МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1976

УДК 531.36

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМ ПРИ ПОМЕХЕ В ИСПОЛНИТЕЛЬНОМ ОРГАНЕ

А. С. БРАТУСЬ

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления конечным состоянием системы в случае, когда имеется погрешность в исполнении управляющего воздействия, задаваемая гауссовским белым шумом. Задачи такого типа представляют интерес в связи с исследованием и построением алгоритмов управления движущимися аппаратами и манипуляторами, так как в действительности интенсивность помех зависит от величины и значения управления. Впервые в [1] рассматривалась задача о стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляемого воздействия. В [2] изучались некоторые задачи оптимального управления с ошибками в исполнении без ограничений на управляющую силу. В [3] рассматривался класс модельных задач оптимального управления с погрешностью исполнения управляющего воздействия и интегральным ограничением на суммарный ресурс управления.

1. Пусть управляемое движение системы описывается уравнением

$$y^{\cdot\cdot}=u(t)+c|u(t)|^m\xi, \qquad y(t_0)=y_0, \qquad y^{\cdot}(t_0)=y_0^{\cdot} \tag{1.1}$$

Здесь $t\in[t_0, T]$, y — скаляр, u — управляющая функция, принимающая значения из множества задаваемого неравенством

$$|u|\leqslant R \tag{1.2}$$

ξ — гауссовский белый шум единичной интенсивности, $|u|^m$ — функция, имеющая смысл величины интенсивности возмущений, обусловленных действием управления, m — положительное число, являющееся параметром задачи, c — некоторая положительная постоянная.

Найдем управление u, удовлетворяющее ограничению (1.2) и минимизирующее в конечный момент времени $t=T$ математическое ожидание функции

$$I=F[y(T)] \tag{1.3}$$

Функция F задает некоторую меру отклонения точки от нуля при $t=T$. Предполагается, что бесконечно дифференцируемая функция F обладает следующими свойствами:

$$F(0)=\min_y F(y), \quad F(y)>0, \quad F(-y)=F(y), \quad F'(y)>0, \quad F''(y)>0 \quad (y>0) \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1), задающее движение точки по прямой под действием управляющей силы и возмущений, порожденных действием управления, может быть записано в другой форме — введением новой переменной $x=(T-t)y^{\cdot}+y$, а именно

$$x^{\cdot}=(T-t)(u+c|u|^m\xi), \qquad x(t_0)=x_0 \tag{1.5}$$

Так как $x(T)=y(T)$, то функционал (1.3) запишется в виде

$$I=F[x(T)] \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Обобщением уравнения движения (1.5) является уравнение

$$x^{\bullet}=a(t)u(t)+b(t)\,|u|^m\xi, \qquad x(t_0)=x_0 \tag{1.7}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — монотонно убывающие положительные функции времени.

2. Пусть $S(x, t)$ — минимальное значение математического ожидания функционала (1.6), которое может быть достигнуто при движении из точки x, t в задаче (1.5) с ограничением (1.2). Уравнение Беллмана — Айзенса [3, 4] для функции S имеет вид

$$S_\tau=\min_{|u|\leqslant R}\left\{\tau u S_x+\frac{1}{2}c^2\tau^2|u|^{2m}S_{xx}\right\} \tag{2.1}$$

Здесь для удобства введено обратное время $\tau=T-t$, нижние индексы у функции S означают соответствующие частные производные. В конечный момент времени $t=T$, соответствующий значению $\tau=0$, выполняется краевое условие

$$S(x,\ 0)=F(x) \tag{2.2}$$

При $x>0$ управляющая сила u должна быть направлена таким образом, чтобы обеспечить уменьшение значения x, и тем самым значения функционала $F(x)$, поэтому $u\leqslant 0$. При $x<0$ из тех же соображений вытекает, что $u\geqslant 0$.

Из физического смысла задачи следует, что чем больше начальное отклонение $|x_0|$ в (1.5), тем больше при прочих равных условиях будет конечное отклонение $|x(T)|$, поэтому, предполагая гладкость функции S и учитывая свойства симметрии (1.4), получим, что

$$\operatorname{sign} S_x=\operatorname{sign} x, \qquad S(x,\ \tau)=S(-x,\ \tau) \tag{2.3}$$

Отсюда следует краевое условие

$$S_x(0,\ \tau)=0 \tag{2.4}$$

В итоге уравнение (2.1) рассматривается в области $D=\{x,\ \tau\colon x\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0\}$ с краевыми условиями (2.2), (2.4).

