

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ  
НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СЛОЕВ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

В. М. ВАЙНШЕЛЬБАУМ, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН

(Москва)

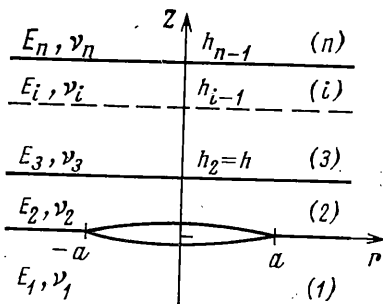
Предлагается метод решения осесимметричной задачи теории упругости для многослойной среды с дискообразной трещиной на границе соединения различных по упругим свойствам слоев. При помощи преобразования Ханкеля задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно вспомогательной искомой функции. Для трещины на границе двух полупространств дано аналитическое решение задачи, определяющее характер сингулярности решения в общем случае. При помощи этого решения в общем случае сингулярное уравнение регуляризуется по Карлеману - Векуа, и получается система уравнений Фредгольма второго рода, допускающая эффективное численное решение. Приводятся результаты численного решения задачи о трещине на границе полупространства и слоя, вторая грань которого скреплена с другим упругим полупространством.

Рассматривается поведение решения при различных соотношениях между упругими постоянными материалов и геометрическими параметрами задачи. Обнаружен характерный для слоистой среды эффект: в однородном поле растягивающих напряжений существует область устойчивого развития трещины по границе (или внутри) слоя из малосжимаемого материала, ограниченного слоями много большей жесткости. Дается качественное объяснение этого эффекта.

Аналогичным методом может быть рассмотрена также осесимметричная задача о штампе, сцепленном с многослойным основанием<sup>1</sup>.

Отметим, что точное решение осесимметричной задачи о трещине на границе двух полупространств получено впервые в [1], в дальнейшем эта задача рассматривалась в [2-4]. Эта задача и задачи о круговой трещине на границе слоя и полупространства в [5, 6] были сведены к сложным сингулярным интегральным уравнениям, которые решались численно. Последняя задача решалась методом конечных элементов в [7] применительно к определению адгезионной способности клеев [8, 9].

1. Постановка задачи и получение системы парных интегральных уравнений. Рассмотрим упругую среду (фиг. 1), где на границе соединения полупространства 1 и слоя 2 имеется дискообразная трещина радиуса  $a$ , на поверхностях которой действуют осесимметричные нормальные  $\sigma^\circ(r)$  и касательные  $\tau^\circ(r)$  нагрузки.



Фиг. 1

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{zi} = \sigma_{z(i+1)}, \tau_{rzi} = \tau_{rz(i+1)}, u_{zi} = u_{z(i+1)}, u_{ri} = u_{r(i+1)} \quad (z = h_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \tau_{rz1} = \tau_{rz2} \quad (z = 0) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma^\circ(r), \tau_{rz1} = \tau^\circ(r) \quad (0 \leq r < a), u_{z1} = u_{z2}, u_{r1} = u_{r2} \quad (r > a) \quad (z = 0) \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> В. М. Вайншельбаум, Р. В. Гольдштейн. Об одном классе смешанных осесимметричных задач для слоистых упругих сред. VI Всес. конф. по упругости и пластичности. М., 1975, Аннот. докл.; М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1975, пре-принт № 61.

Сведем задачу (1.1)–(1.3) к системе парных интегральных уравнений, используя общее представление решения осесимметричной задачи теории упругости в многослойной среде, приведенное в [10]. В безразмерных координатах  $\rho=r/a$  и  $t=z/h$  это представление имеет вид

$$\sigma_{zi}(\rho, t) = \int_0^{\infty} \beta \Delta_{zi}(\beta, t) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad \tau_{rzi}(\rho, t) = \int_0^{\infty} \beta \Delta_{\tau i}(\beta, t) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (1.4)$$

$$2\mu_i u_{zi}(\rho, t) = a \int_0^{\infty} \Delta_{wi}(\beta, t) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad 2\mu_i u_{ri}(\rho, t) = a \int_0^{\infty} \Delta_{ui}(\beta, t) J_1(\rho\beta) d\beta$$

$$\Delta_{zi}(\beta, t) = -[A_i + (\beta\lambda t - 1 + 2\nu_i) B_i] \varepsilon_i^+ + [C_i + (\beta\lambda t + 1 - 2\nu_i) D_i] \varepsilon_i^- \quad (1.5)$$

$$\Delta_{\tau i}(\beta, t) = [A_i + (\beta\lambda t + 2\nu_i) B_i] \varepsilon_i^+ + [C_i + (\beta\lambda t - 2\nu_i) D_i] \varepsilon_i^-$$

$$\Delta_{wi}(\beta, t) = [A_i + (\beta\lambda t + 1) B_i] \varepsilon_i^+ + [C_i + (\beta\lambda t - 1) D_i] \varepsilon_i^-$$

$$\Delta_{ui}(\beta, t) = -[A_i + (\beta\lambda t - 2 + 4\nu_i) B_i] \varepsilon_i^+ - [C_i + (\beta\lambda t + 2 - 4\nu_i) D_i] \varepsilon_i^-$$

$$\varepsilon_i^+ = \exp[-\beta\lambda(t_{i+1} - t)], \quad \varepsilon_i^- = \exp[-\beta\lambda(t - t_i)] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

В формулах (1.6) следует положить

$$\lambda = h/a = h_2/a, \quad t_i = h_{i-1}/h \quad (i=2, 3, \dots, n), \quad C_1 = D_1 = A_n = B_n = 0$$

