2 \partial t^2} \right\} \quad (1.6)$$

Пользуясь соотношениями (1.4) и (1.6) для s_θ и $\sigma_{r\theta}$, можно заметить, что граничные условия (1.3) будут выполнены, если

$$\partial \varphi / \partial \theta = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0 \quad (1.7)$$

Таким образом, потенциалы φ и ψ можно искать независимо один от другого до тех пор, пока не учитывается условие в вершине конуса (1.5).

2. Из выражений (1.1), (1.2) и (1.7) с учетом начальных условий следуют две системы для потенциалов φ и ψ

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{a^2 \partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\partial \varphi / \partial \theta = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при } t < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{\sin^2 \theta} = r^2 \frac{\partial^2 \psi}{b^2 \partial t^2} \quad (2.2)$$

$$\psi = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0, \quad \psi = 0 \quad \text{при } t < 0$$

Система (2.1) удовлетворяет решению задачи о дифракции акустической сферической волны φ_0 на жестком конусе, которое можно получить из решения задачи о дифракции плоской волны на конусе [3] и формулы [4], связывающей решения задач дифракции для плоской и сферической волн. Согласно [4], если известно решение $v(\tau, r, \theta)$ задачи о дифракции на конусе плоской волны $v_0(\tau, r, \theta) = \delta(\tau - r \cos \theta) / (4\pi r_0)$, то решение $V(\tau, r, \theta)$ задачи о дифракции на том же конусе сферической волны $V_0(\tau, r, \theta) = \delta(\tau + r_0 - R) / (4\pi R)$ имеет вид

$$V(\tau, r, \theta) = v[\tau + (\tau^2 - r^2) / (2r_0), r, \theta] \quad (2.3)$$

где $\tau = at$, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака (при $\tau < 0$ имеем: $v = v_0$, $V = V_0$).

Поскольку равенство (2.3) сохраняется и для возмущений V' , v' падающих волн ($V = V_0 + V'$, $v = v_0 + v'$), то сразу получаем картину возмущенной области (границы которой не зависят от вида функции $f(\tau)$) при дифракции сферической акустической волны $\varphi_0 = f(\tau + r_0 - R) / (4\pi R)$ на конусе.

Вне области меридионального сечения *ВСКНМОВ*, состоящей из поверхности конуса *МОВ*, дуги окружности *СКН* радиуса $r = \tau$ и двух дуг *ВС* и *NM*, касательных к окружности $r = \tau$ в точках *C* и *N*, возмущений нет: $\varphi = \varphi_0$. Дуга *ВС* (как и *NM*) является фронтом отраженной волны (*BC* — симметричное отображение дуги *LB* относительно прямой *ВО*) и описывается уравнением $2r_0\tau + \tau^2 - r^2 = 2r_0r \cos(2\theta_0 - \theta)$; откуда следует, что угловая координата точки *C* равна $2\theta_0$. В область *ABC* возмущения от вершины не доходят, так как их границей является дуга *АС*.

¹ Костров Б. В. Некоторые динамические задачи математической теории упругости. Канд. дисс., МГУ, 1964.

Поскольку решение $4\pi r_0 v(\tau, r, \theta)$ известно из [3] (как производная по τ от решения $u(\tau, r, \theta)$ задачи о дифракции единичной ступенчатой волны $u_0 = \eta(\tau - r \cos \theta)$), а решение φ для случая сферической волны φ_0 получается из решения V при помощи свертки, то в результате для φ с учетом (2.3) получаем в явном виде следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \xi) v\left(\xi + \frac{\xi^2 - r^2}{2r_0}, r, \theta\right) d\xi = \\ &= \frac{f(0)}{4\pi(r_0 + \tau)} u\left(\tau + \frac{\tau^2 - r^2}{2r_0}, r, \theta\right) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\tau} u\left(\xi + \frac{\xi^2 - r^2}{2r_0}, r, \theta\right) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{f(\tau - \xi)}{r_0 + \xi} \right] d\xi \\ f(0) &= \lim_{\tau \rightarrow +0} f(\tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нижний предел интегрирования в (2.4) оказывается конечным, так как

$$v\left[\tau + (\tau^2 - r^2)/(2r_0), r, \theta\right] = 0 \text{ при } \tau + (\tau^2 - r^2)/(2r_0) < r \cos \theta$$

Учитывая этот факт и принимая во внимание, что $u(\tau, r, \theta)$ — однородная функция нулевого измерения относительно переменных τ, r , приведем (2.4) к виду

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{f(0)u(\alpha, \theta)}{4\pi(r_0 + \tau)} - \frac{1}{4\pi} \int_{\cos \theta}^{\alpha} u(y, \theta) \frac{d}{dy} \left[\frac{f(\tau + r_0 - \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2r_0 r y})}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2r_0 r y}} \right] dy \\ u(\tau, r, \theta) &= u\left(\frac{\tau}{r}, \theta\right), \quad y = \frac{\xi}{r} + \frac{\xi^2 - r^2}{2r_0 r}, \quad \alpha = \frac{\tau}{r} + \frac{\tau^2 - r^2}{2r_0 r} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $\tau < 0$ решение $\varphi = \varphi_0$ (так как тогда $\alpha < 0$ и $u = u_0$).

