

ДИНАМИКА ТРЕЩИНЫ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

Л. И. СЛЕПЯН

(Новосибирск)

Рассматриваются стационарные динамические задачи о напряжениях и деформациях у края движущейся трещины при антиплоской и плоской деформации упруго-пластического тела. Решения, полученные в предположении о справедливости условия пластичности Треска — Сен-Венана и ассоциированного закона течения, свидетельствуют о том, что одновременный учет пластичности и сил инерции существенно изменяет состояние у края движущейся трещины. Так, раскрытие трещины принимает форму клина, угол при вершине которого увеличивается при уменьшении скорости движения трещины. В антиплоской задаче среди компонент напряжений и деформаций неограниченной оказывается лишь деформация сдвига, способствующая продвижению трещины (она имеет логарифмическую особенность). Напряжения, деформации и поворот в плоской задаче при фиксированной скорости трещины ограничены. С уменьшением скорости трещины деформации и поворот неограниченно возрастают.

Последний вывод согласуется с известным экспериментальным фактом: медленное динамическое распространение трещины неустойчиво, либо она останавливается, либо скорость ее становится большой.

Соответствующие квазистатические задачи рассмотрены в [1-3]. Динамические задачи для упругопластического тела с трещиной решались в постановке Дагдейла [4-6] (задачи линейной теории упругости со специальными граничными условиями). В такой постановке правильно определяется размер узкой пластической зоны [7], но нельзя установить, каковы величины напряжений и деформаций непосредственно у края движущейся трещины. Этот вопрос исследуется в данной работе.

1. Антиплоская деформация. Пусть в некоторой окрестности края плоской трещины не равны тождественно нулю лишь следующие компоненты перемещений и напряжений: $w(x_1 - ct, y)$ — перемещение вдоль оси z и напряжения $\sigma_{xz}(x_1 - ct, y)$, $\sigma_{yz}(x_1 - ct, y)$ (x_1, y, z — прямоугольные координаты, c — скорость трещины, $0 < c < c_2$, c_2 — скорость волны сдвига, $c = \text{const}$).

Введем подвижную систему координат x, y, z ($x = x_1 - ct$) и будем искать решение задачи о напряжениях и деформациях упругопластической среды у края трещины, лежащей в плоскости $y = 0$ при $x < 0$, основываясь на следующих уравнениях и граничных условиях (уравнения записаны с учетом того, что $\partial / \partial x_1 = \partial / \partial x$, $\partial / \partial t = -c \partial / \partial x$).

Уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} - \rho c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

Условие пластичности

$$\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 = k^2 \quad (1.2)$$

Связь между напряжениями и деформациями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\lambda \sigma_{xz} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\lambda \sigma_{yz} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} \quad (1.3)$$

В приведенных уравнениях ρ — массовая плотность материала, k — предел текучести при сдвиге ($k > 0$), μ — модуль упругого сдвига, $\lambda = \lambda(x, y) \geq 0$. Уравнения (1.2), (1.3) выполняются в области пластического течения. В упругой области $\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \leq k^2$.

Граничные условия при $y=0$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (x < 0); \quad \sigma_{yz} > 0, \quad w = 0 \quad (x > 0) \quad (1.4)$$

Введем наряду с прямоугольной полярную систему координат r, θ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) и предположим, что частные производные от напряжений и деформаций по координате r знакопостоянны в некоторой окрестности $r=0$ при $\theta = \text{const}$. Так как по условию пластичности (1.2) напряжения ограничены, то

$$\begin{aligned} \partial \sigma_{xz} / \partial r &= o(1/r), \quad \partial \sigma_{yz} / \partial r = o(1/r) \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \sim -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \sim \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$.

