

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Б. В. КОСТРОВ, В. И. ОСАУЛЕНКО

(Москва)

Рассматривается плоская задача о распространении трещины в безграничной упругой среде, которая в начальный момент времени находится в равновесии под действием произвольных статических нагрузок, в интервале времени, когда возмущения от одного конца трещины еще не достигают второго конца. При этом трещина может считаться полубесконечной.

Получены выражения для напряжений на продолжении трещины и коэффициентов интенсивности напряжений у ее края при произвольном законе его движения, таком, что скорость трещины всегда меньше скорости волн Релея. Решение для общего случая строится как предел решения для распространения трещины с кусочно-постоянной скоростью.

Для анализа распространения трещин в механике разрушения необходимо знать коэффициенты интенсивности напряжений k_1 , k_2 , k_3 (для отрыва, скола и среза) как функционалы от закона движения края трещины. При этом нужно решить задачу динамической теории упругости для произвольного закона движения края трещины, считая лишь, что в любом случае скорость трещины меньше скорости поперечных волн.

В работе [1] это было сделано для частного случая плоской задачи для трещины среза. В [2, 3] сделана попытка найти коэффициент интенсивности для трещины отрыва, распространяющейся под действием приложенных к среде постоянных нагрузок, уравновешенных в начальный момент времени. Получено, что в момент остановки трещины, двигавшейся до этого с постоянной скоростью, впереди нее на отрезке, расширяющемся со скоростью продольных волн, устанавливаются не зависящие от времени напряжения, совпадающие с напряжениями, возникающими в соответствующей статической задаче¹. На основе этого найдено выражение для коэффициента интенсивности напряжения для трещины, распространяющейся с кусочно-постоянной скоростью.

Затем, путем предельного перехода от распространения с кусочно-постоянной скоростью к произвольному закону распространения получено выражение для коэффициента интенсивности в общем случае. Однако при внимательном рассмотрении этот вывод является нестрогим. Дело в том, что коэффициент интенсивности определяется как предел $k = \sqrt{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \sigma(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$, где $\sigma(\Delta x)$ — напряжение на расстоянии Δx впереди края трещины. Обозначим $\sigma(\Delta x/l(t))$ напряжение на расстоянии Δx впереди края трещины, распространяющейся по закону $l(t)$. Пусть $L(t)$ — аппроксимация кривой $l=l(t)$ ломаной линией, причем ΔL_m — наибольшая длина отрезка, на котором скорость трещины считается постоянной.

Тогда

$$k(l(t)) = \sqrt{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \sigma(\Delta x/l(t)) = \sqrt{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \lim_{\Delta L_m \rightarrow 0} \sigma(\Delta x/L(t)) \quad (0.1)$$

В [3, 4] найдена величина

$$\lim_{\Delta L_m \rightarrow 0} k(L(t)) = \sqrt{2} \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \sigma(\Delta x/L(t)) \quad (0.2)$$

¹ Этот вывод оказывается неточным. В действительности, как показано в п. 3, статические напряжения устанавливаются на отрезке, расширяющемся со скоростью поперечных волн и только при условии, что скорость распространения трещины до-релевская.

отличающаяся от $k(l(t))$ порядком выполнения предельных переходов.

Как будет показано в этой работе, порядок предельного перехода в данном случае существен, так что выражение (0.2) отличается от искомого выражения для коэффициента интенсивности (0.1). Здесь рассматривается та же задача, что и в работе [3], но для выяснения выражения (0.1) требуется получить сначала не только коэффициент интенсивности при распространении с кусочно-постоянной скоростью, но и выражение для напряжений на продолжении трещины в произвольной точке и для произвольного момента времени, что не может быть сделано полубратным методом, использованным в [2, 3].

В результате получается то же выражение для коэффициента интенсивности напряжений, что и в работе [3], но строго обоснованное. Кроме того, доказанная в п. 3 для общего случая независимость напряжений на продолжении остановившейся трещины за фронтом поперечной волны, излученной в момент остановки, от истории распространения трещины, позволяет получить решение задачи также и для произвольных, зависящих от времени нагрузок (хотя и путем громоздких вычислений).

Следует подчеркнуть также, что в данной работе в отличие от работы [3] результат получен в единообразном виде для всех трех типов разрушения — отрыва, скола и среза, а также для любого смешанного случая. Другой подход к задаче реализован в [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородную изотропную упругую среду с модулем сдвига μ и скоростями продольных и поперечных волн a и b соответственно, заполняющую все пространство вне трещины, поверхность которой в декартовой системе координат x, y, z задается соотношениями: $y=0, -\infty < z < \infty, -d < x < 0$.

Пусть среда находится в момент времени $t=0$ в равновесии под действием статических нагрузок, не зависящих от z . Поверхность трещины считается свободной от напряжений

$$\sigma_{xy}^{\circ} = \sigma_{yy}^{\circ} = \sigma_{zy}^{\circ} = 0 \quad (y=0, -d < x < 0)$$

Обозначим через $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ напряжения на оси x вне трещины в начальный момент времени $t=0$:

$$p_1(x) = \sigma_{yy}^{\circ}(x, 0), \quad p_2(x) = \sigma_{xy}^{\circ}(x, 0), \quad p_3(x) = \sigma_{zy}^{\circ}(x, 0) \\ (x > 0 \text{ или } x < -d)$$

Пусть в момент времени $t=0$ трещина начинает распространяться, так что положение ее правого края задается уравнением $x=l(t)$, причем $l'(t) < c$, c — скорость релеевских волн. Ограничимся интервалом времени $0 \leq t < d/a$, в котором возмущения от левого края трещины не достигают правого края. При этом наличие левого края трещины не сказывается на упругом поле у правого края, и трещину можно считать полубесконечной, т. е. положить $d=\infty$. Обозначим через u_x, u_y, u_z смещения, а через $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots$ — изменения напряжений (возмущений) из-за распространения трещины. Эти величины, очевидно, не зависят от z (плоская деформация). В момент времени $t=0$ возмущения, связанные с распространением трещины, отсутствуют, что дает начальные условия

$$u_x = u_y = u_z = \dot{u}_x = \dot{u}_y = \dot{u}_z = 0 \quad (t=0) \quad (1.1)$$

Поверхность трещины считается свободной от напряжений. Это условие, записанное для возмущения, имеет вид

$$\sigma_{yy} = -p_1(x)H(x), \quad \sigma_{xy} = -p_2(x)H(x), \quad \sigma_{zy} = -p_3(x)H(x) \\ (-\infty < x < l(t)) \quad (1.2)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда: $H(x)=0$ при $x \leq 0$, $H(x)=1$ при $x > 0$. Вне трещины смещения и напряжения должны быть непрерывны; поскольку

в силу (1.2) напряжения σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zy} непрерывны также и на поверхности трещины, получаем

$$[\sigma_{xy}] = [\sigma_{yy}] = [\sigma_{zy}] = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.3)$$

$$[u_x] = [u_y] = [u_z] = 0 \quad (l(t) < x < \infty) \quad (1.4)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины на оси x .

