МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1976

УДК 539.374

РАСЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛЫХ ОВАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ

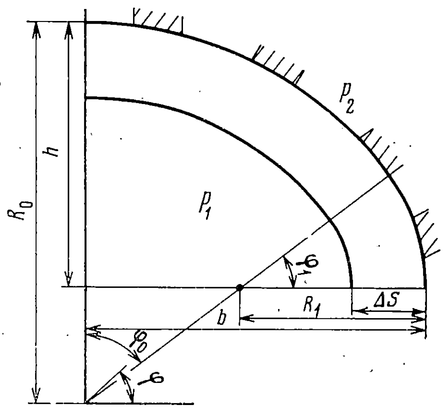
Е. И. МАКЕРАНЕЦ, В. И. ОДИНОКОВ

(Свердловск)

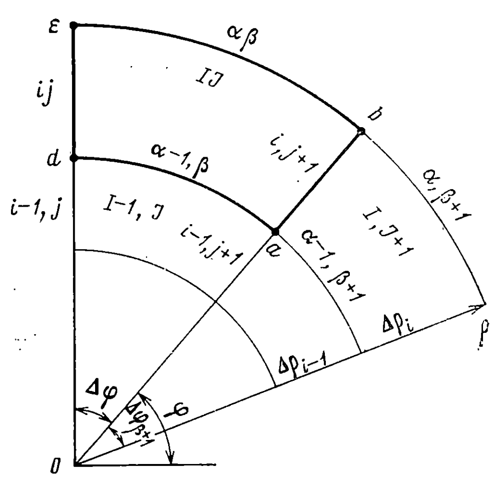
Разработка методов расчета полых цилиндров с различной конфигурацией поперечного сечения под действием нагрузок имеет важное значение для машиностроения, металлургии, строительства, горного дела. Наиболее полно разработана методика расчета круговых полых цилиндров [1–4].

В работе предлагается общая численная схема, пригодная для расчета напряженно-деформированного состояния при пластическом течении полых овальных цилиндров неограниченной длины. В основу схемы положен численный метод решения дифференциальных уравнений пластического течения, предложенный в [5] и подробно рассмотренный в [6]. Приводится описание алгоритма решения. Универсальность разработанного алгоритма демонстрируется на ряде частных задач о деформации полого овального цилиндра: осадка в штампах, деформация под действием наружного и внутреннего давлений, неравномерный нагрев стенки полого цилиндра.

1. Рассмотрим пластическое течение полого цилиндра неограниченной длины под нагрузкой, симметрично приложенной к его поверхности. Ставится задача определения полей напряжений и скоростей перемещений



Фиг. 1



Фиг. 2

в стенке цилиндра в начальный момент деформации. Материал стенки примем несжимаемым. Положим, что цилиндр настолько длинный, что его деформацией вдоль продольной оси можно пренебречь. Учитывая симметрию, будем отыскивать решение в области, составляющей четвертую часть поперечного сечения, наружный контур которого описывается двумя радиусами R_0 и R_1 (фиг. 1). Геометрические параметры сечения связаны соотношениями

$$R_0=R_1+\frac{b-R_1}{\cos\varphi_1},\qquad h=R_0-(b-R_1)\operatorname{tg}\varphi_1 \tag{1.1}$$

Применив полярную систему координат, разобьем исследуемую область на ортогональные ячейки IJ ($I=1,\ldots,I^*$; $J=1,\ldots,J^*$). Примем обозначения граней ячейки IJ в соответствии с фиг. 2, где $i=1,\ldots,i^*$; $j=1,\ldots,j^*$; $\alpha=1,\ldots,\alpha^*$; $\beta=1,\ldots,\beta^*$. Введем для удобства следующие безразмерные параметры:

$$\rho_c{}^\circ=\frac{\rho_c}{\Delta\rho_i},\quad t_1=\frac{4\Delta S}{\rho_c},\quad t_2=\frac{1}{\Delta\varphi_\beta\rho_c{}^0},\quad t_3=\frac{1}{2\rho_c{}^0},\quad t_4=\frac{8\Delta S}{\Delta\rho_i}$$

$$t_1{}^a=\frac{\Delta S}{\Delta\rho_i}\quad t_2{}^a=\frac{2\Delta S}{(\rho_\alpha-\Delta\rho_i)(\Delta\varphi_\beta+\Delta\varphi_{\beta+1})},\quad t_3{}^a=-\frac{\Delta S}{\rho_\alpha-\Delta\rho_i},\quad \lambda^0=\frac{\lambda v_u}{\sigma_s\Delta S} \tag{1.2}$$

$$\rho_c=\rho_\alpha-0.5\Delta\rho_i,\quad \Delta\rho_i=\Delta S/\omega=\Delta\rho_{i+1}=\Delta\rho,\quad \lambda=\mathrm{T}/\mathrm{H},\quad \mathrm{T}=\mathrm{H}g(\mathrm{H})$$

$$\mathrm{H}=(2\xi_{kl}{}^*\xi_{kl}{}^*)^{1/2},\quad \xi_{kl}{}^*=\xi_{kl}-{}^1/{}_3\xi\delta_{kl},\quad \xi=\xi_{kl}\delta_{kl},\quad \xi_{kl}=0.5(v_{k,l}+v_{l,k})$$

$$\delta_{kl}=1\ {\scriptstyle (k=l)},\quad \delta_{kl}=0\ {\scriptstyle (k\neq l)},\quad v_{k,l}=\partial v_k/\partial x_l\quad {\scriptstyle (k,\,l=1,\,2,\,3)}$$