Из (1.1), (1.3) следует, что

$$\partial^2 w / \partial x^2 = O(1/r), \quad \lambda = O(1/r), \quad \partial^2 w / \partial x \partial y = O(1/r)$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = r \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \theta - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \theta \right) = O(1)$$

Учитывая, что по (1.4) $\partial w / \partial x = 0$ при $\theta = 0, r > 0$, видим, что деформация сдвига $\partial w / \partial x$ также ограничена и поэтому в соответствии с предположением о знакопостоянстве производных имеем следующие асимптотические равенства ($r \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sim -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sim \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.6)$$

С учетом равенств (1.5), (1.6), систему (1.1) — (1.3) можно записать в форме

$$\begin{aligned} -\sin \theta \sigma_{xz}' + \cos \theta \sigma_{yz}' + \rho c^2 \sin \theta \varepsilon_{xz}' &= 0, \quad -\sin \theta \varepsilon_{xz}' + \lambda r \sigma_{xz} + \frac{1}{\mu} \sin \theta \sigma_{xz}' = 0 \\ \cos \theta \varepsilon_{xz}' + \lambda r \sigma_{yz} + \frac{1}{\mu} \sin \theta \sigma_{yz}' &= 0, \quad \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 = k^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и ниже $()' = \partial () / \partial \theta, \varepsilon_{xz} = \partial w / \partial x$. Если ввести компоненты напряжений в полярной системе координат

$$\sigma_{rz} = \sigma_{xz} \cos \theta + \sigma_{yz} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{yz} \cos \theta - \sigma_{xz} \sin \theta$$

то система (1.7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2 \sin^2 \theta) \varepsilon_{xz}' + \lambda r \sigma_{\theta z} &= 0, \quad \alpha^2 \sin \theta \varepsilon_{xz}' + \frac{1}{\mu} (\sigma_{rz} + \sigma_{\theta z}') = 0 \\ \lambda r \sigma_{rz} + \frac{\sin \theta}{\mu} (\sigma_{rz}' - \sigma_{\theta z}') &= 0, \quad \sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2 = k^2 \quad (\alpha = c \sqrt{\rho / \mu} = c / c_2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Исключая из нее ε_{xz}' и λr и полагая

$$\sigma_{rz} = k \sin \omega, \quad \sigma_{\theta z} = k \cos \omega, \quad \omega = \omega(\theta), \quad \omega(0) = 0$$

(при этом условие пластичности удовлетворяется тождественно), приходим к следующему уравнению относительно $\omega(\theta)$:

$$(\omega' - 1)(\sin^2 \omega - \alpha^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (1.9)$$

Таким образом, возможны поля напряжений: асимптотически равномерное

$$\omega' = 1, \quad \sigma_{xz}' = \sigma_{yz}' = 0 \quad (1.10)$$

и неравномерное

$$\omega = \pm \arcsin(\alpha \sin \theta) \quad (1.11)$$

Из третьего уравнения системы (1.8) и равенства (1.11) следует, что в неравномерном поле напряжений

$$\lambda r = -\frac{\sin \theta}{\mu} \operatorname{ctg} \omega (\omega' - 1) = \frac{1}{\mu} \left(\pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} - \cos \theta \right)$$

Первый член правой части равенства по модулю больше второго ($0 < \alpha < 1$) и так как $\lambda r \geq 0$, то в (1.11) следует взять верхний знак.

Асимптотически равномерное поле напряжений так же, как и неравномерное, не удовлетворяет всем граничным условиям. Разгрузка с изменением напряжений по θ при $r \rightarrow 0$ вследствие ограниченности ε_{xz} невозможна [2, 3]. Остается комбинация равномерного и неравномерного полей. В соответствии с (1.9) с увеличением θ возможна лишь смена неравномерного поля на равномерное. Таким образом

$$\omega = \arcsin(\alpha \sin \theta) \quad (|\theta| < \theta_*); \quad \omega' = 1 \quad (\theta_* < |\theta| < \pi) \quad (1.12)$$