Разобьем вектор смещения u на два слагаемых u^s и u^a : симметричное и антисимметричное относительно оси x соответственно

$$u_x^s(x, y, t) = u_x^s(x, -y, t), \quad u_x^a(x, y, t) = -u_x^a(x, -y, t)$$

$$u_y^s(x, y, t) = -u_y^s(x, -y, t), \quad u_y^a(x, y, t) = u_y^a(x, -y, t)$$

$$u_z^s(x, y, t) = u_z^s(x, -y, t), \quad u_z^a(x, y, t) = -u_z^a(x, -y, t)$$

Тогда σ_{xy}^s , σ_{zy}^s , σ_{yy}^a будут, очевидно, нечетными, а σ_{xy}^a , σ_{zy}^a , σ_{yy}^s — четными функциями y .

Из условий (1.3) и (1.4) следует

$$\sigma_{xy}^s = 0 \quad (y=0+, -\infty < x < \infty), \quad u_y^s = 0 \quad (y=0+, l(t) < x < \infty) \quad (1.5.1)$$

$$\sigma_{yy}^s = -p_1(x)H(x) \quad (y=0+, -\infty < x < l(t)), \quad \sigma_{zy}^s = 0 \quad (y=0+, -\infty < x < \infty) \quad (1.5.2)$$

$$u_x^a = 0 \quad (y=0+, l(t) < x < \infty), \quad \sigma_{yy}^a = 0 \quad (y=0+, +\infty < x < \infty) \quad (1.6.1)$$

$$\sigma_{xy}^a = -p_2(x)H(x) \quad (y=0+, -\infty < x < l(t)) \\ \sigma_{zy}^a = -p_3(x)H(x) \quad (y=0+, -\infty < x < l(t)), \quad u_z^a = 0 \quad (y=0+, l(t) < x < \infty) \quad (1.6.2)$$

Уравнения движения и соотношения, связывающие напряжения и смещения, имеют вид

$$u_x'' = a^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1.7)$$

$$u_y'' = a^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.8)$$

$$u_z'' = b^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (1.9)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

$$\sigma_{yy} = \mu(\kappa - 2) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \left(\kappa = \frac{b}{a} \right) \quad (1.12)$$

Очевидно, что симметричная и антисимметричная составляющие поля должны удовлетворять независимо уравнениям (1.7)–(1.12) и начальным условиям (1.1). Тогда из условия (1.5.2) получаем $u_z^s = 0$, а остальные величины должны быть найдены из трех независимых граничных задач (1.5.1), (1.6.1) и (1.6.2) для уравнений (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) и (1.9), (1.12) соответственно. В каждой из этих задач лишь одно граничное условие является смешанным. При этом для обеспечения единственности реше-

ния должно еще быть добавлено условие на краю трещины, которое в данном случае можно записать в виде

$$\sigma_{yy}^s = O((x-l)^{-1/2}), \quad \sigma_{xy}^a = O((x-l)^{-1/2}), \quad \sigma_{zy}^a = O((x-l)^{-1/2}) \\ (x \rightarrow l(t) + 0) \quad (1.13)$$

2. Преобразование Лапласа. Вывод основных уравнений. Применим ко всем искомым величинам двойное преобразование Лапласа по времени и координате x . Образы функций будем обозначать теми же буквами, что и сами функции, делая различие лишь в аргументах, например

$$u_x(q, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^\infty e^{-qx} u_x(x, y, t) dx dt \quad (2.1)$$

Применяя преобразование (2.1) к уравнениям движения (1.7)–(1.9), получим

$$(p^2 - a^2 q^2) u_x - b^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - (a^2 - b^2) q \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$(p^2 - b^2 q^2) u_y - a^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - (a^2 - b^2) q \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \quad (p^2 - b^2 q^2) u_z - b^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$$

Решение этой системы уравнений имеет вид (для $y > 0$)

$$u_x(q, y, p) = qA(p, q) e^{-yr_a} - r_b B(p, q) e^{-yr_b} \quad (2.3)$$

$$u_y(q, y, p) = -r_a A(p, q) e^{-yr_a} - qB(p, q) e^{-yr_b} \quad (2.4)$$

$$u_z(q, y, p) = C(p, q) e^{-yr_b} \quad (r_h = \sqrt{p^2 k^2 - q^2}) \quad (2.5)$$

Из однородности начальных условий следует, что функции $A(p, q)$, $B(p, q)$, $C(p, q)$ должны быть регулярны при $\text{Re } p > 0$ и

$$-a^{-1} \text{Re } p < \text{Re } q < a^{-1} \text{Re } p \quad (2.6)$$

а радикалы в выражениях (2.3)–(2.5) следует униформизовать так, чтобы их действительные части были положительны в полосе (2.6). Для этого проведем разрезы в комплексной плоскости q , так что на разрезах отношение q/p действительно и $|q/p| > a^{-1}$.

Пользуясь условиями (1.5), (1.6), представим решения (2.3)–(2.5) в виде

$$u_x^s = \frac{\sigma_1(p, q)}{\mu R(q/p)p} \left[\frac{q}{p} \left(\frac{1}{b^2} - 2 \frac{q^2}{p^2} \right) e^{-yr_a} - 2 \frac{q}{p} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{q^2}{p^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{q^2}{p^2}} e^{-yr_b} \right] \quad (2.7)$$

$$u_y^s = - \frac{\sigma_1(p, q)}{\mu R(q/p)p} \left[\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{q^2}{p^2}} \left(\frac{1}{b^2} - 2 \frac{q^2}{p^2} \right) e^{-yr_a} + 2 \frac{q}{p} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{q^2}{p^2}} e^{-yr_b} \right] \quad (2.8)$$

$$u_x^a = - \frac{\sigma_2(p, q)}{\mu R(q/p)p} \left[2 \frac{q^2}{p^2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{q^2}{p^2}} e^{-yr_a} + \left(\frac{1}{b^2} - 2 \frac{q^2}{p^2} \right) \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{q^2}{p^2}} e^{-yr_b} \right]$$

$$u_y^a = \frac{\sigma_2(p, q)}{\mu R(q/p)p} \left[2 \frac{q}{p} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{q^2}{p^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{q^2}{p^2}} e^{-yr_a} - \frac{q}{p} \left(\frac{1}{b^2} - 2 \frac{q^2}{p^2} \right) e^{-yr_b} \right] \quad (2.9)$$

$$u = u^a = - \frac{\sigma_3(p, q)}{\mu p \sqrt{b^2 - q^2/p^2}} e^{yr_b}, \quad R(s) = (b^2 - 2s^2)^2 + 4s^2 \sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{b^2 - s^2}$$