Пусть $m<{}^1/_2$. Вычислим минимум выражения, стоящего в фигурных скобках в (2.1). В силу (2.3) $S_x>0$ при $x>0$, поэтому искомый минимум достигается при $u=-R$, если

$$-R\leqslant-\left[\frac{L(S)}{\tau S_x}\right]^p<0, \qquad L(S)=\frac{1}{2}c^2\tau^2S_{xx}, \qquad p=\frac{1}{1-2m} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.1) при этом имеет вид

$$S_\tau=-R\tau S_x+R^{2m}L(S) \tag{2.6}$$

Если выполняется условие

$$-\left[\frac{L(S)}{\tau S_x}\right]<-R \tag{2.7}$$

уравнение (2.1) принимает вид $S_\tau=0$.

В случае $m>{}^1/_2$ минимум выражения, стоящего в (2.1), достигается при

$$u=-\left(\frac{1}{2m}\right)^p\left[\frac{\tau S_x}{L(S)}\right]^p \tag{2.8}$$

если справедливо неравенство

$$-R<-\left(\frac{1}{2m}\right)^p\left[\frac{\tau S_x}{L(S)}\right]^p\leqslant 0 \tag{2.9}$$

Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид

$$S_\tau=\left(\frac{1}{2m}\right)^p\frac{(1-2m)}{2m}\frac{[\tau S_x]^{2mp}}{[L(S)]^p} \tag{2.10}$$

Если же выполняется неравенство

$$-\left(\frac{1}{2m}\right)^p\left[\frac{\tau S_x}{L(S)}\right]^p\leqslant -R$$

то $u=-R$, и уравнение (2.1) имеет вид (2.6).

Таким образом, исходная задача свелась к нахождению тех множеств в области D, на каждом из которых реализуется один из трех видов (2.6), (2.10) или $S_\tau=0$ уравнения (2.1). Если искомые множества найдены, то задача синтеза оптимального управления решается, так как, зная положение точки x, τ и расположение искомых множеств, можно однозначно определить величину оптимального управления u.

3. Рассмотрим случай $m<{}^1/_2$. Предположим, что для функции S выполняется неравенство (2.7), т. е. $u=0$ и уравнение Беллмана (2.1) имеет вид $S_\tau=0$. Отсюда вытекает, что решением задачи в этом случае будет функция $S=F(x)$.

Полученное значение функции Беллмана должно удовлетворять неравенству (2.7), при выполнении которого справедливо равенство $S_\tau=0$. Поэтому необходимо, чтобы

$$F'(x)<{}^1/_2c^2\tau R^{2m-1}F''(x) \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) определяет некоторую область $D_1\subset D$ значений x, τ, в которой уравнение (2.1) имеет вид $S_\tau=0$.

Область D_1 содержит множество $x=0$, так как $F'(0)=0$ и $F''(0)>0$.

В дополнении множества D_1 до D, которое обозначим через D_2, может лишь осуществиться неравенство (2.5), следовательно, $u=-R$ и уравнение (2.1) имеет вид (2.6).

Синтез оптимального управления определяется формулой

$$u(x,\tau)=\begin{cases}0\ , & (x,\tau)\in D_1\\ -R, & (x,\tau)\in D_2\end{cases} \tag{3.2}$$

где область D_1 задана неравенством (3.1), а область D_2 такова, что $D_1\cup D_2=D$.

Для того, чтобы найти решение уравнения (2.6) в области D_2, необходимо добавить к начальному условию (2.2) краевое условие

$$S(x,\ \tau)\,|_\Gamma=F(x) \tag{3.3}$$

Здесь Γ — множество значений x, τ, при которых выполняется соотношение

$$F'(x)={}^1/_2c^2\tau R^{2m-1}F''(x)$$

Второе краевое условие (2.4) относится в этом случае к уравнению $S_\tau=0$ в области D_1.