Для определения  $4(n-1)$  неизвестных функций  $A_i(\beta)$ ,  $B_i(\beta)$ ,  $C_i(\beta)$ ,  $D_i(\beta)$ ,  $C_n(\beta)$ ,  $D_n(\beta)$  ( $i=2, \dots, n-1$ ), входящих в (1.5), крайние условия (1.1) и (1.2) дают систему  $4(n-1)-2$  линейных алгебраических уравнений

$$\Delta_{zi}(\beta, 1) = \Delta_{z(i+1)}(\beta, 1), \quad \Delta_{\tau i}(\beta, 1) = \Delta_{\tau(i+1)}(\beta, 1), \quad \Delta_{z1}(\beta, 0) = \Delta_{z2}(\beta, 0) \\ \Delta_{\tau 1}(\beta, 0) = \Delta_{\tau 2}(\beta, 0) \quad (1.7)$$

$$\mu_{i+1} \Delta_{wi}(\beta, 1) = \mu_i \Delta_{w(i+1)}(\beta, 1), \quad \mu_{i+1} \Delta_{ui}(\beta, 1) = \mu_i \Delta_{u(i+1)}(\beta, 1)$$

а смешанные граничные условия (1.3) приводят к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^{\infty} \beta \Delta_{z1}(\beta, 0) J_0(\rho\beta) d\beta = \sigma^0(a\rho), \quad \int_0^{\infty} \beta \Delta_{\tau 1}(\beta, 0) J_1(\rho\beta) d\beta = \tau^0(a\rho) \quad (0 \leq \rho < 1)$$

$$\int_0^{\infty} [\mu_1 \Delta_{w2}(\beta, 0) - \mu_2 \Delta_{w1}(\beta, 0)] J_0(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (1.8)$$

$$\int_0^{\infty} [\mu_1 \Delta_{u2}(\beta, 0) - \mu_2 \Delta_{u1}(\beta, 0)] J_1(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho > 1)$$

При решении уравнений (1.8) удобно ввести новые неизвестные функции  $w(\beta)$  и  $u(\beta)$ , пропорциональные выражениям, стоящим под интегралами в двух последних уравнениях (1.8), и связанные с разностью осевых и радиальных смещений поверхностей трещины соотношениями

$$\delta_z(\rho) = G[u_{z2}(\rho, +0) - u_{z1}(\rho, -0)] = \int_0^{\infty} w(\rho) J_0(\rho\beta) d\beta \quad (1.9)$$

$$\delta_r(\rho) = G[u_{r_2}(\rho, +0) - u_{r_1}(\rho, -0)] = \int_0^{\infty} u(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (1.10)$$

$$G = \mu_1 \mu_2 [\mu_1(1 + \kappa_2) + \mu_2(1 + \kappa_1)] [a(\mu_1 + \kappa_1 \mu_2)(\mu_2 + \kappa_2 \mu_1)]^{-1}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i \quad (1.11)$$

Используя уравнения (1.7), можно выразить все неизвестные функции параметра  $\beta$  через  $w(\beta)$  и  $u(\beta)$ . При этом парные интегральные уравнения (1.8) примут следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \beta [w + \gamma u + f_{11}(\beta)w + f_{12}(\beta)u] J_0(\rho\beta) d\beta = -\sigma^0(\rho)$$

$$\int_0^{\infty} \beta [\gamma w + u + f_{21}(\beta)w + f_{22}(\beta)u] J_1(\rho\beta) d\beta = -\tau^0(\rho) \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (1.12)$$

$$\int_0^{\infty} w(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^{\infty} u(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (\rho > 1)$$

$$\gamma = 1/2 [-\mu_2(1 - 2\nu_1) + \mu_1(1 - 2\nu_2)] [\mu_1(1 - \nu_2) + \mu_2(1 - \nu_1)]^{-1} \quad (1.13)$$

Функции  $f_{ij}(\beta)$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений (1.7), в общем случае численно [10]. Можно показать, что

$$f_{ij}(\beta) = O[\exp(-2\lambda\beta)] \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad f_{12}(\beta) = f_{21}(\beta) \quad (1.14)$$

Второе соотношение является следствием теоремы взаимности Бетти.

Приведем явные выражения  $f_{ij}(\beta)$  для случая трещины, расположенной на границе полупространства 1 и слоя 2, вторая грань которого скреплена с полупространством 3 (для этого случая в п. 4 приводятся численные результаты)

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^2 a_{is}(y) b_{sj}(y) - d_{ij}, \quad d_{11} = d_{22} = 1, \quad d_{12} = d_{21} = \gamma \quad (1.15)$$

$$a_{1,21}(y) = 1 + (1 \pm y)N, \quad a_{1,22}(y) = \kappa_1 - 2 \pm 1 \pm L + y_1(1 \pm y)N$$

$$b_{11,2}(y) = [\alpha_2 \mp \alpha_1(\kappa_1 - 2) + \alpha_3 L + y_1(\alpha_3 y \mp \alpha_4)N] D^{-1}(y), \quad b_{21,2}(y) = [\pm \alpha_1 + (\alpha_3 y \mp \alpha_4)N] D^{-1}(y)$$

$$y = 2\lambda\beta, \quad N = N(y) = (\mu_3 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3 \kappa_2)^{-1} e^{-y} \quad (1.16)$$

$$L = L(y) = (\mu_3 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_3)(\mu_3 + \mu_2 \kappa_3)^{-1} e^{-y} \quad y_1 = y + \kappa_2 - 2$$

$$D(y) = (\alpha_1 + \alpha_2) [(1 + \alpha_4 N / \alpha_1)(1 + \alpha_3 L / \alpha_2) + \alpha_3 y^2 L / \alpha_2]$$

$$\alpha_1 = \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad \alpha_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad \alpha_3 = \mu_2 - \mu_1, \quad \alpha_4 = \mu_2 \kappa_1 - \mu_1 \kappa_2$$

**2. Сведение системы парных интегральных уравнений к сингулярному интегральному уравнению.** Решение системы (1.12) будет разыскиваться в виде следующих интегральных представлений:

$$w(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin \beta t dt, \quad u(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(t) \cos \beta t dt \quad (2.1)$$

где новые искомые функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  предполагаются гладкими внутри отрезка  $[-1, 1]$  и обладающими симметрией

$$\varphi(-t) = -\varphi(t), \quad \psi(-t) = \psi(t) \quad (2.2)$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче нельзя считать функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  гладкими во всей области определения, как это делается в известном методе сведения парных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма второго рода, предложенном Н. Н. Лебедевым и Я. С. Уфляндом [11]. Требование гладкости  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  при  $t=\pm 1$  равносильно предположению о корневой особенности напряжений у края трещины ( $\sigma_z \sim (r-a)^{-1/2}$ ,  $\tau_{rz} \sim (r-a)^{-1/2}$ ) и неприменимо в случае трещины на границе различных упругих сред, где особенность решения иная [12]:

$$\sigma_z + i\tau_{rz} \sim (r-a)^{-1/2} \exp [i\omega \ln (r/a-1)]$$

Асимптотика решения у края трещины определяется главной (т. е. без экспоненциально убывающих членов с множителями  $f_{ij}(\beta)$ ) частью системы парных интегральных уравнений (1.12). Система (1.12) отличается от рассмотренных в [11] наличием в ее главной части перекрестных членов, связанных коэффициентом  $\gamma$ .

