

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ТРЕЩИН
НА ГРАНИЦЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА И ТВЕРДОГО ПРОВОДНИКА

Б. А. КУДРЯВЦЕВ, В. И. РАКИТИН

(Москва)

Рассматривается плоская статистическая задача для неограниченного полупространства $z > 0$ из пьезоэлектрического поперечноизотропного материала (симметрия класса $\infty \cdot m$). В плоскости изотропии $z = 0$ полупространство скреплено с жестким проводником так, что на границе $z = 0$ образуется периодическая система прямолинейных туннельных трещин (фиг. 1). Берега системы разрезов нагружены равномерным давлением σ_0 и среда находится в условиях плоской деформации в плоскости xOz . Задача сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта, из решения которых получено распределение напряжений на продолжении разрезов и величина критической нагрузки, определяющей развитие трещины.

1. Для случая плоской деформации пьезоэлектрической среды класса $\infty \cdot m$, отнесенной к кристаллофизическим декартовым координатам x, y, z , компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции связаны с компонентами смещения точек среды и электрическим потенциалом соотношениями [1]

$$\sigma_{xx} = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} - e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{zz} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

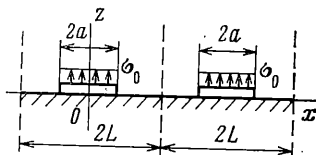
$$\sigma_{xz} = c_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$D_x = e_{15} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \epsilon_{11}^s \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$D_z = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + \epsilon_{33}^s \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Здесь $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ — модули упругости среды, e_{31}, e_{33}, e_{15} — пьезоэлектрические модули, $\epsilon_{11}^s, \epsilon_{33}^s$ — диэлектрические постоянные, $u(x, z), w(x, z)$ — составляющие вектора перемещений в направлении осей x и z соответственно, $\varphi(x, z)$ — потенциал электрического поля, причем компоненты электрического поля

$$E_x = \partial \varphi / \partial x, \quad E_z = \partial \varphi / \partial z$$



Фиг. 1

Используя (1.1) можно записать уравнения равновесия среды и уравнение Максвелла в виде

$$\begin{aligned}
 c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0 \\
 (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - e_{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - e_{13} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \\
 (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

С учетом симметрии, периодичности напряженно-деформированного состояния и электрического поля решение (1.2), обращающееся в нуль на бесконечности, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) \sin \frac{\pi n x}{L}, & w(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(z) \cos \frac{\pi n x}{L} \\
 \varphi(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z) \cos \frac{\pi n x}{L}
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
 U_n(z) &= \alpha_1 A_n e^{-k_1 \pi n z / L} + (\alpha_{21} B_n - \alpha_{22} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \cos \omega \frac{\pi n z}{L} + \\
 &+ (\alpha_{22} B_n + \alpha_{21} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \sin \omega \frac{\pi n z}{L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_n(z) &= \beta_1 A_n e^{-k_1 \pi n z / L} + (\beta_{21} B_n - \beta_{22} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \cos \omega \frac{\pi n z}{L} + \\
 &+ (\beta_{22} B_n + \beta_{21} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \sin \omega \frac{\pi n z}{L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(z) &= \gamma_1 A_n e^{-k_1 \pi n z / L} + (\gamma_{21} B_n - \gamma_{22} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \cos \omega \frac{\pi n z}{L} + \\
 &+ (\gamma_{22} B_n + \gamma_{21} C_n) e^{-\delta \pi n z / L} \sin \omega \frac{\pi n z}{L}
 \end{aligned}$$

Здесь $k_1, \delta, \omega, \alpha_1, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ — постоянные, зависящие от свойств пьезоэлектрической среды и определяемые по формулам работы [1].

Граничные условия рассматриваемой задачи для полосы периода $-L \leq x \leq L$ приводят к равенствам

$$E_x(x, 0) = \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad (-L \leq x \leq L) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{zz}(x, 0) = -\sigma_0, \quad \sigma_{xz}(x, 0) = 0 \quad (|x| < a) \quad (1.5)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0 \quad (a < |x| \leq L) \quad (1.6)$$

Из условия (1.4) получим $C_n = (\gamma_1 / \gamma_{22}) A_n + (\gamma_{21} / \gamma_{22}) B_n$.