Здесь через $\sigma_i(p, q)$ ($i=1, 2, 3$) обозначены преобразования Лапласа от граничных значений напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_1(p, q) &\equiv \sigma_{yy}(q, 0; p) = \sigma_{yy}^s(q, 0, p), \quad \sigma_2(p, q) \equiv \sigma_{xy}(q, 0, p) = \sigma_{xy}^a(q, 0, p) \\ \sigma_3(p, q) &\equiv \sigma_{zy}(q, 0, p) = \sigma_{zy}^a(q, 0, p)\end{aligned}$$

Соответственно введем обозначения для оригиналов

$$\sigma_1(t, x) = \sigma_{yy}^s(x, 0, t), \quad \sigma_2(t, x) = \sigma_{xy}^a(x, 0, t), \quad \sigma_3(t, x) = \sigma_{zy}^a(x, 0, t)$$

Аналогично положим

$$u_1(t, x) = u_y^s(x, 0, t), \quad u_2(t, x) = u_x^a(x, 0, t), \quad u_3(t, x) = u_z^a(x, 0, t)$$

Из (2.7)–(2.9) находим

$$\begin{aligned}pK_i(q/p)u_i(p, q) + \sigma_i(p, q) &= 0, \quad K_1(s) = \mu b^2 R(s) / \sqrt{a^2 - s^2} \\ K_2(s) &= \mu b^2 R(s) / \sqrt{b^2 - s^2}, \quad K_3(s) = \mu / \sqrt{b^2 - s^2}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению функций $\sigma_i(t, x)$, являющихся граничными значениями напряжений на линии трещины. Для этого имеем функциональные уравнения (2.10) и условия

$$u_i(t, x) = 0 \quad (l(t) < x < \infty), \quad \sigma_i(t, x) = -p_i(x)H(x) \quad (-\infty < x < l(t))\quad (2.11)$$

$$\sigma_i \approx k_i / \sqrt{2(x - l(t))} \quad (x \rightarrow l(t) + 0)\quad (2.12)$$

следующие из граничных условий (1.5), (1.6), а также из условий на ребре (1.13).

В дальнейшем потребуется рассматривать уравнения также в движущейся с постоянной скоростью v системе координат (x', t) $x' = z - vt$. Обозначим преобразования Лапласа по x' и t через $\sigma_i(p, q, v)$

$$\sigma_i(p, q, v) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-qx'} \sigma_i(t, x' + vt) dx' dt$$

Производя замену переменной, получим $\sigma_i(p, q, v) = \sigma_i(p - vq; q)$.

Уравнения (2.10) запишутся для движущейся системы в виде

$$pK_{iv}(q/p)u_i(p, q, v) + \sigma_i(p, q, v) = 0, \quad K_{iv}(s) = (1 - vs)K_i(s / (1 - vs))\quad (2.13)$$

Функции $K_i(s)$ встречаются при решении задач дифракции упругих волн на полуплоскости. Для решения уравнения (2.10) необходимо иметь факторизацию этих функций вида: $K_i(s) = C_i K_i^+(s) K_i^-(s)$, где $K_i^\pm(s)$ регулярны и не обращаются в нуль в правой и в левой полуплоскостях s соответственно. Выражения для $K_i^\pm(s)$, $C_i(s)$ имеют вид

$$K_1^\pm(s) = \frac{c^{-1} \pm s}{\sqrt{a^{-1} \pm s}} S(\pm s), \quad K_2^\pm(s) = \frac{c^{-1} \pm s}{\sqrt{b^{-1} \pm s}} S(\pm s)\quad (2.14)$$

$$K_3^\pm(s) = \sqrt{b^{-1} \pm s}, \quad C_1 = C_2 = \mu(1 - \kappa^2), \quad C_3 = \mu$$

$$S(s) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{a^{-1}}^{-1} \operatorname{arctg} \frac{4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - a^{-2}} \sqrt{b^{-2} - \xi^2} d\xi}{(b^{-2} - 2\xi^2)^2 \xi + s} \right]$$

Отсюда видно, что $S(s)$ регулярна и не обращается в нуль вне отрезка действительной оси $-b^{-1} < s < a^{-1}$ и стремится к единице при $s \rightarrow \infty$. Функции $K_1^\pm(s)$ и $K_2^\pm(s)$ регулярны вне разрезов, проведенных по действительной

оси от точек $\pm a^{-1}$ до $\pm\infty$ соответственно, а для функций K_3^\pm разрезы должны начинаться от точек $\pm b^{-1}$.

Аналогичное разбиение справедливо и для функций $K_{iv}(s)$

$$K_{iv}(s) = C_i K_{iv}^+(s) K_{iv}^-(s), \quad K_{iv}^\pm(s) = \sqrt{1 - vs} K_i^\pm[s(1 - vs)^{-1}] \quad (2.15)$$

причем функции $K_{iv}^\pm(s)$ регулярны вне разрезов, проведенных до $\pm\infty$ от точек $(\pm a + v)^{-1}$ для $i=1, 2$ и от точек $(\pm b + v)^{-1}$ для $i=3$.

3. Функция Грина для неподвижной трещины. Напряжения на продолжении остановившейся трещины. Рассмотрим вспомогательную задачу о неподвижной полубесконечной трещине, на поверхности которой заданы мгновенные сосредоточенные нагрузки

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{hi} \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \quad (-\infty < x < 0), \quad u_i(t, x) = 0 \quad (0 < x < \infty, x_0 < 0, t_0 > 0)$$

где δ_{ih} — символ Кронекера, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В этом случае

$$\sigma_i(p, q) = \delta_{hi} \exp(-pt_0 - qx_0) + \sigma_i^+(p, q), \quad u_i(p, q) = u_i^-(p, q) \quad (3.1)$$

где $\sigma_i^+(p, q)$ регулярна при $\operatorname{Re} q > -\operatorname{Re} pa^{-1}$, а $u_i^-(p, q)$ при $\operatorname{Re} q > \operatorname{Re} pa^{-1}$. Кроме того, из условия на ребре следует

$$\begin{aligned} \sigma_i^+(p, q) &= O(q^{-1/2}), & q \rightarrow \infty, & \operatorname{Re} q > 0 \\ u_i^-(p, q) &= O(q^{-3/2}), & q \rightarrow \infty, & \operatorname{Re} q < 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставим выражения (3.1) в уравнения (2.10), разделенные на $K_i^+(q/p)$

$$pC_i K_i^-(q/p) u_i^-(p, q) + \delta_{hi} \exp(-pt_0 - qx_0) [K_i^+(q/p)]^{-1} + [K_i^+(q/p)]^{-1} \sigma_i^+(p, q) = 0 \quad (3.3)$$