ΔS — толщина стенки цилиндра; ω — число делений стенки цилиндра, численно равное значению индекса i^*; суммирование по индексам k, l; v_u — приведенная скорость перемещения инструмента; σ_s — предел текучести материала при растяжении.

В соответствии с работой [5] и учитывая (1.2), запишем систему уравнений пластического течения для ячейки IJ (фиг. 2), которая после простых преобразований будет иметь вид

$$\lambda^\circ t_1(\overset{\alpha\beta}{v_\rho}-\overset{\alpha-1\beta}{v_\rho})+\overset{\alpha\beta}{\sigma_\rho}-\overset{\alpha-1\beta}{\sigma_\rho}+t_2(\overset{ij}{\sigma_{\varphi\rho}}-\overset{ij+1}{\sigma_{\varphi\rho}})=0 \tag{1.3}$$

$$t_2(\overset{ij}{\sigma_\varphi}-\overset{ij+1}{\sigma_\varphi})+\overset{\alpha\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}-\overset{\alpha-1\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}+t_3(\overset{ij}{\sigma_{\varphi\rho}}+\overset{\alpha-1\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}+\overset{\alpha\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}+\overset{ij+1}{\sigma_{\varphi\rho}})=0$$

$$\overset{\alpha\beta}{\sigma_\rho}+\overset{\alpha-1\beta}{\sigma_\rho}-\overset{ij}{\sigma_\varphi}-\overset{ij+1}{\sigma_\varphi}=\lambda^\circ t_4(\overset{\alpha\beta}{v_\rho}-\overset{\alpha-1\beta}{v_\rho})$$

$$\sigma_{\rho\varphi}{}^a=\lambda^*[t_1{}^a(\overset{ij+1}{v_\varphi}-\overset{i-1j+1}{v_\varphi})+t_2{}^a(\overset{\alpha-1\beta}{v_\rho}-\overset{\alpha-1\beta+1}{v_\rho})+t_3{}^a(\overset{ij+1}{v_\varphi}+\overset{i-1j+1}{v_\varphi})]$$

$$\overset{\alpha\beta}{v_\rho}-\overset{\alpha-1\beta}{v_\rho}+t_2(\overset{ij}{v_\varphi}-\overset{ij+1}{v_\varphi})+t_3(\overset{\alpha-1\beta}{v_\rho}+\overset{\alpha\beta}{v_\rho})=0$$

$$\overset{ij}{\sigma_{\varphi\rho}}=0.5(\sigma_{\rho\varphi}{}^d+\sigma_{\rho\varphi}{}^\varepsilon),\qquad \overset{\alpha-1\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}=0.5(\sigma_{\rho\varphi}{}^d+\sigma_{\rho\varphi}{}^a) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{\rho\varphi}{}^{\alpha\beta}=0.5(\sigma_{\rho\varphi}{}^\varepsilon+\sigma_{\rho\varphi}{}^b),\qquad \overset{ij+1}{\sigma_{\varphi\rho}}=0.5(\sigma_{\rho\varphi}{}^a+\sigma_{\rho\varphi}{}^b),\qquad \lambda^*=0.25\sum_{I-1,J}^{I,J+1}\lambda_{IJ}{}^\circ$$

Напряжения $\sigma_{\rho\varphi}{}^d$, $\sigma_{\rho\varphi}{}^\varepsilon$, $\sigma_{\rho\varphi}{}^b$ вычисляются аналогично $\sigma_{\rho\varphi}{}^a$ в (1.3). В системе (1.3) скорости v_ρ, v_φ выражены в долях v_u, напряжения — в долях σ_s.

Пусть M — множество, состоящее из числа m индексов β, принадлежащих граням ячеек, примыкающих к внешней свободной поверхности, N — множество, состоящее из β^*-m индексов β, принадлежащих граням ячеек, примыкающих к поверхности контакта инструмента деформации.

Граничные условия задачи запишем в виде

$$\overset{ij^*}{\sigma_{\varphi\rho}}=\sigma_{\varphi\rho}{}^{i1}=0,\qquad \sigma_{\rho\varphi}{}^{1\beta}=\overset{\alpha^*\beta}{\sigma_{\rho\varphi}}|_{\beta\in M}=0 \tag{1.5}$$

$$\sigma_\rho{}^{1\beta}=-p_1,\qquad \overset{\alpha^*\beta}{\sigma_\rho}|_{\beta\in M}=-p_2,\qquad \overset{\alpha^*\beta}{v_\rho}|_{\beta\in N}=v_{\rho u}$$

где $v_{\rho u}$ — проекция скорости перемещения инструмента на ось ρ, p_1 — давление внутри цилиндра, p_2 — давление на внешнюю свободную поверхность.