При помощи известных соотношений

$$\int_0^{\infty} \sin \beta t J_0(\rho\beta) d\beta = 0 \quad (t < \rho) \quad (2.3)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \beta t J_0(\rho\beta) d\beta = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad (t > \rho)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \beta t J_1(\rho\beta) d\beta = \frac{1}{\rho} \quad (t < \rho)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \beta t J_1(\rho\beta) d\beta = \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}(t + \sqrt{t^2 - \rho^2})} \quad (t > \rho)$$

легко убедиться, что представления (2.1) тождественно удовлетворяют двум последним уравнениям системы (1.12), если на функцию  $\psi(t)$  наложить дополнительное условие

$$\int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

Удобно проинтегрировать по  $\rho$  два первых уравнения системы (1.12). При этом получаются следующие уравнения:

$$\int_0^{\infty} [w + \gamma u + f_{11}(\beta)w + f_{12}(\beta)u] J_1(\rho\beta) d\beta = -\rho^{-1} \int_0^{\rho} s\sigma^{\circ}(as) ds \quad (2.5)$$

$$\int_0^{\infty} [\gamma w + u + f_{21}(\beta)w + f_{22}(\beta)u] J_0(\rho\beta) d\beta = c + \int_0^{\rho} \tau^{\circ}(as) ds \quad (0 \leq \rho < 1)$$

Здесь  $c$  — неизвестная постоянная интегрирования (определяемая в дальнейшем из условия (2.4)). Подставив (2.1) в уравнения (2.5) с учетом формул

$$J_0(\rho\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\rho\beta \sin \theta) d\theta, \quad J_1(\rho\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin(\rho\beta \sin \theta) d\theta \quad (2.6)$$

приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \sin(\rho\beta \sin \theta) \left\{ [1+f_{11}(\beta)] \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin \beta t dt + \right. \\ & \left. + [\gamma+f_{12}(\beta)] \int_{-1}^1 \psi(t) \cos \beta t dt \right\} d\beta = -\rho^{-1} \int_0^1 s \sigma^\circ(as) ds \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \cos(\rho\beta \sin \theta) \left\{ [\gamma+f_{21}(\beta)] \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin \beta t dt + \right. \\ & \left. + [1+f_{22}(\beta)] \int_{-1}^1 \psi(t) \cos \beta t dt \right\} d\beta = c + \int_0^1 \tau^\circ(as) ds \quad (0 \leq \rho < 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Изменяя в последних уравнениях порядок интегрирования и учитывая симметрию искомых функций (2.2), можно преобразовать их к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \sin \beta \left\{ \varphi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 K_{11}(t-x) \varphi(t) dt - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 K_{12}(t-x) \psi(t) dt \right\} d\theta = -\rho^{-1} \int_0^1 s \sigma^\circ(as) ds \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \left\{ \psi(x) + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 K_{21}(t-x) \varphi(t) dt + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 K_{22}(t-x) \psi(t) dt \right\} d\theta = c + \int_0^1 \tau^\circ(as) ds \quad (0 \leq \rho < 1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$x = \rho \sin \theta, \quad K_{11}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{11}(\beta) \cos \beta t d\beta$$

$$K_{12}(t) = K_{21}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{12}(\beta) \sin \beta t d\beta, \quad K_{22}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_{22}(\beta) \cos \beta t d\beta$$

Принципиальным моментом следует считать появление в уравнениях (2.8) сингулярных интегралов

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \beta x d\beta \int_{-1}^1 \psi(t) \cos \beta t dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} \\ I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \beta x d\beta \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin \beta t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Докажем, например, первое из соотношений (2.10). Действительно, с учетом четности  $\psi(t)$ , имеем

$$I_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\beta} \sin \beta x d\beta \int_{-1}^1 \psi(t) \cos \beta t dt = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)(t-x) dt}{\alpha^2 + (t-x)^2} \quad (2.11)$$

Разбивая отрезок интегрирования на три части:  $-1 \leq t \leq x - \sqrt{\alpha}$ ,  $x - \sqrt{\alpha} < t < x + \sqrt{\alpha}$ ,  $x + \sqrt{\alpha} \leq t \leq 1$  и замечая, что при  $-1 < x < 1$  интеграл

$$\int_{x - \sqrt{\alpha}}^{x + \sqrt{\alpha}} \frac{\psi(t)(t-x) dt}{\alpha^2 + (t-x)^2} = \int_{x - \sqrt{\alpha}}^{x + \sqrt{\alpha}} [\psi(t) - \psi(x)] \frac{(t-x) dt}{\alpha^2 + (t-x)^2}$$

в силу предположения о гладкости искомых функций внутри отрезка  $[-1, 1]$  стремится к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ , получаем

$$I_1 = - \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^{x - \sqrt{\alpha}} \frac{\psi(t)(t-x) dt}{\alpha^2 + (t-x)^2} + \int_{x + \sqrt{\alpha}}^1 \frac{\psi(t)(t-x) dt}{\alpha^2 + (t-x)^2} = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} \quad (2.12)$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Используя обращение уравнения Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} F(\rho \sin \theta) d\theta = f(\rho) \leftrightarrow F(x) = \frac{2}{\pi} \left[ f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin \theta) d\theta \right] \quad (2.13)$$