Рассмотренный случай имеет следующий смысл: если точка $(x,\ \tau)$ достаточно близка к множеству $x=0$ так, что $(x,\ \tau)\in D_1$, то ошибки в выполнении управляющих воздействий не позволяют за счет выбора управляющего воздействия $u\neq0$ улучшить положение системы в смысле критерия (1.6). Иначе, любое управление $u\neq0$ вблизи множества $x=0$ дает худший результат ввиду ошибок исполнения, чем состояние покоя при $u=0$.

В области D_2, отделенной от множества $x=0$ областью D_1, точка достаточно удалена от множества $x=0$, и в этом случае оказывается возможным улучшить положение системы, полагая $u=-R$, т. е. своему максимальному значению. Иначе, в D_2 положение точки настолько «плохо» в смысле критерия (1.6), что, несмотря на ошибки в исполнении, оказывается выгодным производить активное управление $u=-R$.

Случай $m=1/2$ можно рассматривать как предельный для $m<1/2$. Область неуправляемого движения D_1, как следует из (3.1), при $m\to 1/2-0$ задается неравенством $F'(x)<1/2c^2\tau F''(x)$. Синтез оптимального управления задается формулой (3.2). Рассмотрим случай $m>1/2$. Пусть S^1 — функция Беллмана исходной задачи с $m>1/2$. Так как интенсивность помех при $m>1/2$ больше, чем интенсивность помех при $m<1/2$, то при одних и тех же x и τ справедливо неравенство $S\leqslant S^1$. Здесь S — функция Беллмана при $m<1/2$.

Предположим, что справедливо неравенство

$$S_{xx}^1(x,\tau)>0,\qquad x\geqslant 0 \tag{3.4}$$

Если функция S^1 удовлетворяет неравенству (2.9) и, следовательно, уравнение (2.1) имеет вид (2.10), то, используя формулу (2.8), можно записать уравнение (2.10) в виде

$$S_\tau^1=(1-2m)u^{2m}L(S^1),\qquad S^1(x,0)=F(x) \tag{3.5}$$

В силу предположения (3.4) и неравенства (2.3) при $m>1/2$ получим из (3.5), что $S_\tau^1<0$, $S^1(x,0)=F(x)$.

Отсюда следует, что $S^1<F(x)$ при $\tau>0$. С другой стороны, функция Беллмана S при $m<1/2$ такова, что $S\geqslant F(x)$.

Действительно, в области D_1 функция $S=F(x)$, а в области D_2 в силу принципа максимума [5] для параболических уравнений $S\geqslant F(x)$. Последнее означает, что $S^1<S$ при $\tau>0$ в области, где выполняется неравенство (2.9), что противоречит $S\leqslant S^1$. Поэтому необходимо, чтобы $u=0$ в области, где справедливо (2.9) и уравнение (2.10) имеет в области вид $S_\tau^1=0$ Отсюда следует, что $S^1=F(x)$ там, где справедливо (2.9).

С другой стороны, полученное значение функции Беллмана должно удовлетворять неравенству (2.9), при выполнении которого справедливо (3.5) и поэтому неравенство $F'(x)<mc^2\tau R^{2m-1}F''(x)$ выделяет некоторую область $\Omega_1\subset D$ значений x и τ, где $u=0$. Так же, как и в случае $m<1/2$, множество Ω_1 содержит множество $x=0$.

Обозначим через Ω_2 дополнение множества Ω_1 в D. Согласно п.2 в Ω_2 имеем $u=-R$ и функция S^1 удовлетворяет уравнению (2.6).

Покажем, что условие (3.4) выполняется для построенной функции S.

В области Ω_1 справедливо $S^1=F(x)$ и в силу (1.4) условие (3.4) выполнено. В области Ω_2 имеем уравнение (2.6) с краевым условием (2.2) и условием

$$S^1|_\gamma=F(x) \tag{3.6}$$

Здесь γ — граница областей Ω_1 и Ω_2, задаваемая равенством $F'(x)=mc^2\tau R^{2m-1}F''(x)$.