На контактной поверхности имеется скольжение. Закон трения примем (безразмерный вид)

$$\sigma_{\rho\varphi}{}^{c} = -\psi v_{ck}{}^{c}, \qquad v_{ck}{}^{c} = v_{\varphi}{}^{c} - v_{\varphi u}{}^{c} \tag{1.6}$$

Здесь c — точка на поверхности контакта, ψ — коэффициент трения, $v_{\varphi u}$ — проекция скорости инструмента на φ.

Записав для каждой ячейки IJ ($I=1,\ldots,I^*$; $J=1,\ldots,J^*$) систему уравнений (1.3), (1.4) и учтя граничные условия (1.5), а также уравнения на контакте (1.6), получим систему алгебраических уравнений, решив которую, найдем поля напряжений и скоростей перемещений по граням ячеек.

2. Рассмотрим алгоритм решения сформированной системы алгебраических уравнений. Заметим, что если $\lambda_{IJ}=\text{const}$, то данная система уравнений становится линейной. Введем обозначения

$$A_{IJ} = \lambda^\circ t_1 (v_\rho{}^{\alpha\beta} - v_\rho^{\alpha-1\beta}) + t_2(\sigma_{\varphi\rho}{}^{ij} - \sigma_{\varphi\rho}^{ij+1}) \tag{2.1}$$

$$B_{IJ} = \sigma_{\rho\varphi}{}^{\alpha\beta} - \sigma_{\rho\varphi}^{\alpha-1\beta} + t_3(\sigma_{\rho\varphi}{}^{ij} + \sigma_{\rho\varphi}^{\alpha-1\beta} + \sigma_{\rho\varphi}{}^{\alpha\beta} + \sigma_{\varphi\rho}^{ij+1})$$

$$C_{IJ} = \lambda^\circ t_4 (v_\rho{}^{\alpha\beta} - v_\rho^{\alpha-1\beta})$$

Выразим из второго и третьего уравнений системы (1.3) с учетом (2.1) значения σ_φ^{ij} и σ_φ^{ij+1}

$$\sigma_\varphi^{ij+1} = \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho{}^{\alpha\beta} + \sigma_\rho^{\alpha-1\beta} + \frac{B_{IJ}}{t_2} - C_{IJ}\right), \qquad \sigma_\varphi{}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho{}^{\alpha\beta} + \sigma_\rho^{\alpha-1\beta} - \frac{B_{IJ}}{t_2} - C_{IJ}\right) \tag{2.2}$$

Очевидно, что $(\sigma_\varphi^{ij+1})_{IJ} = (\sigma_\varphi^{ij+1})_{IJ+1}$. Учитывая это, построим следующую систему уравнений:

$$F_\varphi{}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho{}^{\alpha\beta} + \sigma_\rho^{\alpha-1\beta} + \frac{B}{t_2} - C\right)_{IJ} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho^{\alpha\beta+1} + \sigma_\rho^{\alpha-1\beta+1} - \frac{B}{t_2} - C\right)_{IJ+1} = 0$$

$$(i=1,\ldots,i^*;\ j=2,\ldots,j^*-1)$$

$$F_\rho^{\alpha^*\beta}|_{\beta\in M} = \sigma_\rho^{\alpha^*\beta} - \sigma_\rho^{\alpha^*-1\beta} + A_{I^*J} = 0 \tag{2.3}$$

где уравнения $F_\rho^{\alpha^*\beta}|_{\beta\in M}=0$ построены из первого уравнения системы (1.3) с учетом (2.1).

Система (2.3) содержит количество уравнений (R), равное числу неизвестных v_φ^{ij} и $v_\rho^{\alpha^*\beta}$: $R=g+m$, где $g=i^*\times(j^*-2)$ – количество неизвестных v_φ^{ij}, $i=1,\ldots,i^*$; $j=2,\ldots,j^*-1$; m – количество неизвестных $v_\rho^{\alpha^*\beta}$, $\beta\in M$. Будем считать эти неизвестные независимыми. Скорости v_φ^{ij}, $i=1,\ldots,i^*$; $j=1, j^*$; $v_\rho^{\alpha^*\beta}$, $\beta\in N$ заданы граничными условиями (1.5). Все члены системы уравнений (2.3) можно выразить через указанные независимые переменные. Для доказательства данного утверждения положим, что значения $\lambda_{IJ}{}^\circ$ ($I=1,\ldots,I^*$; $J=1,\ldots,J^*$) заданы.