из (2.8) можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 \varphi(t) K_{11}(t-x) dt - \\ - \int_{-1}^1 \psi(t) K_{12}(t-x) dt = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin \theta \sigma^\circ(ax \sin \theta) d\theta \\ \psi(x) + \frac{\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 \varphi(t) K_{21}(t-x) dt + \int_{-1}^1 \psi(t) K_{22}(t-x) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \left[ c + \int_0^{\pi/2} x \tau^\circ(ax \sin \theta) d\theta \right] \quad (0 \leq x < 1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Замечая, что согласно (2.2) и (2.9) выражения, стоящие в левых частях (2.14), в первом уравнении нечетны, а во втором четны по  $x$ , можно распространить уравнения (2.14) на весь интервал  $-1 < x < 1$  и после введения комплексной искомой функции

$$f(t) = \psi(t) + i\varphi(t) \quad (2.15)$$

получить следующее комплексное уравнение:

$$f(x) + \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x} + \int_{-1}^1 [K(t-x)f(t) + K'(t-x)\overline{f(t)}] dt = Q(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (2.16)$$

$$Q(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ c + x \int_0^{\pi/2} [\tau^\circ(ax \sin \theta) - i \sin \theta \sigma^\circ(ax \sin \theta)] d\theta \right\}, \quad Q(-x) = \overline{Q(x)} \quad (2.17)$$

$$K(t) = {}^{1/2}[K_{11}(t) + K_{22}(t)] - iK_{12}(t), \quad K'(t) = {}^{1/2}[K_{22}(t) - K_{11}(t)] \quad (2.18)$$

Если  $\gamma = 0$  (например, при  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ), то уравнение (2.16) переходит в систему уравнений Фредгольма второго рода относительно функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ . В общем случае (2.16) представляет собой сингулярное интегральное уравнение относительно комплексной функции (2.15).

**3. Сведение сингулярного интегрального уравнения к уравнению Фредгольма второго рода.** Рассмотрим частный случай, когда трещина лежит в плоскости соединения двух полупространств ( $\lambda = h/a \rightarrow \infty$ ). При этом в уравнении (2.16) исчезают регулярные члены, и оно принимает вид

$$f(x) + \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 f(t) \frac{dt}{t-x} = Q(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3.1)$$

В предположении кусочной непрерывности  $\sigma^\circ(r)$  и  $\tau^\circ(r)$  уравнение (3.1) имеет решение [13]

$$f(x) = \frac{1}{1-\gamma^2} \left[ Q(x) - \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{Q(t) dt}{Z(t)(t-x)} \right] \quad (3.2)$$

$$Z(t) = \sqrt{1-\gamma^2} (1-t)^{i\omega} (1+t)^{-i\omega} \quad (3.3)$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2} \quad (3.4)$$

С учетом соотношений

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(t) dt}{Z(t)(t-x)} = \int_{-1}^1 \frac{Q(t) - Q(x)}{Z(t)(t-x)} dt + Q(x) \int_{-1}^1 \frac{dt}{Z(t)(t-x)}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{Z(t)(t-x)} = \frac{\pi i}{\gamma} \left[ -1 + \frac{1}{Z(x)} \right]$$

решение (3.2) переписывается в виде

$$f(x) = Z(x) F_*(x), \quad F_*(x) = \frac{1}{1-\gamma^2} \left[ Q(x) - \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{Q(t) - Q(x)}{Z(t)(t-x)} dt \right] \quad (3.5)$$

где, как легко показать, функция  $F_*(x)$  принадлежит к классу  $H[-1, 1]$ .

Формула (3.5) содержит неизвестную постоянную  $c$ , входящую в выражение  $Q(x)$  (2.17). Значение  $c$  определяется условием (2.4). Обозначая через  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  решения (3.5), которые получены, если в выражении  $Q(x)$  (2.17) положить  $c=0$  и  $c=1$ ,  $\sigma^\circ(r) = \tau^\circ(r) = 0$  соответственно, находим, что  $f(t) = f_1(t) + cf_2(t)$  удовлетворяет условию (2.4) при

$$c = - \int_{-1}^1 f_1(t) dt \left( \int_{-1}^1 f_2(t) dt \right)^{-1} \quad (3.6)$$

В качестве примера приведем решение задачи при

$$\sigma^{\circ}(r) = -p_0, \quad \tau^{\circ}(r) = 0 \quad (0 \leq r < a) \quad (3.7)$$

Учитывая выражение (2.17) для  $Q(x)$  и вычисляя методом теории вычетов интеграл в (3.5), получим

$$f(x) = 2/\pi Z(x) [c + ixp_0 - 2\omega p_0] (1 - \gamma^2)^{-1} \quad (3.8)$$

Из условия (3.6) найдем  $c = \omega p_0$  и окончательно

$$f(x) = 2/\pi p_0 Z(x) (-\omega + ix) (1 - \gamma^2)^{-1} \quad (3.9)$$

В общем случае уравнение (2.16) регуляризуется по Карлеману — Векуа [13] с помощью полученного выше решения (3.5). Будем временно рассматривать регулярную часть уравнения (2.16)

$$G(x) = \int_{-1}^1 [K(t-x)f(t) + K'(t-x)\overline{f(t)}] dt \quad (3.10)$$

как известную функцию. Тогда, учитывая обращение (3.5), получим

$$(3.11)$$

$$f(x) + \frac{Z(x)}{1 - \gamma^2} \left[ G(x) - \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{G(\tau) - G(x)}{Z(\tau)(\tau - x)} d\tau \right] = Z(x) F_*(x) \quad (-1 < x < 1)$$

Здесь  $F_*(x)$  определяется формулой (3.5). В уравнении (3.11) удобно ввести новую искомую функцию  $F(t)$ , не имеющую особенностей на концах отрезка  $[-1, 1]$

$$F(t) = \Psi(t) + i\Phi(t), \quad f(t) = Z(t)F(t), \quad F(-t) = \overline{F(t)} \quad (3.12)$$

С учетом (3.12) уравнение (3.11) после перемены порядка интегрирования сведется к следующему:

$$F(x) + \frac{1}{(1 - \gamma^2)} \int_{-1}^1 [F(t)N(t, x) + \overline{F(t)}N'(t, x)] dt = F_*(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3.13)$$

$$N(t, x) = Z(t) \left[ K(t-x) + \frac{i\gamma}{\pi(1 - \gamma^2)} \int_{-1}^1 \frac{K(t-\tau) - K(t-x)}{\tau - x} \overline{Z(\tau)} d\tau \right]$$

$$N'(t, x) = \overline{Z(t)} \left[ K'(t-x) + \frac{i\gamma}{\pi(1 - \gamma^2)} \int_{-1}^1 \frac{K'(t-\tau) - K'(t-x)}{\tau - x} \overline{Z(\tau)} d\tau \right] \quad (3.14)$$

Комплексное уравнение (3.13) представляет собой систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно искомых функций  $\Psi(t)$  и  $\Phi(t)$ .