Это уравнение справедливо при $-\operatorname{Re} pa^{-1} < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} pa^{-1}$. Имеем тождество

$$\frac{e^{-qx_0}}{K_i^+(q/p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{e^{-q'x_0} dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \frac{e^{-q'x_0} dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)}$$

$$(-\operatorname{Re} pa^{-1} < -c < \operatorname{Re} q < c < \operatorname{Re} pa^{-1})$$

Здесь первое слагаемое регулярно и стремится к нулю в левой, а второе — в правой полуплоскости q . Подставляя это разложение в (3.3), получим

$$\begin{aligned} pC_i K_i^-(q/p) \left(\frac{q}{p}\right) u_i^-(p, q) + \frac{\delta_{hi}}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{\exp(-q'x_0 - pt_0) dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)} = \\ = \frac{\delta_{ih}}{2\pi i} \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \frac{\exp(-q'x_0 - pt_0) dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)} - \frac{\sigma_i^+(p, q)}{K_i^+(q/p)} \end{aligned}$$

В силу (3.2) левая часть этого выражения регулярна и стремится к нулю при $\operatorname{Re} q < c$, а правая — при $\operatorname{Re} q > -c$, т. е. каждая из них является функцией, регулярной всюду и стремящейся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля такая функция тождественно равна нулю. Таким образом

$$\sigma_i^+(p, q) = \frac{\delta_{ih} K_i^+(q/p)}{2\pi i} \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \frac{\exp(-q'x_0 - pt_0) dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)} \quad (\operatorname{Re} q > -c) \quad (3.4)$$

$$u_i^-(p, q) = \frac{-\delta_{ih}}{2\pi i C_i K_i^+(q/p)} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{\exp(-q'x_0 - pt_0) dq'}{(q'-q)K_i^+(q'/p)} \quad (\operatorname{Re} q < c) \quad (3.5)$$

Так как $x_0 < 0$, контур интегрирования в (3.4) можно деформировать в левой полуплоскости. Стыгивая его к разрезу, соответствующему $K_i^+(q/p)$, получим

$$\sigma_i^+(p, q) = \frac{-\delta_{ih} K_i^+(q/p) p}{2\pi i} \int_{c_i}^{\infty} \frac{\exp(psx_0 - pt_0)}{ps + q} [L_i^-(s)] ds$$

для $\operatorname{Re} q > c$, $\operatorname{Re} p$, где $c_i = a^{-1}$ для $i=1, 2$ и $c_3 = b^{-1}$, и введено обозначение $L_i = (K_i)^{-1}$. Квадратные скобки обозначают скачок заключенной в них функции на действительной оси $[L_i(s)] = L_i(s+i0) - L_i(s-i0)$.

Напряжения $\sigma_i(t, x)$ вычисляются теперь путем обращения преобразований Лапласа

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{ik} \left[\delta(x-x_0) \delta(t-t_0) - \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} p \exp[p(t-t_0)] \int_{-i\infty+c'}^{i\infty+c'} K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \int_{c_t}^{\infty} \frac{\exp(psx_0 + qx)}{ps+q} [L_i^-(s)] ds dq dp \right]$$

Здесь можно изменить порядок интегрирования по s и q . Тогда интеграл вычисляется путем деформирования контура интегрирования по q . Получим

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{ik} \left[\delta(x-x_0) \delta(t-t_0) - \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} p \exp[p(t-t_0)] \int_{c_t}^{\infty} [L_i^-(s)] \int_{c_t}^{\infty} \left[\frac{K_i^-(s)}{s-s'} \right] \exp[p(sx_0 - s'x)] ds' ds dp H(x) \right]$$

Здесь снова можно изменить порядок интегрирования, что дает

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{ik} \left\{ \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) + \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{c_t}^{\infty} \int_{c_t}^{\infty} [L_i^-(s)] \left[\frac{K_i^-(s')}{s-s'} \right] \delta(t-t_0 - s'x + sx_0) ds' ds H(x) \right\}$$

Присутствие δ -функции позволяет вычислить один из интегралов

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{ik} \left\{ \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{c_t}^{c_t'} [L_i^-(s)] [M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)] ds H(x) H[t-t_0 - c_i(x-x_0)] \right\} \quad (3.6)$$

$$c_t' = c_t'(t, x) = \frac{t-t_0 - c_i x}{-x_0}, \quad M_i^- = \frac{K_i^-[(t-t_0 + sx_0)x^{-1}]}{s(x-x_0) - (t-t_0)}$$

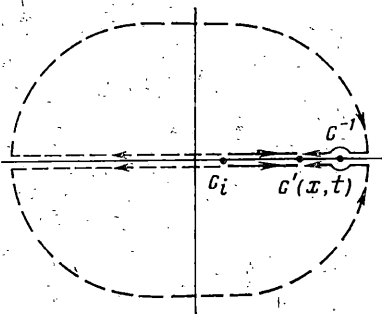
Здесь изменен знак второго члена, так как теперь скачок второго множителя под интегралом вычисляется по переменной s . Преобразуем решение (3.6) к другой форме. Для этого воспользуемся тождеством: $[A][B] = 2\{AB\} - \{A\}\{B\}$, где фигурные скобки означают сумму предельных значений функции на действительной оси $\{L_i^-(s)\} = L_i^-(s+i0) + L_i^-(s-i0)$.

Пользуясь этим, перепишем интеграл в (3.6) в виде

$$I \equiv \int_{c_t}^{c_t'} [L_i^-(s)] M_i^-(s, t-t_0, x, x_0) ds =$$

$$= 2 \int_{c_t}^{c_t'} \{L_i^-(s)\} M_i^-(s, t-t_0, x, x_0) ds -$$

$$- \int_{c_t}^{c_t'} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds$$



Фиг. 1

Первый интеграл можно рассматривать как контурный интеграл по двум отрезкам, лежащим непосредственно над и под действительной осью и проходящим от точки c_i до точки $c_i'(x, t)$ (см. фиг. 1). Деформируем эти контуры, как показано на фиг. 1, в две полуокружности бесконечно большого радиуса и отрезки, проходящие непосредственно над и под действительной осью от c_i до $-\infty$ и от $c_i'(x, t)$ до $+\infty$. Из (2.14) имеем

$$L_i^-(s) \approx \pm is^{-1/2}, \quad K_i^-[(t-t_0+sx)x^{-1}] \approx s^{1/2}(-x_0/x)^{1/2} \quad (s \rightarrow \infty, \text{Im } s \leq 0)$$

Поэтому вклад бесконечно удаленных полуокружностей равен $4\pi(-x_0/x)^{1/2} \times (x-x_0)^{-1}$.