Используя уравнения несжимаемости в каждой ячейке, найдем скорости $v_\rho^{\alpha\beta}$ через независимые параметры системы (2.3). Для этого перепишем последнее уравнение (1.3) в следующем виде:

$$v_\rho^{\alpha-1\beta} = \frac{1}{1-t_3}\left[(1+t_3)v_\rho{}^{\alpha\beta} + t_2(v_\varphi{}^{ij} - v_\varphi^{ij+1})\right] \tag{2.4}$$

и будем его выполнять в последовательности $\alpha=\alpha^*, \alpha^*-1, \ldots, 2$ при $\beta=1,\ldots,\beta^*$.

По найденным скоростям $v_\rho^{\alpha\beta}$ и независимым параметрам определим в соответствии с четвертым уравнением (1.3) и уравнениями (1.6), (1.4) напряжения $\sigma_{\varphi\rho}^{ij}\,\sigma_{\rho\varphi}^{\alpha\beta}$, не заданные граничными условиями. Вычисляются значения A_{IJ}, B_{IJ}, C_{IJ}. Используя первое уравнение системы (1.3) и учитывая (2.1), найдем напряжения $\sigma_\rho^{\alpha\beta}$ из следующих соотношений:

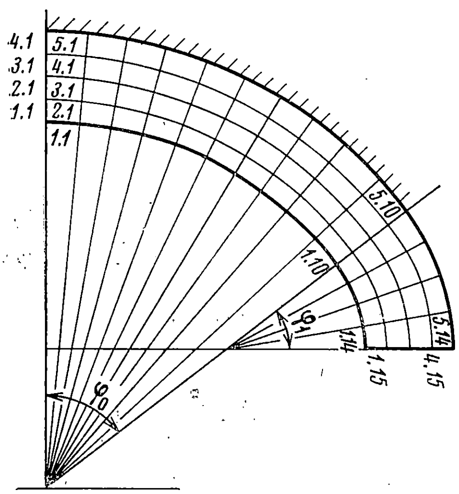
$$\sigma_\rho{}^{\alpha\beta} = \sigma_\rho{}^{\alpha-1\beta} - A_{IJ} \tag{2.5}$$

в последовательности $\alpha=2, \ldots, \alpha^*$ при $\beta=1, \ldots, \beta^*$; $\beta\notin M$. Здесь $\sigma_\rho^{1\beta}=0$ по (1.5). Заметим, что в уравнениях $F_\rho^{\alpha*\beta}=0$ системы (2.3) $\sigma_\rho^{\alpha^*\beta}$, $\beta\in M$ заданы граничными условиями, а именно $\sigma_\rho^{\alpha^*\beta}|_{\beta\in M}=-p_2$. Утверждение доказано.

Линейную систему уравнений (2.3) перепишем в виде

$$F_k = a_k{}^{ij} v_\varphi{}^{ij} + a_k{}^{\alpha^*\beta} v_\rho{}^{\alpha^*\beta} + b_k = 0 \tag{2.6}$$

$i=1, \ldots, i^*$; $j=2, \ldots, j^*-1$; $\beta\in M$; $k=1,\ldots, R$, суммирование по индексам i, j, β. Здесь a_k^{ij}, $a_k^{\alpha^*\beta}$ — коэффициенты при неизвестных, b_k — свободный член. Определим коэффициенты и свободные члены системы (2.6). Положив $v_\varphi{}^{ij}=0$, $v_\rho^{\alpha^*\beta}=0$; $i=1, \ldots, i^*$; $j=2, \ldots, j^*-1$; $\beta\in M$ и производя последовательно вычисления (последовательность П) по формулам (2.4), (1.3) — четвертая формула, (1.6), (1.4), (2.1), (2.5), (2.3), определим свободные члены b_k, $k=1, \ldots, R$:



Фиг. 3

$$F_k|_{\mathbf{v}(0)}=F_k{}^\circ=b_k \qquad (k=1, \ldots, R)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор, $\mathbf{v}\{v_\varphi{}^{ij}, v_\varphi^{\alpha^*\beta}|i=1, \ldots, i^*$; $j=2, \ldots, j^*-1$; $\beta\in M\}$. Определим множество $D=\{i, j, \beta|i=1, \ldots, i^*;\ j=2, \ldots, j^*-1;\ \beta\in M\}$. Так как F_k — линейная функция относительно $v_\varphi{}^{ij}$, $v_\rho^{\alpha^*\beta}$, то, положив: $v_\rho^{\alpha^*\beta}=0$, $\beta\in M$; $v_\varphi{}^{ij}=1$, $i=p$, $j=r$, $p\in D$, $r\in D$, $v_\varphi{}^{ij}=0$ при выполнении хотя бы одного из неравенств $i\neq p$, $j\neq r$ и осуществив последовательность вычислений П, получим значения F_k, которые обозначим как $F_k{}^{pr}$, $k=1, \ldots, R$.