Входящая в правую часть уравнения (3.13) постоянная  $c$  определяется, как и выше, из условия (2.4).

Поскольку искомые функции обладают симметрией (3.12) от уравнений (3.13), можно перейти к системе уравнений Фредгольма на отрезке  $0 \leq x < 1$  (целесообразность такого перехода определяется применяемым методом численного решения). Соответствующие уравнения получаются очевидным образом из (3.13) и поэтому здесь не приводятся.

Определим раскрытые трещины, т. е. разность смещений ее поверхностей. Подставляя выражения (2.1) в равенства (1.9) и (1.10), используя формулы (2.3) и учитывая условие (2.4), получим



$$\delta_z(\rho) = \int_{\rho}^1 \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \quad \delta_r(\rho) = -\frac{1}{\rho} \int_{\rho}^1 \frac{t\psi(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad (3.15)$$

Из равенств (3.15) следует, что при  $\rho \rightarrow 1-0$

$$-\delta_r + i\delta_z = \int_{\rho}^1 \frac{Z(t)F(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} + O[(1-\rho)^{3/2}] \quad (3.16)$$

Отсюда, с помощью подстановки  $\tau = (t-\rho)/(1-\rho)$  можно получить следующее асимптотическое выражение для раскрытия трещины у ее края:

$$\delta_z + i\delta_r = -i \left[ \sqrt{1-\gamma^2} F(1) \int_0^1 (1-\tau)^{i\omega} \tau^{-1/2} d\tau \right] \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^{1/2+i\omega} + O[(1-\rho)^{3/2}] \quad (3.17)$$

Исследуем асимптотику напряжений у края трещины. Для этого заметим, что как при  $\rho < 1$ , так и при  $\rho > 1$  напряжения в плоскости трещины определяются выражениями, стоящими в левых частях двух первых уравнений системы (1.12). Поскольку в этих выражениях члены, содержащие экспоненциально убывающие множители  $f_{ij}(\beta)$ , не влияют на особенности напряжений у края трещины, то при  $\rho \rightarrow 1+0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{z1}(\rho, 0) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \int_0^{\infty} [w(\beta) + \gamma u(\beta)] J_1(\rho\beta) d\beta \right\} \\ \tau_{rz1}(\rho, 0) &= \frac{d}{d\rho} \int_0^{\infty} [\gamma w(\beta) + u(\beta)] J_0(\rho\beta) d\beta \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подставив (2.1) в (3.18), после перемены порядка интегрирования и некоторых преобразований, можно получить для напряжений в плоскости трещины у ее края следующее выражение:

$$\sigma_z(\rho) + i\tau_{rz}(\rho) = (N_1 + iN_2) a^{-1/2} (\rho-1)^{-1/2+i\omega} (\rho+1)^{-1/2-i\omega} + O(1) \quad (3.19)$$

где коэффициенты интенсивности напряжений определяются формулой

$$\begin{aligned} N_1 + iN_2 &= -ia^{1/2} (1-\gamma^2) \left( \frac{1}{2} + i\omega \right) F(1) \int_0^1 \xi^{i\omega} (1-\xi)^{-1/2} d\xi = \\ &= -i(1-\gamma^2) \sqrt{\pi a} \frac{\Gamma(1+i\omega)}{\Gamma(1/2+i\omega)} F(1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Согласно результатам работы [14] изменение упругой энергии тела  $W$  при увеличении площади трещины на единицу связано с коэффициентами интенсивности формулой

$$T = \frac{\delta W}{\delta s} = \frac{\delta W}{2\pi a da} = \frac{\pi(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1)(\mu_2 + \mu_1 \kappa_2)}{4\mu_1 \mu_2 [\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)]} (N_1^2 + N_2^2) \quad (3.21)$$

Если учесть, что

$$N_1^2 + N_2^2 = \pi(1-\gamma^2) |F(1)|^2 \left[ \frac{\Gamma(1+i\omega)}{\Gamma(1/2+i\omega)} \right]^2 a$$

и воспользоваться известными соотношениями

$$|\Gamma(1+i\omega)|^2 = \pi\omega / \operatorname{sh} \pi\omega, \quad |\Gamma(1/2+i\omega)|^2 = \pi / \operatorname{ch} \pi\omega$$

то, подставляя значения постоянных (1.13) и (3.4), получим

$$T = \pi^2 \frac{(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1)(\mu_2 + \mu_1 \kappa_2) \omega a}{8\mu_1 \mu_2 [\mu_2(1-2\nu_1) - \mu_1(1-2\nu_2)]} |(1-\gamma^2)F(1)|^2 \quad (3.22)$$

В предельном случае трещины, расположенные в плоскости соединения двух полупространств, на поверхности которой действует постоянное нормальное напряжение (3.7), после подстановки решения (3.9) в формулу (3.20), найдем

$$N_1 + iN_2 = 2\sqrt{\pi} p_0 \sqrt{a} \Gamma(2+i\omega) / \Gamma(1/2+i\omega) \quad (3.23)$$

что совпадает с выражением, полученным в [15].