Таким образом

$$I = - \int_{c_i}^{c_i'} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds - \int_{-\infty}^{c_i} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds - \int_{c_i}^{\infty} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds + \frac{4\pi \sqrt{-x_0}}{(x-x_0)\sqrt{x}}$$

При этом во втором интеграле учтено, что $L_i^-(s)$ регулярна на отрезке интегрирования, т. е.

$$2\{L_i^-(s)M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} = \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\}$$

и аналогичное преобразование проделано в третьем интеграле. Легко видеть, что все три слагаемых можно записать в виде одного интеграла

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds + \frac{4\pi \sqrt{-x_0}}{(x-x_0)\sqrt{x}}$$

Подставляя это выражение в (3.6) и учитывая (2.14), (3.5), получим

$$\sigma_i(t, x) = \delta_{ih} \left\{ \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) - \frac{\sqrt{-x/x_0}}{\pi(x-x_0)} H(x)\delta[t-t_0-c_i(x-x_0)] - (1-\delta_{is}) \left[\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{c_i'}^{c_i} \{L_i^-(s)\} \{M_i^-(s, t-t_0, x, x_0)\} ds H[x-x_0-b(t-t_0)] + \frac{G_i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \{M_i^-(c_i^{-1}, t-t_0, x, x_0)\} H \left[\frac{x}{b} - \frac{x_0}{c} - (t-t_0) \right] H(x) H \left(t-t_0 - \frac{x-x_0}{a} \right) \right] \right\}$$

$$G_i = i \lim_{s \rightarrow c_i^{-1}+i0} L_i^-(s) (c_i^{-1}-s) \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что напряжения перед кончиком трещины равны нулю за фронтом поперечной волны. Введем для функции Грина (3.7) специальное обозначение $\Sigma_{ih}^{\circ}(t-t_0, x, x_0)$. Пусть неподвижная трещина с концом в $x=l$ находится под действием нагрузок $\sigma_i(t, x) = -p_i(t, x)$. Тогда напряжение впереди нее при условии, что начальные условия однородные, найдется по формуле

$$\sigma_i(t, x) = - \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^l dx_0 \int_0^t p_k(t_0, x_0) \Sigma_{ih}^{\circ}(t-t_0, x-l, x_0-l) dt_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{x-l}} \int_0^{\xi_i} \frac{\sqrt{\xi}}{x-l+\xi} p_i \left(t - \frac{x-l+\xi}{v_i}, l-\xi \right) d\xi -$$

$$-(1-\delta_{is}) \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\xi_i} d\xi \left[\int_{\tau_i}^{\tau_0} p_i(t-\tau, l-\xi) \int_{\alpha_i}^{\alpha_0} \{L_i^-(s)\} \left\{ \frac{K_i^-[(\tau-s)/(x-l)]}{s(x-l+\xi)-\tau\xi} \right\} ds d\tau - \right.$$

$$\left. - 2\pi G_i \int_{\tau_i}^{\beta} p_i(t-\tau, l-\xi) \left\{ \frac{K_i^-[(\tau-\xi/c)/(x-l)]}{\tau-(x-l+\xi)/c} \right\} d\tau \right]$$

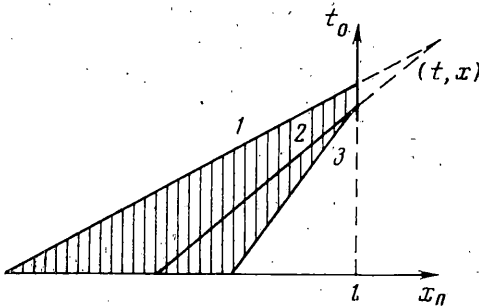
$\xi_i = vt - x + l$, $\tau_i = (x - l + \xi)/v_i$, $\alpha_1 = \tau - (x - l)/b$, $\alpha_2 = \xi/b$, $\beta = (x - l)/b + \xi/c$
 где $v_i = a$ для $i=1, 2$ и $v_i = b$ для $i=3$.

Область интегрирования в этой формуле показана на фиг. 2. Здесь — 1 — прямая $a(t - t_0) = x - x_0$; 2 — прямая $b(t - t_0) = x - x_0$; 3 — прямая $t - t_0 = x/b - x_0/c$.

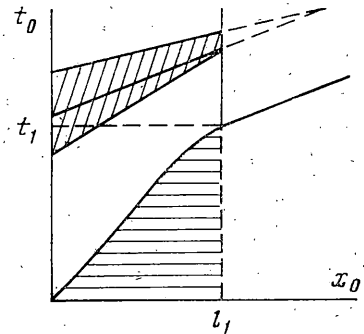
Рассмотрим подробнее частный случай, когда $p_i(t, x) = 0$ для $x < 0$. Тогда, если $t > x/b$, верхний предел в обоих интегралах по ξ будет равен l . Если p_i не зависит от t , то второе слагаемое в (3.8) окажется равным нулю, а первое слагаемое не будет зависеть от времени и совпадает со статическим решением

$$\sigma_i(t, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-l}} \int_0^l \frac{\sqrt{\xi}}{x-l+\xi} p_i(l-\xi) d\xi \quad \left(t > \frac{x-l}{b} + \frac{l}{c} \right) \quad (3.9)$$

Пусть теперь полубесконечная трещина, находящаяся в начальный момент под действием уравновешенных статических нагрузок, начинает распространяться произвольным образом (но так, что скорость ее в любой момент меньше скорости волн Релея) и затем в момент времени $t=t_1$ останавливается в точке l_1 (фиг. 3). Здесь нижняя кривая есть траектория края трещины с излученной в момент остановки поперечной волной $b(t-t_1) = x-l_1$. Очевидно, что при этом $ct_1 > l_1$. Пусть удалось найти напряжения впереди трещины для $x < l_1$ (в области, заштрихованной на фиг. 3).



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда для нахождения напряжений при $x > l_1$ можно воспользоваться решением (3.8), считая, что на трещине заданы нагрузки

$$-p_i^* = -p_i(x)H(x)(x < l(t)), \quad -p_i^* = \sigma_i(t, x) \quad (l(t) < x < l_1)$$

Рассмотрим вычисление напряжений в области $b(t-t_1) > x-l_1 > 0$. Для таких x и t , как видно на фиг. 3, в область интегрирования не попадают точки, находившиеся впереди распространяющейся трещины, и, следовательно, решение дается формулой (3.9). Таким образом, если трещина начинает распространяться с дорелевской скоростью из начального статического состояния и затем останавливается, то впереди нее на отрезке, расширяющемся со скоростью поперечных волн, устанавливаются статические напряжения. Это свойство, обнаруженное в работе [2], допускает обобщение: Действительно, пусть на трещине заданы произвольные, зависящие от времени нагрузки $-p_i(t, x)$. В этом случае из фиг. 3 также видно, что напряжения впереди остановившейся трещины при $b(t-t_1) > x-l_1$ зависят лишь от заданных нагрузок и не зависят от закона движения трещины при $t < t_1$. Они, очевидно, совпадают с напряжениями, которые возникли бы впереди трещины, конец которой с самого начала неподвижен и расположен в точке $x=l_1$.