Теперь можно вычислить коэффициенты $a_k{}^{pr}$:

$$a_k{}^{pr}=(F_k{}^{pr}-F_k{}^\circ)/1 \qquad (k=1, \ldots, R)$$

Так как $F_k{}^\circ=b_k$, то

$$a_k{}^{pr}=F_k{}^{pr}-b_k \qquad (k=1, \ldots, R) \tag{2.7}$$

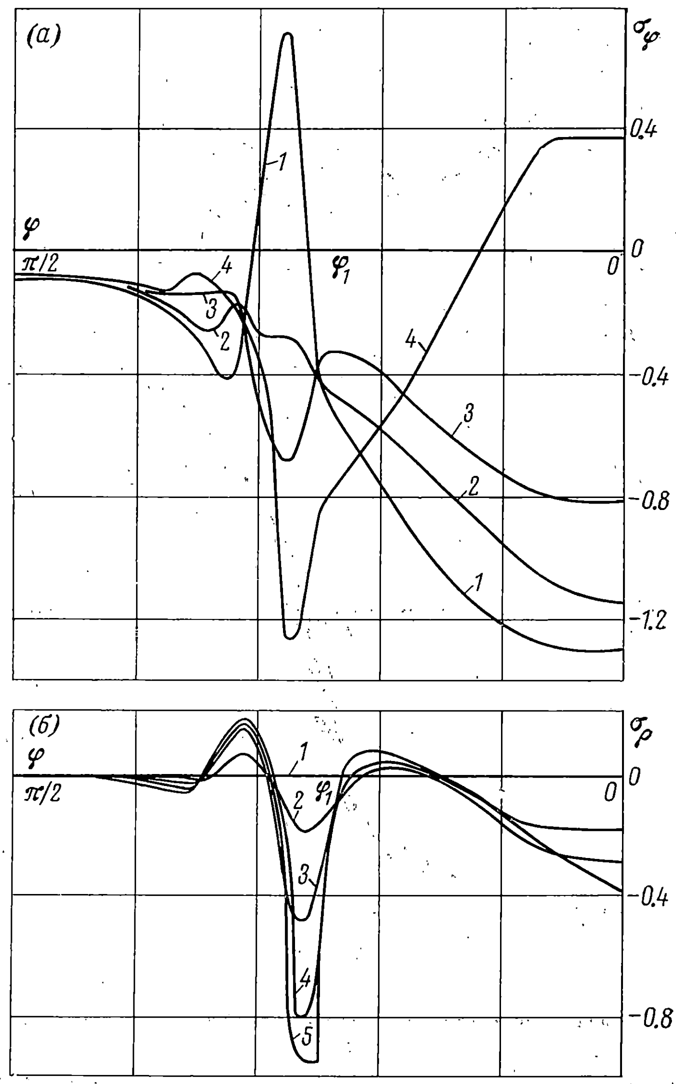
Придавая индексам p, r значения $p=1, \ldots, i^*$, $r=2, \ldots, j^*-1$, получим всю матрицу коэффициентов $a_k{}^{ij}$, $i=1, \ldots, i^*$; $j=2, \ldots, j^*-1$; $k=1, \ldots, R$. Аналогично определяются коэффициенты $a_k^{\alpha^*\beta}$. Таким образом имеем матрицу для решения системы линейных уравнений (2.6).

Определим последовательность решения задачи.

1. Рассчитываются геометрические безразмерные параметры (1.2): t_{IJ}, $I=1, \ldots, I^*$; $J=1, \ldots, J^*$; $t_{IJ}=\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_1{}^u, t_2{}^u, t_3{}^u|u=a, \varepsilon, d\}$. Задаются граничные условия задачи (1.5) и начальное приближение: $\lambda_{IJ}{}^\circ=1$; $I=1, \ldots, I^*$; $J=1, \ldots, J^*$.
2. Находятся в соответствии с изложенной выше последовательностью П коэффициенты и свободные члены системы линейных уравнений (2.6).
3. Решается система линейных уравнений (2.6) по стандартной программе.
4. В соответствии с принятой моделью физического состояния среды $T=\mathrm{H}g(H)$ насчитываются по каждой ячейке $\lambda_{IJ}{}^\circ$, $I=1, \ldots, I^*$; $J=1, \ldots, J^*$. Производится сравнение по $(\lambda^\circ)^n$ и $(\lambda^\circ)^{n-1}$; $(\lambda^\circ)^n=\{(\lambda_{IJ}{}^\circ)^n|I=1, \ldots, I^*;\ J=1, \ldots, J^*\}$

$$|(\lambda^\circ)^n-(\lambda^\circ)^{n-1}|\leqslant\varepsilon \tag{2.8}$$

где n — номер итерации, ε — точность решения задачи.



Фиг. 4 *а, б*

Если неравенство (2.8) удовлетворяется, то выполняется операция 5, в противном случае выполняется операция 2.

5. Вычисляются скорости перемещений и напряжений по граням ячеек в соответствии с последовательностью П.