Поскольку согласно (3.4)  $\omega$  мало ( $\omega \ll 0.1$ ), можно, разлагая выражение (3.23) в ряд по  $\omega$ , получить следующие удобные для использования формулы:

$$N_1 = \frac{2}{\pi} p_0 \left\{ 1 - \left[ 2 \ln 2 (1 + \ln 2) - \frac{\pi^2}{6} \right] \omega^2 + O(\omega^4) \right\} \approx \frac{2}{\pi} p_0 (1 - 0.7023 \omega^2)$$

$$N_2 = \frac{2}{\pi} p_0 \{ (1 + 2 \ln 2) \omega + O(\omega^3) \} \approx 1.5191 \omega p_0 \quad (3.24)$$

Подстановка решения (3.9) в равенство (3.22) дает следующее выражение удельного изменения упругой энергии:

$$T = \frac{(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1)(\mu_2 + \mu_1 \kappa_2) \omega (1 + \omega^2)}{2\mu_1 \mu_2 [\mu_2(1-2\nu_1) - \mu_1(1-2\nu_2)]} p_0^2 a \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) совпадает с результатом работ [1, 4], где для определения упругой энергии непосредственно вычислялась работа сил, раскрывающих трещину, на перемещениях ее граней.

**4. Обсуждение результатов.** При численном решении задачи интегралы в системе уравнений Фредгольма (3.13) заменялись квадратурными суммами и таким образом получалась система линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций  $\Psi(t)$  и  $\Phi(t)$  в узлах интегрирования, порядок которой определяется числом узлов  $n$ .

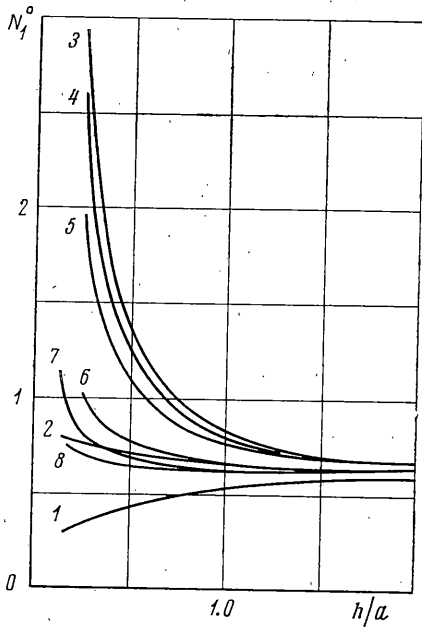
Точность вычислений зависит от величины  $h/a$  и не ниже 1% для  $h/a \geq 0.25$  при числе узлов  $n=18$  и для  $h/a \geq 0.5$  при  $n=10$ .

В качестве примера рассматривается случай, когда на гранях трещины действует постоянная нормальная нагрузка (3.7).

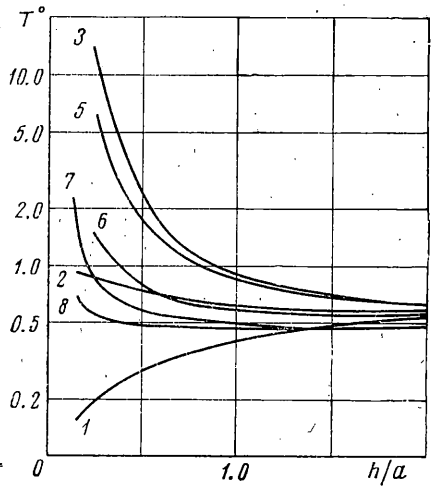
Результаты расчетов для нескольких характерных соотношений между упругими постоянными материалов представлены на фиг. 2-4, где отложены безразмерные значения коэффициентов интенсивности  $N_1^\circ = N_1 p_0^{-1} a^{-1/2}$ ,  $N_2^\circ = N_2 p_0^{-1} a^{-1/2}$  и удельного изменения упругой энергии  $T^\circ = TE_1 E_2 / p_0^2 a (E_1 + E_2)$  в зависимости от толщины слоя  $h/a$ .

В таблице приведены соответствующие значения упругих постоянных, параметра  $\omega$ , а также предельные (при  $h/a \rightarrow \infty$ ) значения  $N_{1\infty}^\circ$ ,  $N_{2\infty}^\circ$  и  $T_\infty^\circ$  (соответствующие трещине на границе полупространств 1 и 2).

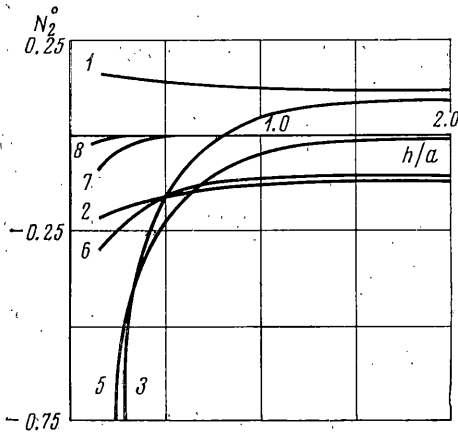
Влияние толщины слоя заметно лишь при  $h \leq a$  и в зависимости от соотношений между упругими постоянными приводит к разнообразным эффектам. Кривые 3-8 (фиг. 2-4) относятся к случаю, когда граница слоя  $z=h$  свободна от напряжений. Если  $E_1/E_2 > 1$  (кривые 3-4), коэффициенты интенсивности и величина  $T$  при приближении к границе возрастают сильнее, а если  $E_1/E_2 < 1$  (кривые 6-8) — слабее, чем в случае трещины в однородном полупространстве (кривая 5). Это согласуется с физическими соображениями.