4. Решение для кусочно-постоянной скорости. Вернемся к задаче, поставленной в п. 2 (условия (2.11), (2.12)), и рассмотрим пока частный случай, когда трещина распространяется с кусочно-постоянной скоростью, т. е. функция $l(t)$ имеет вид

$$l(t) = l_m + v_m(t - t_m) \quad (t_m \leq t \leq t_{m+1}) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

где скорость $v_m = (l_{m+1} - l_m)/(t_{m+1} - t_m)$ на любом отрезке постоянна и меньше чем c . Обозначим $\sigma_{im}(t, x)$ решение задачи при тех же самых нагрузках,

но для трещины, распространяющейся по закону $l(t)$ до момента времени $t=t_m$ и в этот момент останавливающейся. Очевидно, что это решение удовлетворяет условиям (2.11) при $x < l_m$ и любых t , а также при $t < t_m$ и любых x . Напряжения на продолжении остановившейся трещины даются при $b(t-t_m) > x-l_m$ выражением (3.9), которое в данном случае принимает вид

$$\sigma_{im} = p_i(x, l_m) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-l_m}} \int_0^{l_m} \frac{\sqrt{\xi}}{x-l_m+\xi} p_i(l_m-\xi) d\xi \quad (4.2)$$

Решение задачи для закона движения (4.1) совпадает для $t < T$ (T произвольно) с $\sigma_{iN}(t, x)$, где $t_{N-1} \leq T \leq t_N$.

Рассмотрим разности

$$\Delta \sigma_{im} = \sigma_{i(m+1)}(t, x) - \sigma_{im}(t, x), \quad \Delta u_{im} = u_{i(m+1)}(t, x) - u_{im}(t, x)$$

Для $t < T$ имеем

$$\sigma_i(t, x) = \sum_{m=0}^N \Delta \sigma_{im}(t, x), \quad u_i(t, x) = \sum_{m=0}^N \Delta u_{im}(t, x) \quad (4.3)$$

Граничные условия для $\Delta \sigma_{im}$ легко получаем из (4.2), учитывая, что σ_{im} и $\sigma_{i(m+1)}$ удовлетворяют задаче при $t < t_m$ и $t \leq t_{m+1}$ соответственно

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{im}(t, x) &= -p_{im}(x) H(x-l_m), \quad x < \min[l_{m+1}, l_m + v_m(t-t_m)] \\ \Delta u_{im}(t, x) &= 0, \quad x > \min[l_{m+1}, l_m + v_m(t-t_m)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $p_{im}(x) = p_i(x) + p_i(x, l_m)$ и, очевидно, $\Delta \sigma_{im}$ и Δu_{im} удовлетворяют нулевым начальным условиям при $t=t_m$.

Разобьем решение на два слагаемых

$$\Delta \sigma_{im} = \Delta \sigma_{im}^*(t, x) + \Delta \sigma_{im}^{**}(t, x), \quad \Delta u_{im} = \Delta u_{im}^*(x, t) + \Delta u_{im}^{**}(x, t) \quad (4.5)$$

и потребуем, чтобы удовлетворялись условия

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{im}^* = \Delta u_{im}^* = 0 \quad (t \leq t_m), \quad \Delta \sigma_{im}^* = -p_{im}(x) H(x-l_m) \quad (x < l_m + v_m(t-t_m)) \\ \Delta u_{im}^* = 0 \quad (x > l_m + v_m(t-t_m)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{im}^{**} = \Delta u_{im}^{**} = 0 \quad (t \leq t_{m+1}), \quad \Delta \sigma_{im}^{**} = 0 \quad (x < l_{m+1}) \\ \Delta u_{im}^{**} = -\Delta u_{im}^* \quad (x > l_{m+1}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Очевидно, что условия (4.6) и (4.7) влекут выполнение условий (4.5).

Для отыскания $\Delta \sigma_{im}^*$ и Δu_{im}^* перейдем в движущуюся систему координат $x' = x - v_m(t-t_m)$, $t' = t - t_m$. Из (4.6) заключаем, что преобразования Лапласа имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{im}^*(p, q, v_m) &= -e^{-q l_m} (p - v_m q)^{-1} P_{im}(p/q) + \Delta \sigma_{im}^{*+}(p, q, v_m) \\ \Delta u_{im}^*(p, q, v_m) &= \Delta u_{im}^{*-}(p, q, v_m) \end{aligned} \quad (4.8)$$

где σ_{im}^{*+} регулярна в полуплоскости $\text{Re } q > -a^{-1} \text{Re } p$, а Δu_{im}^{*-} — в полуплоскости $\text{Re } q < a^{-1} \text{Re } p$, и в соответствующих полуплоскостях справедливы оценки

$$\Delta \sigma_{im}^{*+} \approx e^{-l_m q} q^{-1/2} (\text{Re } q \rightarrow \infty), \quad \Delta u_{im}^{*-} \approx e^{-l_m q} q^{-3/2} (\text{Re } q \rightarrow -\infty) \quad (4.9)$$

Функция $P_{im}(z)$ равна

$$P_{im}(z) = \int_0^{\infty} p_{im}(x+l_m) e^{-zx} dx \quad (4.10)$$

Подставляя выражения (4.8) в функциональное уравнение (2.13), получим

$$pC_i K_{iv_m}^-(q/p) e^{qtm} \Delta u_{im}^*(p, q) + \Delta \sigma_{im}^{*+}(p, q, v_m) L_{iv_m}^+(q/p) e^{qtm} - \\ - (p - v_m q)^{-1} P_{im}(p/v_m) L_{iv_m}^+(p/q) = 0$$

Учитывая свойства регулярности неизвестных функций, найдем, как обычно

$$\Delta \sigma_{im}^{*+}(p, q) = \frac{e^{-qtm}}{p - v_m q} \left[1 - \sqrt{v_m} K_{iv_m}^+ \left(\frac{q}{p} \right) \right] P_{im} \left(\frac{p}{v_m} \right) \quad (4.11)$$

$$\Delta u_{im}^*(p, q) = \frac{\sqrt{v_m}}{p C_i (p - v_m q)} e^{-qtm} L_{iv_m}^- \left(\frac{q}{p} \right) P_{im} \left(\frac{p}{v_m} \right)$$