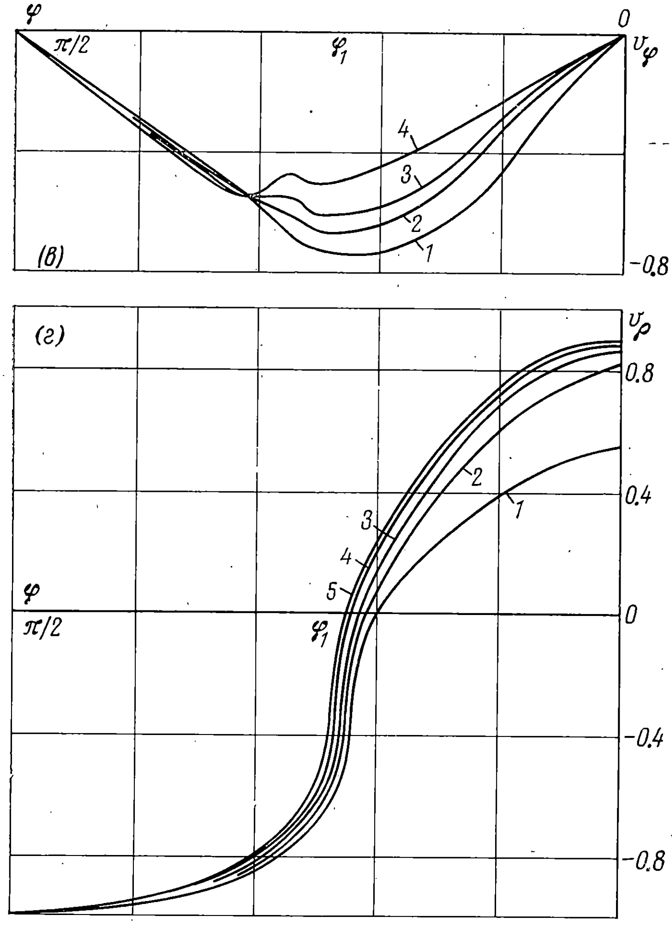
Опыт решения задач показал, что для получения точности решения по скоростям и напряжениям до третьего знака после запятой достаточно произвести шесть-семь итераций.

3. Рассмотрим ряд частных случаев. 1. Полый стальной цилиндр, нагретый до температуры 1200° С, осаживается между двумя штампами. Данная задача может служить моделью процесса деформации корочки непрерывнолитого слитка, выходящего из установки непрерывной разливки стали, в непосредственной близости от кристаллизатора. Внутренним (ферростатическим) давлением внутри слитка ввиду его малости (1÷1,2 ати) можно пренебречь. Разобьем четвертую часть поперечного сечения на 56 ячеек (фиг. 3). При этом $i^*=4$, $j^*=15$, $\alpha^*=5$, $\beta^*=14$, $I^*=4$, $J^*=14$.

Положим $N=\{\beta_J \mid J=1, \ldots, 10\}$. Тогда $g=52$, $m=4$, $R=56$. На поверхности контакта

$$v_{\rho u}=-v_u \sin\varphi, \qquad v_{\varphi u}=-v_u \cos\varphi \tag{3.1}$$

где v_u – скорость перемещения инструмента.



Фиг. 4 *в, г*

Примем, что деформируемая среда описывается соотношением [7]:

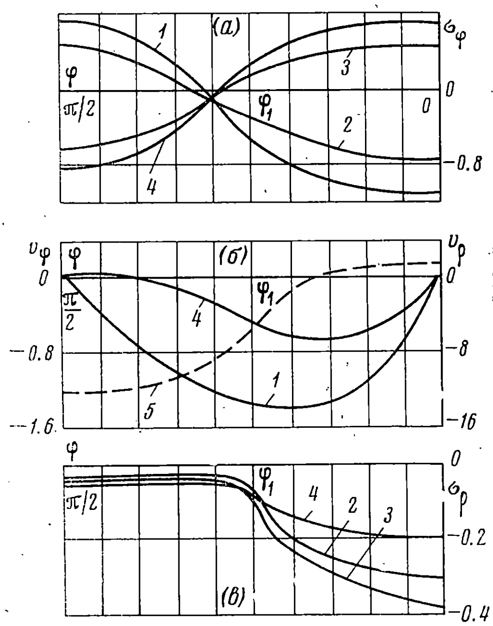
$$T=\tau_m H^\gamma/(H_0^\gamma+H^\gamma) \tag{3.2}$$

Здесь $H_0=1$ *сек*$^{-1}$, τ_m, γ – коэффициенты, зависящие от марки стали, температуры, степени деформации.

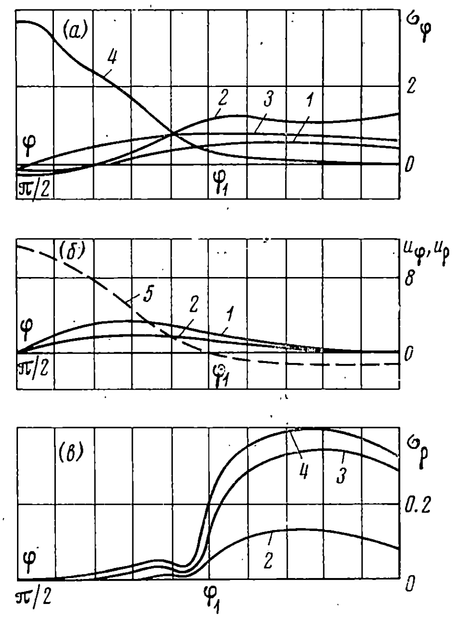
Определим λ° как $\lambda^\circ=\lambda v_u/\tau_m\Delta S$, тогда в соответствии с равенством (3.2)

$$\lambda^\circ=\frac{H_*^{\gamma-1}}{(\Delta S/v_u)^\gamma+H_*^\gamma},\qquad H_*=H\frac{\Delta S}{v_u} \tag{3.3}$$