Учитывая граничное условие при $|\theta| = \pi$, получим следующее уравнение для определения θ_* :

$$\sigma_{yz} = k \cos(\arcsin(\alpha \sin \theta_*) - \theta_*) = 0$$

С учетом (1.12) находим

$$\operatorname{ctg} \theta_* = -\alpha \quad (1.13)$$

Итак, на основании (1.8), (1.12), (1.13) рассматриваемые величины определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -k(\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} - \alpha \cos \theta) \sin \theta \\ \sigma_{yz} &= k(\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \cos \theta + \alpha \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\int_0^\theta \frac{\sigma_{rz} + \sigma_{\theta z}'}{\mu \alpha^2 \sin \theta} d\theta = -\frac{k}{\mu \alpha} (\theta - \arcsin(\alpha \sin \theta)) \quad (|\theta| \leq \theta_*)$$

$$\sigma_{xz} = -k, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \mp \frac{\pi}{2} \frac{k}{\mu \alpha} \quad (\theta \geq \theta_*, \theta \leq -\theta_*)$$

Принимая во внимание соотношения (1.3), находим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{k}{\mu r \alpha} \left(1 - \frac{\alpha \cos \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} \right) \cos \theta$$

Отсюда

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f(y) + \frac{k}{\mu\alpha} \left(\ln \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta} + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} + \cos \theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} - \cos \theta} \right) \quad (|\theta| \leq \theta_*) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f(y) + \frac{k}{\mu\alpha} \left(\frac{\alpha}{2} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \ln(1-\alpha^2) \right) \quad (|\theta| \geq \theta_*)$$

Функция $f(y)$ определяется из условия ограниченности $\partial w/\partial y$ при $r \rightarrow \text{const} > 0$, $\theta=0$. Ее можно представить в виде

$$f(y) = \frac{k}{\mu} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \frac{l}{|y|} + 1 \right), \quad l = \text{const} \quad (1.16)$$

Используя далее зависимости (1.14), (1.15), определяем перемещение

$$w = \frac{k}{\mu\alpha} \left\{ y \left[(1-\alpha) \left(\ln \frac{l}{|y|} + 1 \right) + \alpha + \ln \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta} + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} + \cos \theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} - \cos \theta} \right] - x [\theta - \arcsin(\alpha \sin \theta)] \right\} \quad (|\theta| \leq \theta_*)$$

$$w = \frac{k}{\mu\alpha} \left\{ y \left[(1-\alpha) \left(\ln \frac{l}{|y|} + 1 \right) + \alpha + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \ln(1-\alpha^2) \right] \mp \frac{\pi}{2} x \right\} \quad (\theta \geq \theta_*, \theta \leq -\theta_*)$$

Заметим, что, как и в квазистатических условиях [2], на берегах трещины сохраняется бесконечная деформация ε_{yz} и при $r > 0$ ($x < 0$)

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \sim f(y) \sim \frac{k}{\mu} \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \frac{l}{|y|} \quad (y \rightarrow 0, x < 0)$$

Таким образом, асимптотика деформации ε_{yz} , способствующей продвижению трещины, равна

$$\frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{k}{\mu} \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \frac{l}{r} \quad (r \rightarrow 0, |\theta| < \pi) \quad (1.17)$$

«Раскрытие» трещины у ее края

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mp \frac{\pi}{2} \frac{k}{\mu\alpha} \quad (x \rightarrow -0, y = \pm 0) \quad (1.18)$$

Постоянная l в (1.17) и предыдущих соотношениях без существенной ошибки для оценки деформации ε_{yz} у края трещины может быть отождествлена с размером пластической области при $y=0$. Как видно из (1.15), (1.16), данное утверждение вполне точно, если полученное здесь выражение для ε_{yz} справедливо при $y=0$, $x > 0$ не только как асимптотическое, но и во всей пластической области, что не противоречит условиям задачи. Длина пластической области определяется внешней нагрузкой, размером трещины и ее скоростью [6]. Из (1.17) следует, что при уменьшении скорости распространения трещины деформация ε_{yz} неограниченно возрастает. То же относится и к углу, характеризующему раскрытие трещины

(1.18). В отличие от квазистатики [1, 2] здесь отсутствует разгрузка непосредственно у края трещины. В действительности разгрузка, конечно, может происходить, но лишь при удалении от края трещины, пределы же для напряжений при $r \rightarrow 0$ в секторах $\theta_* \leq |\theta| \leq \pi$ не зависят от θ .