Используя обозначения работы [1], запишем выражения для напряжений σ_{xz}, σ_{zz} и смещений w, u на границе $z=0$

$$\sigma_{xz}(x, 0) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_1}{\gamma_{22}} A_n + \frac{\delta_2}{\gamma_{22}} B_n \right) n \sin \frac{\pi n x}{L} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0) &= \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_3}{\gamma_{22}} A_n + \frac{\delta_4}{\gamma_{22}} B_n \right) n \cos \frac{\pi n x}{L} \\ w(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_5}{\gamma_{22}} A_n + \frac{\delta_6}{\gamma_{22}} B_n \right) \cos \frac{\pi n x}{L} \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_7}{\gamma_{22}} A_n + \frac{\delta_8}{\gamma_{22}} B_n \right) \sin \frac{\pi n x}{L} \end{aligned}$$

Если представить условия (1.6) в виде

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad (a < |x| \leq L)$$

то равенства (1.7) с условиями (1.5), (1.6) приводят к системе парных рядовых уравнений для определения последовательностей A_n, B_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_1 A_n + \delta_2 B_n) n \sin \frac{\pi n x}{L} = 0 \quad (|x| < a) \quad (1.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_3 A_n + \delta_4 B_n) n \cos \frac{\pi n x}{L} = -\frac{L}{\pi} \sigma_0 \gamma_{22} \quad (|x| < a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_5 A_n + \delta_6 B_n) n \sin \frac{\pi n x}{L} = 0 \quad (a < |x| \leq L)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_7 A_n + \delta_8 B_n) n \cos \frac{\pi n x}{L} = 0 \quad (a < |x| \leq L)$$

2. Переходя к решению системы (1.8), введем обозначения

$$(\delta_5 A_n + \delta_6 B_n) n = A_n^* \gamma_{22}, \quad (\delta_7 A_n + \delta_8 B_n) n = B_n^* \gamma_{22}, \quad x_1 = \pi x / L, \quad a_1 = \pi a / L$$

Система (1.8) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_{11} A_n^* + g_{12} B_n^*) \sin n x_1 = 0 \quad (|x_1| < a_1) \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_{21} A_n^* + g_{22} B_n^*) \cos n x_1 = \frac{L}{\pi} \sigma_0 \quad (|x_1| < a_1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin n x_1 = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \cos n x_1 = 0 \quad (a_1 < |x_1| \leq \pi) \quad (2.2)$$

$$g_{11} = \frac{1}{\Delta} (\delta_2 \delta_7 - \delta_1 \delta_8), \quad g_{12} = \frac{1}{\Delta} (\delta_1 \delta_6 - \delta_2 \delta_5)$$

$$g_{21} = \frac{1}{\Delta} (\delta_4 \delta_7 - \delta_3 \delta_8), \quad g_{22} = \frac{1}{\Delta} (\delta_3 \delta_6 - \delta_4 \delta_5), \quad \Delta = \delta_5 \delta_8 - \delta_6 \delta_7$$

Примем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \cos nx_1 = \alpha(x_1) \quad (0 \leq x_1 < a_1) \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin nx_1 = \beta(x_1) \quad (0 \leq x_1 < a_1)$$

тогда, учитывая (2.2), коэффициенты A_n^* и B_n^* можно определить по формулам

$$A_n^* = -\frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} \beta(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\cos n\xi}{n} \right) d\xi, \quad B_n^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} \alpha(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\sin n\xi}{n} \right) d\xi \quad (2.4)$$

Используя (2.3), находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos nx_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} \beta(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx_1 \cos n\xi}{n} \right) d\xi \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin nx_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} \alpha(\xi) \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx_1 \sin n\xi}{n} \right) d\xi$$

Если учесть известные представления [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx_1 \sin n\xi}{n} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin^{1/2}(x_1 + \xi)}{\sin^{1/2}(x_1 - \xi)} \right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx_1 \cos n\xi}{n} = \frac{1}{2} \ln |2(\cos \xi - \cos x_1)|$$

то равенство (2.5) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos nx_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \frac{\beta(\xi) \sin \xi}{\cos \xi - \cos x_1} d\xi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin nx_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \frac{\alpha(\xi) \sin x_1}{\cos \xi - \cos x_1} d\xi$$

Подставим эти выражения и (2.3) в (2.1) и учтем, что функция $\alpha(x_1)$ четная, а функция $\beta(x_1)$ — нечетная. Тогда получим систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта относительно функций $\alpha(x_1)$, $\beta(x_1)$:

$$g_{11}\beta(x_1) + g_{12} \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \alpha(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x_1 - \xi}{2} d\xi = 0 \quad (2.6)$$

$$-g_{21} \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \beta(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x_1 - \xi}{2} d\xi + g_{22} \alpha(x_1) = \frac{L}{\pi} \sigma_0 \quad (|x| < a_1)$$

Если ввести функцию

$$f(x_1) = \alpha(x_1) + ig_1\beta(x_1), \quad g_1 = \sqrt{g_{21}g_{11}/g_{22}g_{12}}$$

то система (2.6) сводится к одному интегральному уравнению

$$f(x_1) + g \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x_1}{2} d\xi = \sigma_0^* \quad (2.7)$$

$$g = \sqrt{g_{21}g_{12}/g_{11}g_{22}}, \quad \sigma_0^* = \sigma_0 L / \pi g_{22}$$

Вычисления показывают [1], что для реальных пьезоэлектрических материалов $g_{11}/g_{12} > 0$, $g_{21}/g_{22} > 0$, $g > 1$.