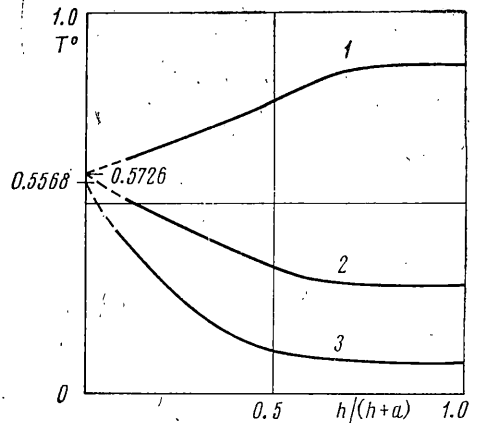
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



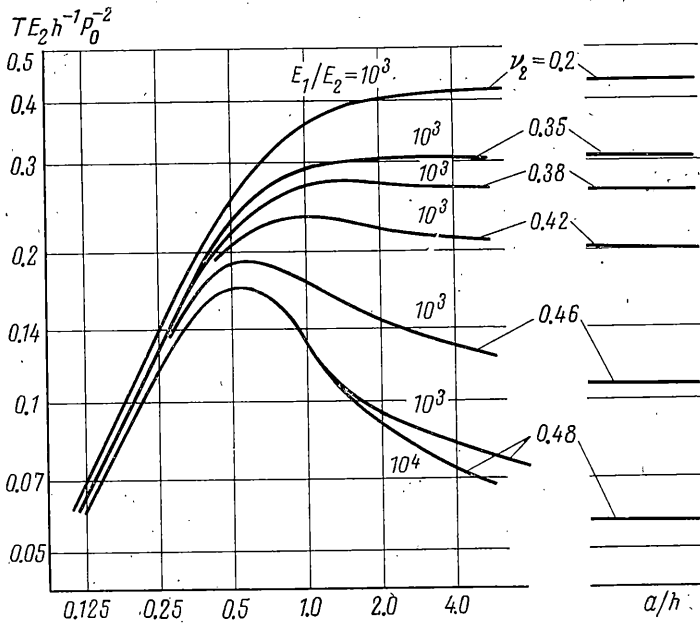
Фиг. 5

Отметим, что полученные ранее в работе [6] численные результаты, относящиеся к значениям параметров, указанных в таблице под № 3 и 6, неточны. Результаты [6] неверны уже в предельном случае трещины на границе двух полупространств, в котором имеется точное решение.

Когда упругие постоянные сред 1 и 2 одинаковы, частным случаем решенной задачи является задача о дискообразной трещине, расположенной параллельно границе соединения двух упругих полупространств 1 и 3 (задача (a)). При неограниченном приближении трещины к границе решение задачи (a) не совпадает в пределе с решением задачи о трещине, лежащей в плоскости соединения полупространств 1 и 3 (задача (b)), поскольку различно асимптотическое поведение решений у края трещины. Но, как известно, изменение упругой энергии при увеличении трещины  $\delta W = 1/2 \delta A$ , где  $A$  — работа заданных нагрузок на смещениях краев трещины. Смещения краев трещины в задаче (a) при  $h/a \rightarrow 0$  стремятся к соответствующим смещениям в задаче (b). Отсюда следует, что при  $h/a \rightarrow 0$  значение  $T_a$  должно в пределе переходить в  $T_b$ . Это показано на фиг. 5, где приведены зависимости  $T_a$   $E_1 E_3 / \rho_0^2 a (E_1 + E_3)$  от  $h/a$  и предельные значения  $T_b$   $E_1 E_3 / \rho_0^2 a (E_1 + E_3)$  (3.25) (кривая 1 соответствует случаю  $E_1 : E_3 = 1 : 3$ ,  $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$ , 2 —  $E_1 : E_3 = 3 : 1$ ,  $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$ , 3 —  $E_1 : E_3 = 10 : 1$ ,  $\nu_1 = 0.5$ ,  $\nu_3 = 0.2$ ).

	$E_1:E_2:E_3$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\omega$	$N_{1\infty}^0$	$N_{2\infty}^0$	$T_{\infty}^0$
1	10:10:10	0.3	0.3	0.3	0.0758	0.6340	0.1152	0.5612
2	1:10:1	0.3	0.3	0.3	-0.0758	0.6340	-0.1152	0.5612
3	1000:45:0	0.3	0.35	—	0.0671	0.6346	0.1019	0.5457
4	3:1:0	0.3	0.3	—	0.0458	0.6357	0.0696	0.5726
5	1:1:0	0.3	0.3	—	0	0.6366	0	0.6366
6	45:1000:0	0.35	0.3	—	-0.0671	0.6346	-0.1019	0.5457
7	1:100:0	0.5	0.3	—	-0.00109	0.6356	-0.0017	0.4785
8	1:1000:0	0.5	0.3	—	-0.00011	0.6366	-0.00617	0.4776

Особо следует выделить случаи, когда  $E_1, E_3 \gg E_2$ . На фиг. 6 показано изменение величины  $T(E_2/p_0^2 h)$  в зависимости от длины трещины (для определенности везде положено  $E_1 = E_3, \nu_1 = \nu_3 = 0.3$ ). При  $a/h \ll 1$  величина  $T$  линейно возрастает с ростом  $a$ . При увеличении размеров трещины поведение  $T(a)$  существенно зависит от коэффициента Пуассона  $\nu_2$ . Как



Фиг. 6

видно из фиг. 6, если  $\nu_2 \geq 0.35$ , кривые имеют максимум при  $a \sim h$ , и при дальнейшем увеличении  $a$ , убывая, стремятся выйти на стационарный уровень. Если  $\nu_2 \leq 0.35$ , величина  $T$ , монотонно возрастая, также стремится к постоянному значению для  $a/h \gg 1$ .

Известно, что при однородном растяжении на бесконечности (как в случае, когда трещина находится в неограниченном теле, так и для трещины, расположенной на границе соединения двух полупространств) удельное изменение упругой энергии  $T$  линейно возрастает с ростом трещины, и трещина развивается неустойчиво, т. е. при постоянных нагрузках, однажды начавшая расти, трещина будет увеличиваться до полного разрушения тела. Наличие при  $\nu_2 \geq 0.35$  участков убывания  $T$  (фиг. 6) означает, что в этой области изменения размеров трещины возможно устойчивое ее развитие при однородном растяжении на бесконечности.

Изложенные результаты поясняются следующими качественными соображениями. Допустим, что слой скреплен с двумя жесткими основаниями, и на одной из граничных плоскостей слоя имеется трещина радиуса  $a$  (т. е. область отставания слоя от основания). Пусть на поверхности трещины действует нагрузка (3.7).