Кроме указанного, приведенное здесь решение отличается от известных результатов для упругого или упругопластического тела клинообразной формой раскрытия трещины.

2. Плоская деформация. Стационарная задача о динамике трещины при плоской деформации упругопластического тела исследуется в той же постановке, что и выше для антиплоской деформации. Компоненты перемещений $u(x, y)$ — вдоль оси x , $v(x, y)$ — вдоль оси y и напряжений $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ в пластической области определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_-}{\partial x} + \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ -\frac{\partial \sigma_-}{\partial y} + \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\lambda \sigma_- + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \lambda \sigma_- + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -2\lambda \sigma_{xy} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \\ \sigma_-^2 + \sigma_{xy}^2 &= k^2, \quad \sigma = \frac{2(1+\nu)\mu}{3(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma_- = 1/2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$, $\sigma = 1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$, ν — коэффициент Пуассона, остальные обозначения прежние.

Граничные условия при $y=0$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (x < 0); \quad v = 0, \sigma_{yy} > 0 \quad (x > 0) \quad (2.2)$$

соответствуют растяжению тела поперек трещины. Величины σ_- и σ_{xy} ограничены условием пластичности. Покажем, что среднее напряжение σ также ограничено. Из первых двух уравнений системы (2.1), справедливых независимо от характера деформации, следует

$$\begin{aligned} (1-1-2\nu)\alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= \\ = \frac{2(1+\nu)}{3} \left(\frac{\partial^2 \sigma_-}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_-}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где оценка сделана с учетом ограниченности σ_- , σ_{xy} и предположения о знакопостоянстве первых и вторых производных в некоторой окрестности $r=0$ при $\theta = \text{const}$. Отсюда, при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sigma &\sim \frac{A}{\sqrt{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} + P(r) + Q(\theta), \quad A \geq 0, \quad P = O(\ln r) \\ r_1 &= \left(\frac{x^2}{1-(1-2\nu)\alpha^2} + y^2 \right)^{1/2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{y\sqrt{1-(1-2\nu)\alpha^2}}{x} \end{aligned}$$

Здесь первый член — единственная неограниченная асимптотика решения однородного уравнения (2.3) (относительно σ), удовлетворяющего граничным условиям и условию интегрируемости σ , а остальные — асимптотика частного решения неоднородного уравнения. При $\theta=\pi$ $\partial\sigma/\partial y \sim \sim 1/2 A r^{-3/2} \geq 0$. Тогда, как следует из второго уравнения системы (2.1)

$$0 \leq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{\text{const}}{r^{3/2}}, \quad 0 \leq \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{r}} \quad (2.4)$$

что при строгом неравенстве соответствует «перехлесту» берегов трещины, а не ее раскрытию. Поэтому $A=0$. Второй член должен быть ограничен, так как в противном случае не выполняется граничное условие при $|\theta|=\pi$. Итак, среднее напряжение ограничено. Основываясь далее на тех же рассуждениях, что и в случае антиплоской деформации, следует положить $\partial u/\partial x \sim p(\theta) + B \ln r$, $\partial v/\partial x \sim q(\theta)$; $\partial v/\partial y \sim m(\theta) - B \ln r$, $B = \text{const}$ (2.4) причем данные асимптотики можно дифференцировать. В результате получаем

$$\begin{aligned} r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\sim -p' \sin \theta + B \cos \theta, \quad m' = -(B+q') \text{ctg} \theta, \quad r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sim p' \cos \theta + B \sin \theta \\ r \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &\sim -q' \sin \theta, \quad r \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sim q' \cos \theta, \quad r \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{B+q' \cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда, в частности, имеем, что $q'(0) = -B$. Положим

$$\sigma_{xx} = -k \cos(\omega - 2\theta); \quad \sigma_{xy} = -k \sin(\omega - 2\theta) \quad (2.6)$$