На фиг. 4, *а – г* приведены графики $\sigma_\varphi(\varphi)$, $\sigma_\rho(\varphi)$, $v_\varphi(\varphi)$, $v_\rho(\varphi)$ при значениях $b/\Delta S=7.15$; $R_1/\Delta S=1.78$; $p_1=0$, $p_2=0$, $\varphi_1=45°$; $\psi=1$, $\gamma=0.5$; $\Delta S/v_u=1$ *сек*. Результаты представлены в виде кривых, полученных графической аппроксимацией значений скоростей и напряжений в центральных точках граней ячеек. Цифрами *1, 2, 3, 4* (фиг. 4, *а, в*) обозначены кривые при соответствующих значениях $i=1, 2, 3, 4$; цифрами *1, 2, 3, 4, 5* (фиг. 4, *б, г*) обозначены кривые при соответствующих значениях $\alpha=1, 2, 3, 4, 5$. Напряжения на графиках приведены в долях τ_m, скорости – в долях v_u. Заметим, что $\tau_m\approx\sigma_s$. Значение $\gamma=0.5$ соответствует среднеуглеродистой стали при температуре $\theta=1000\div1200°$ С. Отношения $b/\Delta S$, $R_1/\Delta S$ и угол φ_1 приняты в соответствии с размерами слитков, отливаемых на установках непрерывной разливки стали. Интересно отметить, что наибольшие растягивающие напряжения возникают по σ_φ на внутреннем слое ($i=1$) при φ, близких к φ_1 (фиг. 4, *а*), а также на внешнем слое 4) при $\varphi=0$.



Фиг. 5



Фиг. 6

2. Полый стальной цилиндр, нагретый до температуры 1200° С, находится под действием внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений. Имеем $N=\phi$, следовательно $g=52$, $m=14$, $R=66$. Значения γ, $\Delta S/v_u$, геометрические параметры $b/\Delta S$, $R_1/\Delta S$ примем такими же, что и в первой задаче. Угол φ_1 взят равным $\varphi_1=85°$, $p_1=0.03\ \tau_m$, $p_2=0.05\,\tau_m$. На фиг. 5, *а – в* приведены результаты решения данной задачи. Цифры на фиг. 5, *а* соответствуют значениям $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. На фиг. 5, *б* приведены графики $v_\rho(\varphi)$ — пунктирной линией ($\alpha=5$), $v_\varphi(\varphi)$ — сплошными линиями ($i=1,\ 4$). Значения $v_\rho(\varphi)$ при $\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4$ очень близки по величине к $v_\rho(\varphi)$ при $\alpha=5$ и поэтому на графике не показаны. Значения $v_\varphi(\varphi)$ при $i=2,\ 3$ лежат между значениями $v_\varphi(\varphi)$ при $i=1$, 4. Цифры на фиг. 5, в соответствуют $\alpha=2,\ 3,\ 4$.

3. Полый стальной цилиндр нагревается от 0° С. Известны значения температуры по слоям стенки цилиндра θ_I, $I=1,\ 2,\ 3,\ 4$ к моменту времени τ. Определим напряжения и деформации, возникающие в стенке цилиндра, к моменту времени τ. Имеем $N=\varnothing$, $g=52$, $m=14$, $R=66$. Решаем задачу в перемещениях, учитывая только тепловое изменение объема. Запишем систему дифференциальных уравнений для данной задачи

$$\sigma_{kl,l}=0,\qquad \sigma_{kl}-\sigma\delta_{kl}=2,\qquad \lambda_*(\varepsilon_{kl}-a\theta\delta_{kl}),\qquad u_{k,k}-3a\theta=0,\qquad \lambda_*=\mathrm{T}/\Gamma$$

$$\mathrm{T}=\Gamma g(\Gamma)\qquad \Gamma=\sqrt{2\varepsilon_{kl}{}^*\varepsilon_{kl}},\qquad \varepsilon_{kl}={}^1/{}_2(u_{k,\,l}+u_{l,\,k}),\qquad \varepsilon_{kl}{}^*=\varepsilon_{kl}-{}^1/{}_3\varepsilon\delta_{kl},\qquad \varepsilon=\varepsilon_{kk}$$