Подставляя (4.11) в (4.8), найдем

$$\Delta \sigma_{im}^*(p, q, v_m) = \frac{-\sqrt{v_m}}{p - v_m q} e^{-qtm} K_{iv_m}^+ \left(\frac{q}{p} \right) P_{im} \left(\frac{p}{v_m} \right)$$

Чтобы найти преобразования Лапласа относительно неподвижной системы координат, необходимо заменить p на $p + v_m q$ и воспользоваться соотношениями (2.15). Кроме того, следует учесть сдвиг по времени, для чего полученные выражения нужно умножить на e^{-pt} . В результате получим

$$\Delta \sigma_{im}^*(p, q) = - \frac{\exp(-pt_m - ql_m) \sqrt{v_m}}{\sqrt{p(p + v_m q)}} K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) P_{im} \left(\frac{p}{v_m} + q \right) \quad (4.12)$$

$$\Delta u_{im}^*(p, q) = \frac{\exp(-pt_m - ql_m)}{p C_i \sqrt{p(p + v_m q)}} L_i^- \left(\frac{q}{p} \right) P_{im} \left(\frac{p}{v_m} + q \right) \quad (4.13)$$

Для определения $\Delta \sigma_{im}^{**}$ и Δu_{im}^{**} получим сначала выражение преобразования Лапласа от Δu_{im}^{**}

$$\Delta u_{im}^{**}(p, q) = \Delta u_{im}^{**}{}^-(p, q) - \int_{l_{m+1}}^{\infty} e^{-pt} \int_{l_{m+1}}^{\infty} e^{-qx} \Delta u_{im}^*(t, x) dx dt = \\ = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-i\infty - c}^{i\infty - c} \int_{l_{m+1}}^{\infty} \Delta u_{im}^*(p, q) \exp[(q' - q)x] dx dq' + \Delta u_{im}^{**}{}^-(p, q) = \\ = \Delta u_{im}^{**}{}^-(p, q) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty - c}^{i\infty - c} \Delta u_{im}^*(p, q) \exp[(q' - q)l_{m+1}] \frac{dq'}{q' - q}$$

$$(\operatorname{Re} q > -c > -a^{-1} \operatorname{Re} p)$$

Сдвигая контур интегрирования в этом выражении вправо, получим

$$\Delta u_{im}^{**}(p, q) = \Delta u_{im}^{**}{}^-(p, q) - \Delta u_{im}^*(p, q) + e^{ql_{m+1}} f^-(p, q)$$

где $f^-(p, q)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} q < a^{-1} \operatorname{Re} p$ и стремится в этой полуплоскости к нулю как q^{-1} , а $\Delta u_{im}^*(p, q)$ также регулярна в этой полуплоскости, но ее поведение в бесконечности определяется оценкой $\Delta u_{im}^{**} \approx e^{-ql_{m+1}} q^{-1/2}$, аналогичной (4.9).

Далее, из (4.7) следует, что $\Delta \sigma_{im}^{**}(p, q) = \Delta \sigma_{im}^{**}{}^-(p, q)$; т. е. регулярна в правой полуплоскости и стремится в этой полуплоскости к нулю как $e^{-ql_{m+1}} q^{-1/2}$.

Теперь уравнение (2.10) примет вид

$$pC_i K_i^- \left(\frac{q}{p} \right) [\Delta u_{im}^{**} + e^{-ql_{m+1}} f(p, q)] e^{ql_{m+1}} - \\ - pC_i K_i^- \left(\frac{q}{p} \right) e^{ql_{m+1}} \Delta u_{im}^* + \Delta \sigma_{im}^{**} e^{ql_{m+1}} L_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) = 0$$

Разложение второго члена на два слагаемых, регулярных и стремящихся к нулю в соответствующих полуплоскостях, имеет вид

$$pC_i K_i^- \left(\frac{q}{p} \right) e^{ql_{m+1}} \Delta u_{im}^*(p, q) = \frac{-pC_i}{2\pi i} \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \frac{K_i^-(q'/p) \Delta u_{im}^*(p, q')}{q'-q} e^{q'l_{m+1}} dq' + \\ + \frac{pC_i}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} \frac{K_i^-(q/p) \Delta u_{im}^*(p, q')}{q'-q} e^{q'l_{m+1}} dq'$$

После обычных рассуждений получим

$$\Delta \sigma_{im}^{**} = \frac{-e^{-ql_{m+1}}}{2\pi i} pC_i K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \frac{K_i^-(q'/p) \Delta u_{im}^*(p, q')}{q'-q} e^{q'l_{m+1}} dq' \\ (-a^{-1} \operatorname{Re} p < c < 0)$$

Подставляя в это выражение u_{im}^* из (4.13), получим

$$\Delta \sigma_{im}^{**} = \frac{\sqrt{v_m}}{2\pi i} \exp(-ql_{m+1} - pt_m) K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \times \\ \times \int_{-i\infty-c}^{i\infty-c} \exp[q'(l_{m+1} - l_m)] \frac{P_{im}(q' + p/v_m) dq'}{\sqrt{p(p+v_m q')}(q'-q)}$$

Подставляя сюда выражение (4.10) и меняя порядок интегрирования, получим после преобразований

$$\sigma_{im}^{**} = \frac{\exp(-ql_{m+1} - pt_{m+1}) \sqrt{v_m}}{\sqrt{p(p+v_m q)}} K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \times \\ \times \int_{l_{m+1}}^{\infty} p_{im}(\xi) \exp \left[\left(\frac{p}{v_m} + q \right) (l_{m+1} - \xi) \right] d\xi + \frac{1}{\pi} \exp(-ql_{m+1} - pt_{m+1}) K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}(ps+q+p/v_m)} \int_{l_m}^{l_{m+1}} p_{im}(\xi) \exp \left[\left(q + \frac{p}{v_m} \right) (l_m - \xi) \right] d\xi$$

Подставляя выражение (4.10) в (4.12), получим

$$\Delta \sigma_{im}^* = \frac{-\exp(-ql_m - pt_m) \sqrt{v_m}}{\sqrt{p(p+v_m q)}} K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \int_{l_m}^{\infty} p_{im}(\xi) \exp \left[\left(q + \frac{p}{v_m} \right) (l_m - \xi) \right] d\xi$$

Складывая $\Delta\sigma_{im}^*$ и $\Delta\sigma_{im}^{**}$, приведем выражение для $\Delta\sigma_{im}$ к виду

$$\Delta\sigma_{im} = \exp(-ql_{m+1} - pt_{m+1}) K_i^+ \left(\frac{q}{p} \right) \int_{l_m}^{l_{m+1}} \left[\frac{\sqrt{v_m} \exp[(q+p/v_m)(l_{m+1}-\xi)]}{\sqrt{p(p+v_mq)}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp[ps(\xi-l_{m+1})] ds}{\sqrt{s(ps+q+p/v_m)}} \right] p_{im}(\xi) d\xi \quad (4.14)$$