При этом условие пластичности удовлетворяется тождественно. После исключения среднего напряжения

$$\sigma' = \frac{2(1+\nu)\mu}{3(1-2\nu)} (p' - (q'+B) \text{ctg} \theta) \quad (2.7)$$

система (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} (1 - (1-2\nu)\alpha^2) (p' \sin \theta - B \cos \theta) - q' \cos \theta &= -(1-2\nu)\gamma \cos(\omega - 3\theta) \\ p' \cos \theta - B \text{ctg} \theta - (\text{ctg} \theta \cos \theta - (1-2\nu) \sin \theta) q' &= (1-2\nu)\gamma \sin(\omega - 3\theta) \\ p' \sin \theta + q' \cos \theta - B \cos \theta &= \gamma \sin(\omega - 2\theta) \sin \theta - 2\lambda r \cos(\omega - 2\theta) \\ p' \cos \theta - q' \sin \theta + B \sin \theta &= \gamma \cos(\omega - 2\theta) \sin \theta + 2\lambda r \sin(\omega - 2\theta) \\ \gamma &= (k/\mu) (\omega' - 2), \quad B = -q'(0) \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} p' = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\omega' - 2}{\alpha^2 \varphi \sin \theta} (\cos(\omega - 4\theta) \cos \theta - (1-2\nu)\alpha^2 \cos(\omega - 3\theta) \sin^2 \theta) - \right. \\ \left. - \frac{\omega'(0) - 2}{\alpha^4 \varphi} (1 - (1-2\nu)\alpha^2 \varphi) \text{ctg} \theta \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$q' = \frac{k}{\mu} \frac{\omega' - 2}{\alpha^2 \varphi} (\cos(\omega - 4\theta) - (1-2\nu)\alpha^2 \sin(\omega - 3\theta) \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \lambda = - \frac{p' \sin \theta + q' \cos \theta - \gamma \sin(\omega - 2\theta) \sin \theta}{2kr \cos(\omega - 2\theta)} \\ (\varphi = 1 - (1-2\nu)\alpha^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

и уравнение относительно $\omega(\theta)$

$$(\omega' - 2) [\cos^2(\omega - 4\theta) - \alpha^2 \sin^2 \theta (1 - 2\nu + \varphi)] - (\omega'(0) - 2) \varphi \cos(\omega - 2\theta) = 0 \quad (2.9)$$

Если $\omega'(0) \neq 2$, то, как следует из (2.8), (2.9), при малых значениях θ $\lambda < 0$. Таким образом, $B = \omega'(0) - 2 = 0$ и, следовательно, деформация ограничена. Как видно теперь из (2.9), здесь, так же как и в случае антиплоской деформации, возможно существование полей напряжений: равномерного

$$\omega' = 2, \quad \sigma'_x = \sigma'_{xy} = \sigma'_y = 0 \quad (2.10)$$

и неравномерного

$$\cos(\omega - 4\theta) = \pm \alpha \sin \theta \sqrt{1 - 2\nu + \varphi} \quad (2.11)$$

В неравномерном поле, как видно из (2.8), (2.11)

$$\lambda = \frac{(\omega' - 2) \sin(2\omega - 8\theta)}{8\mu\alpha^2 \varphi \sin \theta}, \quad \omega' = 4 - \frac{2\alpha^2(\varphi - \nu) \sin 2\theta}{\sin(2\omega - 8\theta)} \quad (2.12)$$