3. Для решения уравнения (2.7) рассмотрим автоморфную функцию [3]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) \frac{ie^{i\xi} d\xi}{e^{i\xi} - e^{iz}}$$

Предельные значения кусочно-аналитической периодической с периодом 2π функции $F(z)$ на отрезке $|x_1| \leq a_1$, целиком находящемся в полосе периода $-\pi \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ ($z = x_1 + iy_1$), удовлетворяют соотношениям, аналогичным формулам Сохоцкого

$$F^+(x_1) - F^-(x_1) = f(x_1) \quad (3.1)$$

$$F^+(x_1) + F^-(x_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{f(\xi) e^{i\xi} d\xi}{e^{i\xi} - e^{ix_1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x_1}{2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) d\xi$$

Функция $F(z)$ имеет на нижнем конце полосы периодов нуль первого порядка, т. е. $F(x_1 - i\infty) = 0$.

На верхнем конце полосы имеем

$$F(x_1 + i\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \left(\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \xi} - ig_1 \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \xi} \right) d\xi = 0 \quad (3.2)$$

Подставив (3.1) в (2.7), получим краевое условие задачи Римана для функции $F(z)$:

$$F^+(x_1) + \frac{g-1}{g+1} F^-(x_1) = \frac{\sigma_0^*}{1+g} \quad (|x_1| < a_1) \quad (3.3)$$

Для решения (3.3) в классе функций, неограниченных на концах разреза $y_1 = 0$, $|x_1| \leq a_1$, каноническая функция определяется выражением

$$X(z) = (e^{iz} - e^{ia_1})^{-1/2 - i\kappa} (e^{iz} - e^{-ia_1})^{-1/2 + i\kappa}, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{g-1}{g+1} \right)$$

Отметим, что

$$X(x_1 - i\infty) = 0, \quad X(x_1 + i\infty) = -e^{2\pi\kappa} \quad (3.4)$$

Предельные значения функции $X(z)$ на берегах разреза $|x_1| < a_1$ имеют вид

$$X^+(x_1) = - \frac{\exp(\pi\kappa + a_1\kappa - ix_1/2)}{\sqrt{2(\cos x_1 - \cos a_1)}} \left(\frac{\sin^{1/2}(a_1 + x_1)}{\sin^{1/2}(a_1 - x_1)} \right)^{i\kappa}$$

$$X^-(x_1) = -e^{2\pi\kappa} X^+(x_1)$$

Общее решение краевой задачи (3.3) определяется выражением [3]

$$F(z) = \frac{\sigma_0^*}{1+g} \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{ie^{i\xi} d\xi}{X^+(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} + C_0 X(z) \quad (3.5)$$

Здесь C_0 — постоянная, которая определяется из условия (3.2) на $F(x_1+i\infty)$ следующим соотношением:

$$C_0 = -\frac{\sigma_0^*}{1+g} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{id\xi}{X^+(\xi)} \quad (3.6)$$

Для вычисления интеграла в правой части (3.5) рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int_{L_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} \quad (3.7)$$

$$I_2 = \int_{L_2} \left(\frac{1}{X(\xi)} - e^{i\xi} + b \right) \frac{e^{i\xi} d\xi}{e^{i\xi}-e^{iz}}$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\xi}-b) \frac{e^{i\xi} d\xi}{e^{i\xi}-e^{iz}} = \begin{cases} 2\pi(e^{iz}-b) & (y_1 > 0) \\ 0 & (y_1 < 0) \end{cases}$$

$$b = \cos a_1 - 2\kappa \sin a_1$$

Контуры интегрирования L_1 и L_2 показаны на фиг. 2, причем на участке $|x_1| < a_1$ действительной оси часть контура L_1 совпадает с верхним берегом разреза, а часть контура L_2 — с нижним берегом разреза $|x_1| \leq a_1$. Учитывая, что при $H \rightarrow \infty$

$$1/[X(x_1-iH)] = e^{ix_1} e^H - b + \dots$$

а функция $X(z)$ принимает одинаковые значения на краях полосы $x_1 = \pm\pi$, получим, используя теорему о вычетах и переходя к пределу при $H \rightarrow \infty$, следующие выражения:

$$I_1 = \int_{-a_1}^{a_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X^+(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} + \int_{-\pi}^{-a_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} + \int_{a_1}^{\pi} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} = \begin{cases} \frac{2\pi}{X(z)} & (y_1 > 0) \\ 0 & (y_1 < 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