Из формулы (2.5) и результатов исследования, проведенного в [3] для u при $r \rightarrow 0$, получим (с учетом асимптотической оценки $r^{-1} \partial u / \partial \theta = O(r^{\alpha_0 - 1})$) следующие асимптотические выражения при $r \rightarrow 0$:

$$\partial \varphi / \partial r = O(r^{\alpha_0 - 1}), \quad r^{-1} \partial \varphi / \partial \theta = O(r^{\alpha_0 - 1}), \quad 1 < \alpha_0 < 2 \quad (2.6)$$

где α_0 — наименьший положительный нуль присоединенной функции Лежандра первого рода $P_{\alpha}^{-1}(-\cos \theta_0)$.

Перейдем к системе (2.2) для функции ψ . Так как условие (1.5), согласно (2.6), удовлетворяется одним продольным потенциалом φ , то в качестве решения системы (2.2) следует взять ее тривиальное решение $\psi = 0$.

Итак, в осесимметричном случае дифракции сферической продольной волны φ_0 на гладком твердом конусе поперечные волны не возникают и полученное решение совпадает с решением акустической задачи (2.5). Аналогичный результат получен ранее для клина в [1], когда фронт падающей продольной волны перпендикулярен биссектрисе клина, и в работе [2] для конуса¹. Отметим, что, используя численные результаты для $u(\tau/r, \theta)$ из [3], можно с помощью формулы (2.5) получить численные результаты для данной задачи.

3. Исследуем поведение функции φ и ее производных в окрестности фронтов, когда $f(\tau) = \tau^2 \eta(\tau)$ (т. е. конечный скачок напряжений на фронте падающей сферической волны). Как и в случае дифракции плоской продольной волны на конусе [2], потенциал φ и вектор смещения s всюду непрерывны. На фронте отраженной волны

¹ Следует отметить, что в формулах (2.5) и (2.6) для потенциала φ в [2] имеются опечатки, для исправления которых необходимо заменить множители $r^{-1/2}$, стоящие перед знаками сумм, на множители r^{-1} .

BC терпит разрыв производная от смещения $\partial s_n / \partial n$ и величина скачка равна

$$\left[\frac{\partial s_n}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right] = \frac{1}{2\pi(r_0 + \tau)} \left[\frac{\sin(2\theta_0 - \theta)}{\sin \theta} \right]^{1/2} \quad (\theta_0 < \theta < 2\theta_0) \quad (3.1)$$

где n — нормаль к BC , направленная внутрь области ABC ; s_n — проекция вектора смещения на n .

При выводе (3.1) использована величина скачка $[u]$ на отраженной волне, найденная в [3]. При переходе через окружность $r = \tau$ компоненты тензора деформации непрерывны, а терпит разрыв вторая производная от смещения $\partial^2 s_r / \partial r^2 = \partial^2 \varphi / \partial r^2$, причем при подходе к дуге AC как сверху, так и снизу функция $\partial^2 \varphi / \partial r^2$ имеет особенность логарифмического типа, а при переходе через дугу CK эта функция терпит разрыв первого рода.

На фиг. 2 приведены кривые распределения напряжений $|\sigma_{\theta\theta}|$ как функций r/r_1 (r_1 — координата точки B) вдоль образующей конуса OB для $\theta_0 = \pi/4$ и $a/b = 2$. Цифрой 1 обозначена кривая для случая падения плоской волны сжатия

$$\varphi_0 = -(\tau - r \cos \theta)^2 \eta (\tau - r \cos \theta) [2\mu(a^2/b^2 - 2 \cos^2 \theta_0)]^{-1}$$

Кривые 2–4 соответствуют распределению напряжений на конусе для значений параметра $\tau/r_0 = 0.2, 0.5, 1$ при падении сферической волны сжатия

$$\varphi_0 = -r_0(\tau + r_0 - R)^2 \eta (\tau + r_0 - R) [2\mu R(a^2/b^2 - 2 \cos^2 \theta_0)]^{-1}$$

которая при $r_0 \rightarrow \infty$ переходит в плоскую волну.

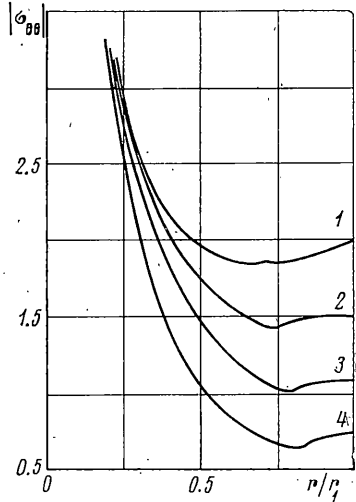
Из сравнения полученных результатов для плоской и сферической волн видно, что с течением времени растет влияние сферичности фронта волны. При $\tau/r_0 = 1$ (кривая 4) в области $0.6 < r/r_1 < 1$ напряжение $|\sigma_{\theta\theta}|$ на конусе в случае плоской волны более чем в два раза превосходит напряжение от сферической волны. При приближении к вершине конуса как в случае плоской, так и в случае сферической волн напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ имеет интегрируемую особенность $r^{\alpha_0 - 2}$.

Отметим, что аналогичным образом можно исследовать дифракцию сферических поперечных волн.

Поступила 25 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Поручиков В. Б. Дифракция упругой волны на конусе. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
3. Поручиков В. Б. Решение задачи о дифракции акустической волны на конусе. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Филиппов А. Ф. Дифракция произвольной акустической волны на клине. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний (гл. XII, доп. к кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. М., ОНТИ, 1937).



Фиг. 2