Как равномерное, так и неравномерное поля в отдельности не удовлетворяют граничным условиям задачи, причем неравномерное поле не удовлетворяет условиям при $\theta = 0$ и при $\theta = \pm\pi$. Поэтому здесь решение должно представляться совокупностью указанных полей; неравномерные поля лежат вне некоторых окрестностей $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi$. В равномерном поле в окрестности $\theta = 0$ в соответствии с (2.2), (2.6) $\omega = 2\theta$. Отсюда и из (2.11) следует, что на границе с неравномерным полем

$$\cos^2 2\theta = \alpha^2 (1 - 2\nu + \varphi) \sin^2 \theta$$

Данное уравнение имеет следующие решения:

$$|\theta| = \theta_{1,2} = \arcsin \left(\frac{4 + 2(1 - \nu)\alpha^2 \mp \alpha \sqrt{16(1 - \nu) + 4\nu^2 \alpha^2}}{2(4 + (1 - 2\nu)\alpha^4)} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

$$|\theta| = \theta_{3,4} = \pi - \theta_{2,1}, \quad 0 < \theta_1 < \pi/4, \quad \pi/4 < \theta_2 < \pi/2$$

Заметим, что в соответствии с (2.11) при $0 < |\theta| < \pi$:

$$\cos^2(\omega - 4\theta) \neq 1, \quad \cos(\omega - 4\theta) \neq 0 \quad (0 < \alpha < 1)$$

В результате имеем, что если неравномерное поле лежит при $\theta \geq \theta_1$, то в нем, как видно из (2.12), (2.13)

$$\cos 2\theta_1 > 0, \quad \sin 2\theta_1 > 0, \quad \sin(2\omega - 8\theta) < 0, \quad \omega' > 2, \quad \lambda < 0 \quad (\theta_1 < \theta < \pi/2)$$

Тот же результат получается и в случае, когда рассматриваемая граница лежит при $\theta = \theta_3$. Отсюда следует, что неравномерные поля начинаются при $|\theta| = \theta_2$ (лежат при $\theta > \theta_2$ и при $\theta < -\theta_2$). Тогда, как показывает анализ соотношений (2.12)

$$\omega' > 2, \quad \cos(\omega - 4\theta) < 0, \quad \sin(2\omega - 8\theta) > 0, \quad \lambda > 0 \quad (|\theta| > \theta_2) \quad (2.14)$$

Так как $\omega' > 2$, то равномерное поле при $\theta > 0$ (или при $\theta < 0$) не может с обеих сторон граничить с неравномерным, а условие $\sin(\omega - 2\theta) = 0$ ($\theta > \theta_2$) выполняется при $\omega = 2\theta + \pi$. Обращаясь к (2.13), (2.14), видим, что неравномерное поле вновь переходит в равномерное при выполнении равенств

$$\cos(\omega - 4\theta) = -\cos 2\theta < 0, \quad |\theta| = \theta_4 = \pi - \theta_1$$

Итак, напряжения у края трещины распределены следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} - k, \quad \sigma_{yy} = \frac{3\sigma_0}{2(1+\nu)} + k$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (|\theta| \leq \theta_2) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3\sigma}{2(1+\nu)} - k \cos(\omega - 2\theta)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{3\sigma}{2(1+\nu)} + k \cos(\omega - 2\theta)$$

$$\sigma_{xy} = -k \sin(\omega - 2\theta) \leq 0 \quad (\theta_2 \leq |\theta| \leq \theta_4)$$

$$\sigma_{xx} = 2k, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (\theta_4 \leq |\theta| \leq \pi)$$

Здесь ω определяется равенством (2.11) при $\cos(\omega - 4\theta) < 0$, $\omega(\theta_2) = 2\theta_2$, σ — по (2.7) при $\sigma(\theta_2) = \sigma_0$, а σ_0 — из уравнения

$$\sigma_{yy} = \frac{3\sigma}{2(1+\nu)} - k = 0 \quad (|\theta| = \theta_4)$$

Что касается напряжения σ_{zz} , то оно определяется в области $|\theta| < \theta_2$ по одной из следующих формул (в зависимости от того, выполняется ли соответствующее условие пластического течения):

$$\sigma_{zz} = k \left(\sigma_0 \geq \frac{1+\nu}{3\nu} k \right), \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\left(\sigma_0 \leq \frac{1+\nu}{3\nu} k \right) \quad (2.16)$$