При  $h \ll a$  в круге  $r \ll a - b$ , где  $b \sim h$  деформацию слоя можно считать одноосной и полагать раскрытие трещины  $u_z(r)$  равным смещению под действием равномерной нагрузки  $p_0$  грани слоя, скрепленного с жестким основанием

$$u_z(r) = u_z^\circ = (1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2)hp_0[E_2(1 - \nu_2)]^{-1} \quad (4.1)$$

Работа  $A$ , совершенная нагрузкой  $p_0$  при раскрытии трещины, при этом равна

$$A = p_0 \int_0^a 2\pi r u_z(r) dr = \pi a^2 p_0 u_z^\circ + p_0 \int_{a-b}^a 2\pi r [u_z(r) - u_z^\circ] dr \quad (4.2)$$

Поскольку, как известно, для упругого тела  $\delta W = 1/2 \delta A$ , то

$$T = \frac{\delta W}{\delta s} = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{(1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2)}{2E_2(1 - \nu_2)} p_0 a^2 + O\left(\frac{h}{a}\right) \quad (4.3)$$

Первый член в (4.3) представляет стационарное значение  $T$ , достигаемое при  $a/h \gg 1$ .

Чтобы определить характер приближения  $T$  к асимптотическому значению (4.3), нужно учесть в (4.2) член

$$p_0 \int_{a-b}^a 2\pi r [u_z(r) - u_z^\circ] dr \quad (4.4)$$

При малых  $\nu_2$  существенно уменьшение раскрытия трещины в концевой области по сравнению с (4.1) из-за смыкания ее берегов, что приведет к уменьшению работы  $A$ . Следовательно,  $T$  будет приближаться к предельному значению (4.3) снизу. Но при  $\nu_2$ , большем некоторого  $\nu_{cr}$  из-за стеснения боковых деформаций, раскрытие трещины  $u_z^\circ$  во внутренней области станет меньше раскрытия трещины вблизи контура (при  $\nu_2 \rightarrow 0.5$ ,  $u_z^\circ \rightarrow 0$ ) и слагаемое (4.4) будет положительным. Отсюда следует, что при  $\nu_2 > \nu_{cr}$  величина  $T$  будет стремиться к пределу (4.3), убывая. Если  $\nu_2 \rightarrow 0.5$ , первый член в выражении (4.3) исчезает, при этом  $T$  будет убывать как  $a^{-1}$ .

Приведенные качественные соображения согласуются с результатами численного решения, что видно из фиг. 6, где в правой части отложены предельные значения (4.3).

Выше предполагалось, что слой скреплен с абсолютно жесткими основаниями. Приведенные рассуждения останутся в силе и при конечных отношениях  $E_1/E_2$  и  $E_3/E_2$ , если смещения границ обоих полупространств будут малы по сравнению с раскрытием трещины (4.1), вызванным деформацией слоя. При этом не изменится работа (4.2), и соотношение (4.3) сохранит прежний вид. Считая  $E_3 \gg E_1$ , оценим смещение  $u_{z1}(\rho)$  границы полупространства 1. Оно, очевидно, меньше, чем смещение  $u_{z1}(\rho)$ , рассчитанное в предположении, что внутри круга  $0 \leq r < a$  на полупространство 1 действует нагрузка  $p_0$ , а остальная часть границы полупространства свободна от напряжений

$$u_z(\rho) = 2(1 - \nu_1^2)E_1^{-1}p_0aF(1/2, -1/2, 1, \rho^2) \sim 2(1 - \nu_1^2)E_1^{-1}p_0a \quad (4.5)$$

Требование малости смещений (4.5) по сравнению с величиной (4.1) приводит к условию  $\dot{a}/a_* \ll 1$ , где характерный размер, возникающий в задаче

$$a_* = h[E_1(1-2\nu_2)(1+\nu_2)] / [2E_2(1-\nu_2)(1-\nu_1^2)] \quad (4.6)$$

В другом предельном случае  $a/a_* \gg 1$  можно пренебречь деформацией слоя по сравнению со смещениями границ полупространств и определять величину  $T$  по формуле (3.23), считая, что трещина расположена непосредственно на границе соединения полупространств 1 и 3.

Таким образом, если  $h/a_* \ll 1$ , то при  $a \ll h$  удельное изменение упругой энергии  $T \sim a$ , затем при  $h \ll a \ll a_*$   $T$  принимает стационарное значение (4.3) и, наконец, при  $a \gg a_*$  вновь линейно возрастает. Если  $\nu_2 \ll 0.35$ ,  $T(a)$  изменяется монотонно, а если  $\nu_2 \geq 0.35$ ,  $T(a)$  проходит в области  $a \sim h$  через максимум и имеет участок убывания.

Авторы благодарят В. М. Ентова за внимание к работе.

Поступила 4 X 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса — Снеддона на случай неоднородного тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
2. Keer L. M. Mixed boundary-value problems for an elastic half-space. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1967, vol. 63, No. 4.
3. Bregman A. M., Kassir M. K. Thermal fracture of bonded dissimilar media containing a penny-shaped crack. Internat. J. Fracture, 1974, vol. 10, No. 1.
4. Lowengrub M., Sneddon I. N. The effect of internal pressure on a penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar elastic half-spaces. Internat. J. Engng Sci., 1974, vol. 12, No. 5.
5. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4.
6. Erdogan F., Arin K. Penny-shaped interface crack between an elastic layer and a half space. Internat. J. Engng Sci., 1972, vol. 10, No. 2.
7. Bennet S. J., Devries K. L., Williams M. L. Adhesive fracture mechanics. Internat. J. Fracture, 1974, vol. 10, No. 1.
8. Malyshev B. M., Salganik R. L. The strength of adhesive joints using the theory of cracks. Internat. J. Fracture Mech., 1965, vol. 1, No. 2.
9. Williams M. L. Stress singularities, adhesion and fracture. Proc. 5th U. S. National Congress of Appl. Mech. New York, ASME, 1966.
10. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1970.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
12. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismol. Soc. America, 1959, vol. 49, No. 2, p. 199—204.
13. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
14. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел. ПММ. 1963, т. 27, вып. 5.
15. Kassir M. K., Bregman A. M. The stress intensity factor for a penny-shaped crack between two dissimilar materials. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 1.