Здесь a – коэффициент линейного теплового расширения, θ – температура материала, u_k – перемещение вдоль соответствующей координаты x_k. Алгоритм решения остается тот же самый, только в формулах (1.3), (1.4) будут фигурировать не скорости перемещений, а сами перемещения. Кроме того, значения A_{IJ}, C_{IJ} в (2.1) и формула (2.4) с учетом теплового расширения будут иметь вид

$$u_\rho^{\alpha-1\beta}=\frac{1}{1-t_3}\left[(1+t_3)\,u_\rho{}^{\alpha\beta}+t_2(u_\varphi{}^{ij}-u_\varphi^{ij+1})-24a\theta\,\frac{\Delta S}{t_4u^*}\right]$$

$$A_{IJ}=\lambda_*{}^\circ\left[t_1(u_\rho{}^{\alpha\beta}-u_\rho^{\alpha-1\beta})-12t_3\,\frac{\Delta S}{u^*}\,a\theta\right]+t_2(\sigma_{\varphi\rho}{}^{ij}-\sigma_{\varphi\rho}^{ij+1})$$

$$C_{IJ}=\lambda_*{}^\circ\left[t_4(u_\rho{}^{\alpha\beta}-u_\rho^{\alpha-1\beta})-12\,\frac{\Delta S}{u^*}\,a\theta\right]$$

где u^* – заданная величина перемещения, в долях которой отыскиваются значения $u_\rho^{\alpha\beta}$, u_φ^{ij}; $\lambda_*^\circ=\lambda_* u^* / \Delta S$.

В соответствии с работой [7]:

$$T=\left[\tau_0^*\left(\frac{t_0}{\theta}\right)^2-\tau_1^*\right]\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_0-\varepsilon)^2\frac{H^\gamma}{1+H^\gamma}, \qquad \gamma=K_0\frac{\theta}{t_0}-K_1 \tag{3.4}$$

Здесь K_0, K_1, ε, τ_0^*, τ_1^* – коэффициенты, зависящие от марки стали; $t_0=1000°$ C; $\varepsilon=\Gamma/\sqrt{3}$.

Учитывая, что деформации и перемещения малы, полагаем $v_k=u_k/\tau$, $v^*=u^*/\tau$ (τ – время деформации). Тогда $v_k=v^*u_k^\circ$, $u_k^\circ=u_k/u^*$, значение $\xi_{kl}=0.5\ (\Delta v_k/\Delta x_l+\Delta v_l/\Delta x_k)$ будет $\xi_{kl}=0.5\ (\Delta u_k^\circ/\Delta x_l^\circ+\Delta u_l^\circ/\Delta x_k^\circ)\ v^*/\Delta S$, $\Delta x_k^\circ=\Delta x_k/\Delta S$, следовательно, $H=\Gamma^\circ v^*/\Delta S$, $\Gamma^\circ=\Gamma\Delta S/u^*$.

На фиг. 6, *а*—*в* приведены результаты решения задачи при $b/\Delta S=7.15$, $R_1/\Delta S=1.78$, $\varphi_1=45°$, $\Delta S/u^*=14$, $v^*/\Delta S=1$ *сек*. Коэффициенты в (3.4) приняты соответствующими марки стали (Ст. 3 [7]): $\tau_1^*=3.38$ *кг/мм*^{2}, $\tau_0=8.2$ *кг/мм*^{2}, $\varepsilon_0=2.3$, $K_1=-0.0001$, $K_0=0.407$. Принято $a=1.2\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$. Распределение температуры θ_I к моменту времени τ примем: $\theta_1=1500°$ C, $\theta_2=1400°$ C, $\theta_3=1300°$ C, $\theta_4=1100°$ C. Цифры на фиг. 6, *а* соответствуют значениям $i=1, 2, 3, 4$, на фиг. 6, *в* – значениям $\alpha=2, 3, 4$. Графики напряжений на фиг. 6, *а*, *в* приведены в *кг/мм*^{2}. На фиг. 6, *б* сплошными линиями показаны кривые $u_\varphi(\varphi)$ при $i=1, 4$, пунктирной – $u_\rho(\varphi)$ при $\alpha=5$. Кривые $u_\varphi(\varphi)$ при $i=2, 3$ располагаются между кривыми $u_\varphi(\varphi)$ при $i=1, 4$; кривые $u_\rho(\varphi)$ при $\alpha=1, 2, 3, 4$ близки к $u_\rho(\varphi)$ при $\alpha=5$ и поэтому на графике не показаны.

Разработанный алгоритм может быть применен также для расчета симметричных арочных конструкций, шахтных сводов и оболочек из композиционных материалов.

Поступила 4 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., Гостехиздат, 1950.
3. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. Изд-во МГУ, 1960.
4. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
5. *Одиноков В. И.* Численный метод решения дифференциальных уравнений пластического течения. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 12.
6. *Одиноков В. И.* Численное решение некоторых задач о деформации несжимаемого материала. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 1.
7. *Одиноков В. И., Хайкин Б. Е.* Аналитическое описание упрочнения сталей в зависимости от скорости, степени и температуры деформации. В сб.: Теория и технология прокатки, № 176. Изд-во Уральск. политехн. ин-та, 1969, вып. 176.