В остальных областях ($|\theta| > \theta_2$):

$$\sigma_{zz}(\theta) = \sigma_{zz}(\theta_2) + \nu(\sigma_{xx}(\theta) + \sigma_{yy}(\theta) - \sigma_{xx}(\theta_2) - \sigma_{yy}(\theta_2)) \quad (2.17)$$

Деформации в соответствии с (2.4) (2.5) определяются так:

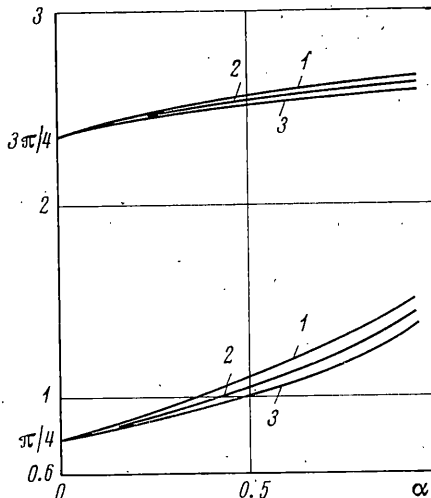
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \int p'(s) ds \quad (2.18)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)} \sigma - \frac{\partial u}{\partial x}$$

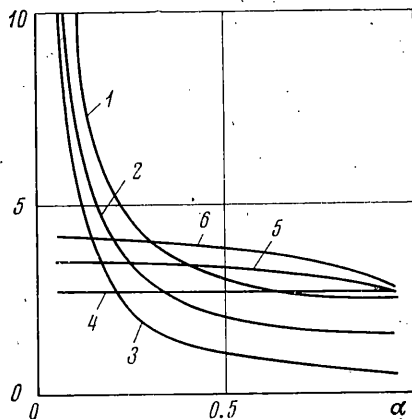
$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int (q'(s) - p'(s) \operatorname{ctg} s) ds$$

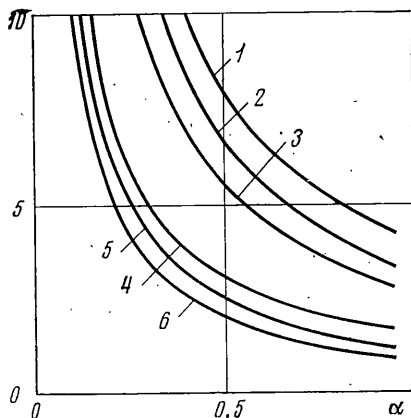
Здесь интегрирование проводится на интервале $\theta_2 \leq s \leq \min(\theta, \theta_4)$, $(\partial u / \partial x)_0$ — деформация в секторе $|\theta| \leq \theta_2$; p' , q' определяются по (2.8) с учетом (2.11), (2.12), (2.14) ($\omega'(0) = 2$). Раскрывшиеся



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

берега трещины у ее края образуют клин, угол при вершине которого 2β определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \left| \int_{\theta_2}^{\theta_4} q' d\theta \right| \quad (2.19)$$

Приведем еще асимптотические формулы, справедливые при малой скорости распространения трещины ($\alpha \rightarrow 0$)

$$\sigma \sim \frac{2(1+\nu)}{3} k \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{xx} \sim \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 - \frac{k}{\mu} \frac{2\sqrt{2(1-\nu)}}{\alpha} \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} \sim \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 + \frac{k}{\mu} \frac{2\sqrt{2(1-\nu)}}{\alpha} \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} \sim -\frac{k}{\mu} \frac{\sqrt{2(1-\nu)}}{\alpha} \left(\sqrt{2} - 2 \cos \theta - \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\pi/8)} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim -\frac{k}{\mu} \frac{2\sqrt{2(1-\nu)}}{\alpha} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \theta \right), \quad \omega' \sim 4 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\sigma_0 \sim \frac{2}{3} (1+\pi) (1+\nu) k, \quad \operatorname{tg} \beta \sim \frac{k}{\mu} \frac{4\sqrt{1-\nu}}{\alpha}, \quad \theta_2 \sim \frac{\pi}{4}, \quad \theta_4 \sim \frac{3\pi}{4}$$