Так как по предположению функция $F(x)$ бесконечно дифференцируема, то функция S^1, являющаяся решением уравнения (2.6) с условиями (2.2) и (3.6), также бесконечно дифференцируема по x [5]. Поэтому, дифференцируя равенство (2.6) и краевые условия (2.2) и (3.6) два раза по переменной x, получим, обозначая $S_{xx}^1=W$, что

$$-W_\tau-R\tau W_x+R^{2m}L(W)=0,\qquad W(x,0)=F''(x),\qquad W(x,\tau)|_\gamma=F''(x)$$

В силу (1.4) $F''(x)>0$ при $x\geqslant 0$. Еще раз используя принцип максимума для параболических уравнений, получим, что $W>0$ в Ω_2.

Таким образом, синтез оптимального управления задается формулой

$$u(x,\tau)=\begin{cases} 0\ , & (x,\tau)\in\Omega_1 \\ -R, & (x,\tau)\in\Omega_2 \end{cases} \tag{3.7}$$

где Ω_1 определяется неравенством, Ω_2 — дополнение к Ω_1 в D.

Рассмотренный случай имеет тот же смысл, что при $m<{}^1/_2$. Отметим только, что так как погрешность в исполнении управляющих воздействий в этом случае больше, то соответственно увеличивается область Ω_1, где происходит неуправляемое движение по сравнению с D_1 и уменьшается область активного управления по сравнению с областью D_2. При $m\to{}^1/_2+0$ случай $m>{}^1/_2$ переходит в рассмотренный ранее при $m={}^1/_2$.

Замечание 3.1. Основные результаты работы сохраняются, когда уравнение движения имеет вид (1.7). Уравнения границ Γ и γ задаются соответственно равенствами

$$a(\tau)F'(x)<{}^1/_2b^2(\tau)R^{2m-1}F''(x),\quad m\leqslant{}^1/_2$$
$$a(\tau)F'(x)<mb^2(\tau)R^{2m-1}F''(x),\quad m>{}^1/_2$$

При этом возможны следующие три случая: 1) $\lim\limits_{\tau\to0}b^2/a=0$, граница $\Gamma(\gamma)$ проходит через начало координат; 2) $\lim\limits_{\tau\to0}b^2/a=d$, d — положительная постоянная, граница $\Gamma(\gamma)$ выходит из точки x_0 на оси x, такой, что $F'(x_0)={}^1/_2dR^{2m-1}F''(x_0)$; 3) $\lim\limits_{\tau\to0}b^2/a=\infty$, область $D_1(\Omega_1)$ целиком содержит множество $\tau=0$. Последнее соответствует случаю, когда интенсивность управляющих воздействий при $\tau\to0$, $(t\to T)$ оказывается малой по сравнению с вкладом ошибки управления, поэтому при малых значениях τ (т. е. при $t\to T$) управлять системой менее выгодно, чем находиться в состоянии покоя. Данные Коши (2.2) и условие (2.4) относятся в этом случае к уравнению $S_\tau=0$, а уравнение (2.6) имеет краевое условие (3.3) или (3.6).

Замечание 3.2. При $c\to0$ решение задачи переходит в хорошо известное решение задачи оптимального управления без учета погрешностей управляющих воздействий.

Пример. Рассмотрим уравнения движения бокового отклонения аппарата с функционалом качества $I=F(x)=x^2$

$$x^{\cdot}=(T-t)(u+|u|^m\xi),\qquad x(t_0)=x_0,\qquad |u|\leqslant R$$

Пусть $m\leqslant{}^1/_2$. Тогда, согласно (3.2), оптимальное управление

$$u(x,\tau)=\begin{cases} 0, & |x|<{}^1/_2\tau R^{2m-1} \\ -R, & |x|\geqslant{}^1/_2\tau R^{2m-1} \end{cases}$$

При $m>{}^1/_2$ получим из (3.7), что

$$u(x,\tau)=\begin{cases} 0, & |x|<m\tau R^{2m-1} \\ -R, & |x|\geqslant m\tau R^{2m-1} \end{cases}$$

Поступила 17 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 2.
2. *Куржанский А. Б.* Вычисление оптимального управления в системе с неполной информацией. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, вып. 3.
3. *Братусь А. С.* Решение некоторых задач оптимальной коррекции с погрешностью исполнения управляющего воздействия. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
4. *Братусь А. С., Черноусько Ф. Л.* Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 1.
5. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М., «Наука», 1964.