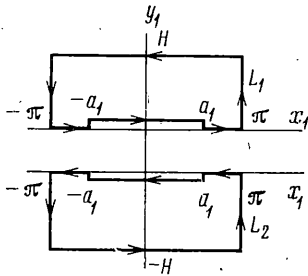
$$I_2 - I_3 = \int_{-a_1}^{a_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X^-(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} - \int_{-\pi}^{-a_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} - \int_{a_1}^{\pi} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X(\xi)(e^{i\xi}-e^{iz})} = \begin{cases} 2\pi(-e^{iz}+b) & (y_1 > 0) \\ 2\pi\left(\frac{1}{X(z)} - e^{iz}+b\right) & (y_1 < 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

Сложив равенства (3.8) и (3.9), после простых преобразований найдем

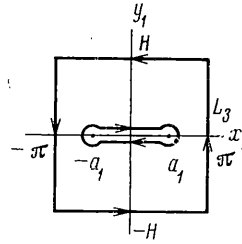
$$\frac{2g}{g+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{e^{i\xi} d\xi}{X^+(\xi) (e^{i\xi} - e^{iz})} = \frac{1}{X(z)} - e^{iz} + b \quad (3.10)$$

Для вычисления интеграла в (3.6) можно в выражении (3.10) перейти к пределу по $z \rightarrow x_1 + i\infty$ и учесть (3.4). Тогда получим

$$\frac{2g}{g+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{d\xi}{X^+(\xi)} = -e^{-2\kappa a_1} + b$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Окончательно решение краевой задачи (3.3) будет иметь вид

$$F(z) = \frac{\sigma_0^*}{2g} [1 + X(z) (e^{-2\kappa a_1} - e^{iz})] \quad (3.11)$$

Используя равенство (3.1), получим решение интегрального уравнения (2.7)

$$f(x_1) = \frac{\sigma_0^*}{g-1} X^+(x_1) (e^{-2\kappa a_1} - e^{ix_1}) \quad (3.12)$$

Можно показать, что

$$\int_{-a_1}^{a_1} X^+(x_1) dx_1 = -\frac{\pi(g-1)}{g} e^{2\kappa a_1}, \quad \int_{-a_1}^{a_1} X^+(x_1) e^{ix_1} dx_1 = -\frac{\pi(g-1)}{g}$$

4. Нормальные напряжения на продолжении разреза на основании (1.7), (2.1), (2.2), (2.5) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{zz}(x, 0) = \frac{g_1 \pi}{L} \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \beta(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x_1 - \xi}{2} d\xi \quad (x > a)$$

Принимая во внимание, что

$$\beta(\xi) = \frac{1}{g_1} \operatorname{Im}[f(\xi)], \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} f(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x_1 - \xi}{2} d\xi = 2iF(x_1) \quad (x_1 > a_1)$$

$$X(x_1) = -i \frac{\exp(a_1 \kappa - ix_1/2)}{\sqrt{2(\cos a_1 - \cos x_1)}} \left(\frac{\sin^{1/2}(x_1 + a_1)}{\sin^{1/2}(x_1 - a_1)} \right)^{i\kappa} \quad (x_1 > a_1)$$

найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0) &= -\frac{2\pi}{L'} gg_{22} \operatorname{Re}[F(x_1)] = -\sigma_0 - \sigma_0 \operatorname{Re}[X(x_1)(e^{-2\kappa a_1} - e^{i\kappa x_1})] = \\ &= -\sigma_0 + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{2(\cos a_1 - \cos x_1)}} \left[\sin \frac{x_1}{2} \cos \left(\kappa \ln \frac{\sin^{1/2}(x_1 + a_1)}{\sin^{1/2}(x_1 - a_1)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{ch} a_1 \kappa + \cos \frac{x_1}{2} \sin \left(\kappa \ln \frac{\sin^{1/2}(x_1 + a_1)}{\sin^{1/2}(x_1 - a_1)} \right) \operatorname{sh} a_1 \kappa \right] \end{aligned}$$

Таким образом, нормальные напряжения имеют осциллирующую особенность в вершине трещины, характерную для трещин на границе разнородных сред.