При $|\theta| \leq \theta_2$ и при $|\theta| \geq \theta_4$ напряжения и деформации непрерывны и постоянны. Компоненты напряжений определяются по соотношениям (2.15)–(2.17) с учетом того, что в неравномерном поле $\omega' \sim 4$.

Полученное выше решение следует рассматривать, вообще говоря, как асимптотическое ($r \rightarrow 0$). Однако оно точно удовлетворяет сформулированным условиям задачи и поэтому может трактоваться также и как точное решение, соответствующее некоторым внешним нагрузкам. В последнем случае в секторе $|\theta| < \theta_2$ $\lambda = 0$ и, следовательно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = \frac{3(1-2\nu)}{4\mu(1+\nu)} \sigma_0 - \frac{k}{2\mu}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 = \frac{3(1-2\nu)}{4\mu(1+\nu)} \sigma_0 + \frac{k}{2\mu} \quad (2.21)$$

Во всяком случае, не следует ожидать, что при $\alpha \rightarrow 0$ деформация в указанном секторе неограниченно возрастает. Поэтому в правых частях соотношений (2.20) величины, указанные в (2.21), можно опустить, так что асимптотика деформаций при $\alpha \rightarrow 0$ определяется однозначно.

Отличительной особенностью полученного решения является ограниченность всех компонентов деформации, а также поворота, причем данные величины — порядка $k/(\mu\alpha)$, т. е. достаточно малы в обычных материалах, если отношение скорости распространения трещины к скорости волны упругого сдвига не слишком мало по сравнению с единицей. При этом геометрически линейная постановка задачи оправдана полностью. Другие особенности решения аналогичны указанным выше для антиплоской задачи.

На фиг. 1 показаны графики θ_2 и θ_4 ($\theta_2 < \theta_4$) при: 1 - $\nu=0$, 2 - $\nu=1/4$, 3 - $\nu=1/2$. На фиг. 2 кривые 1 - ($\nu=0$), 2 - ($\nu=1/4$), 3 - ($\nu=1/2$) соответствуют $\max \varepsilon_{yy} \mu/k$, кривые 4 - ($\nu=0$), 5 - ($\nu=1/4$), 6 - ($\nu=1/2$) соответствуют σ_0/k . На фиг. 3 кривые 1 - ($\nu=0$), 2 - ($\nu=1/4$), 3 - ($\nu=1/2$) соответствуют $(\mu/k) \operatorname{tg} \beta$, кривые 4 - ($\nu=0$), 5 - ($\nu=1/4$), 6 - ($\nu=1/2$) соответствуют $\max (-\varepsilon_{xy}) \mu/k$.

Поступила 26 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Chittaleu A. D., McClintock F. A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear. J. Mech. and Phys. Solids, 1971, vol. 19, No. 3.
2. Слепян Л. И. Деформация у края растущей трещины. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
3. Слепян Л. И. Растущая трещина при плоской деформации упругопластического тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
4. Atkinson C. A simple model of relaxed expanding crack. Arkiv fys., 1967, Bd 35, Nr 38.
5. Embley G. T., Sih G. C. Plastic flow around an expanding crack. Engng Fracture Mech., 1972, vol. 4, No. 3.
6. Маргынюк П. А., Шер Е. Н. Стационарно движущаяся трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной. ПМТФ, 1973, № 2.
7. Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором. Докл. АН СССР, 1965, т. 148, № 3.