Получим условия, определяющие развитие трещины при заданной критической нагрузке σ_0 , приложенной к берегам разреза $|x| \leq a$. Следуя [1], можно записать это условие в виде

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{4} \frac{d}{da} \int_{-a}^a w(x, 0) dx \quad (4.1)$$

где γ — интенсивность поверхностной энергии разрушения.

Для вычисления интеграла (4.1) воспользуемся равенством

$$w(x, 0) = \int_{x_1}^{a_1} \beta(\xi) d\xi = \frac{1}{g_1} \operatorname{Im} \int_{x_1}^{a_1} f(\xi) d\xi \quad (4.2)$$

и изменим порядок интегрирования в выражении (4.1). Учитывая формулу (3.12), после простых преобразований получим

$$\int_{-a}^a w(x, 0) dx = \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\sigma_0}{g_{22}} \frac{1}{g_1(g-1)} \operatorname{Im} \left[\int_{-a_1}^{a_1} \xi X^+(\xi) (e^{-2\kappa a_1} - e^{i\xi}) d\xi \right] \quad (4.3)$$

Преобразуем правую часть (4.3). Рассмотрим интеграл

$$I_4 = \int_{L_3} z[X(z)(e^{-2\kappa a_1} - e^{iz}) + 1] dz \quad (4.4)$$

по контуру L_3 (фиг. 3). Учитывая, что его значение равно нулю, так как подынтегральное выражение не имеет полюсов в ограниченной контуром области, и учитывая, что $X(z) \rightarrow -e^{-2\kappa a_1}$ при $z \rightarrow x_1 + i\infty$, $e^{iz}X(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow x_1 - i\infty$, $X(\pi + iy_1) = X(-\pi + iy_1)$, найдем из выражения (4.4), переходя к пределу при $H \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Im} \int_{-a_1}^{a_1} \xi X^+(\xi) (e^{-2\kappa a_1} - e^{i\xi}) d\xi = \pi \frac{g-1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + X(\pi + iy_1)(e^{-2\kappa a_1} + e^{-y_1})] dy_1$$

Значение $X(z)$ на границе $x_1 = \pi$ полосы периодов будет

$$\begin{aligned} X(\pi + iy_1) &= -e^{2\kappa p(y_1)} t(y_1), \quad p(y_1) = \arcsin[\sin a_1 t(y_1)] \\ t(y_1) &= (e^{-2y_1} + 2e^{-y_1} \cos a_1 + 1)^{-1/2} \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (4.3) принимает вид

$$\int_{-a}^a w(x, 0) dx = \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\sigma_0 \pi}{g_{21}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{t(y_1)} (e^{-2\kappa a_1} + e^{-y_1}) e^{2\kappa p(y_1)} \right] dy_1 \quad (4.5)$$

и интеграл в правой части равенства (4.5) можно представить следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{t(y_1)} (e^{-2\kappa a_1 + e^{-y_1}}) e^{2\kappa p(y_1)} \right] dy_1 =$$

$$= \int_0^1 \left[1 - \frac{(te^{-2\kappa a_1 + 1}) e^{2\kappa p^*(t)}}{\sqrt{t^2 + 2t \cos a_1 + 1}} \right] \frac{dt}{t} + \int_0^1 \left[1 - \frac{(e^{-2\kappa a_1 + t}) e^{2\kappa p^*(t)}}{\sqrt{t^2 + 2t \cos a_1 + 1}} \right] \frac{dt}{t}$$

$$p^*(t) = \arcsin [\sin a_1 (t^2 + 2t \cos a_1 + 1)^{-1/2}]$$

Последние интегралы могут быть вычислены приближенно, если воспользоваться разложением подынтегральных функций в ряды по степеням t . В результате получим

$$\int_{-a}^a w(x, 0) dx = \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \frac{\sigma_0 \pi}{g_{21}} \left[4 \operatorname{ch}^2 \kappa a_1 \ln \left(\cos \frac{1}{2} a_1 \right) - \right. \quad (4.6)$$

$$\left. - 4 \operatorname{sh}^2 \kappa a_1 \ln \left(1 + \cos \frac{1}{2} a_1 \right) + 2\kappa \sin 2a_1 (\operatorname{sh} 2\kappa a_1 - \kappa \sin a_1) \ln \left(\frac{\cos^{1/2} a_1}{1 + \cos^{1/2} a_1} \right) + \dots \right]$$

Для реальных пьезоэлектрических материалов рассматриваемого класса параметр κ мал и в разложении (4.6) можно ограничиться только первым членом. Тогда условие разрушения (4.1) можно представить в виде

$$\gamma \approx \frac{2L\sigma_0^2}{g_{21}} \operatorname{ch}^2 \gamma a_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_1$$

Поступила 23 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракигин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., Физматгиз, 1963.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.