Для вычисления обратного преобразования Лапласа от этого выражения, воспользуемся теоремой о свертке. Представим (4.14) в виде

$$\Delta\sigma_{im}(p, q) = p(p^{-1}K_i^+)(F_{im}), \quad F_{im} = \int_{l_m}^{l_{m+1}} p_{im}(\xi) \left[\frac{\exp[(q+p/v_m)(l_{m+1}-\xi)]}{\sqrt{p(q+p/v_m)}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp[ps(\xi-l_{m+1})] ds}{\sqrt{s(ps+q-p/v_m)}} \right] d\xi \exp(-pt_{m+1} - ql_{m+1}) \quad (4.15)$$

Обратное преобразование Лапласа от $p^{-1}K_i^+(q/p)$ равно

$$(2\pi ix)^{-1} [K_i^-(t/x)] H(x) \quad (4.16)$$

где, как обычно, $[K(s)] = K(s+i0) - K(s-i0)$. При $x \rightarrow 0$ эта функция ведет себя как $x^{-1/2}H(x)$. Чтобы преобразование Лапласа от (4.16) существовало и равнялось $K_i^+(q/p)p^{-1}$, необходимо функцию (4.16) рассматривать как обобщенную — так называемую конечную часть [5].

Обратное преобразование Лапласа от $F_{im}(p, q)$ равно

$$F_{im}(t, x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{t-\tau(x)}} \int_{l_m}^x p_{im}(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} H(x-l_m) H(l_{m+1}-x) H[t-\tau(x)]$$

где $\tau(x) = t_m + (x-l_m)/v_m$ при $l_m \leq x \leq l_{m+1}$ — функция, обратная к $l(t)$ (4.1). Подставим сюда выражение для $p_{im}(\xi)$ из (4.4), (4.2)

$$F_{im}(t, x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{t-\tau(x)}} \int_{l_m}^x \left[p_i(\xi) + \frac{1}{\pi\sqrt{\xi-l_m}} \int_0^{l_m} p_i(\eta) \frac{\sqrt{l_m-\eta}}{\xi-\eta} d\eta \right] \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \quad (l_m \leq x \leq l_{m+1})$$

Во втором слагаемом поменяем порядок интегрирования и вычислим внутренний интеграл. Окончательно получим

$$F_{im}(t, x) = \frac{1}{\pi\sqrt{t-\tau(x)}} \int_0^x p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} H(l_{m+1}-x) H(x-l_m) H[t-\tau(x)] \quad (4.17)$$

Теперь, свертывая (4.16) с (4.17), получим

$$\Delta\sigma_{im}(t, x) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{l_m}^x \frac{d\eta}{x-\eta} \times \\ \times \int_{\tau(\eta)}^{\tau_i} \left[K_i^-\left(\frac{t-\tau}{x-\eta}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau(\eta)}} H(l_{m+1}-\eta) \int_0^x p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}}$$

где $\tau_i^* = t - (x - \eta) / v_i$, $x^* = x^*(t, x)$ — при $t < \tau(x)$ решение уравнения $v_i t - x = v_i \tau(x^*) - x^*$, а при $t > \tau(x)$, $x^* = x$. В последнем случае интеграл по η следует понимать в обобщенном смысле — как конечную часть расходящегося интеграла по Адамару.

Теперь легко выполнить суммирование по m в соответствии с (4.3), что дает решение для распространения трещины с кусочно-постоянной скоростью в виде

$$\sigma_i(t, x) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x^*} \frac{d\eta}{x-\eta} \int_{\tau(\eta)}^{\tau_i^*} \left[K_i^- \left(\frac{t-\tau}{x-\eta} \right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau(\eta)}} \int_0^{\xi} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}} \tag{4.18}$$

В силу (2.10), (4.3), (4.15) имеем

$$u_i(p, q) = p^{-1} C_i^{-1} L_i^-(q/p) F_i(p, q) \quad (F_i = \Sigma F_{im})$$

Очевидно, $F_i(p, q)$ является преобразованием Лапласа от

$$F_i(t, x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{t-\tau(x)}} \int_0^{x^*} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} H(t-\tau(x)) \tag{4.19}$$

Обратное преобразование от $L_i^-(q/p)^{-1}$ равно

$$(2\pi i x)^{-1} [L_i^-(-t/x)] H(-x) \tag{4.20}$$

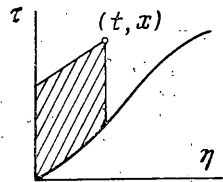
Свертывая (4.19) с (4.20), получим

$$u_i(t, x) = \frac{i}{2\pi} \int_x^{x^*} \frac{d\eta}{x-\eta} \int_{\tau(\eta)}^{\tau_i} \left[L_i^- \left(\frac{t-x}{\eta-x} \right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau(\eta)}} \int_0^{\xi} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}} \quad (\tau_i = 2t - \tau_i^*) \tag{4.21}$$

где x^* при $t > \tau(x)$ — решение уравнения $v_i t + x = v_i \tau(x^*) + x^*$, а при $t < \tau(x)$, $x^* = x$. Отсюда получаем $u_i = 0$ при $t < \tau(x)$, т. е. впереди трещины.

5. Распространение по произвольному закону. Исследование решения. Выражения (4.18) и (4.21) не содержат явно координат точек изменения скорости трещины (t_m, l_m). Поэтому можно предположить, что эти выражения дают решение задачи также и для произвольного закона распространения трещины $x=l(t)$ или что то же, $t=\tau(x)$, причем $l'(t) < c$. Очевидно, выражения (4.18) и (4.21) удовлетворяют уравнению (2.10). Поэтому достаточно проверить удовлетворение граничных условий (2.11) и условия на ребре (2.12). Начнем с условия

$$\sigma_i(t, x) = -p_i(x) H(x) \quad (x < l(t); \text{ т. е. } t > \tau(x))$$



Фиг. 4

При этих значениях t и x область интегрирования по η и τ показана на фиг. 4.

Заменим интегрирование по τ на интегрирование по переменной $s = t - \tau / (x - \eta)$. Тогда получим

$$\sigma_i(t, x) = \frac{i}{2\pi^2} \int_0^{x^*} d\eta \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_i^{-1}}^{\theta} [K_i^-(s)] \frac{ds}{\sqrt{t-\tau(\eta)-s(x-\eta)}} \int_0^{\xi} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}} \tag{5.1}$$

$$\theta = \frac{\tau-\tau(\eta)}{x-\eta}$$

При $t > \tau(x)$ верхний предел интегрирования по s больше чем b^{-1} . Действительно, по теореме Лагранжа о среднем значении

$$\theta > \frac{\tau(x) - \tau(\eta)}{x - \eta} = \tau'(\bar{\eta}) > \frac{1}{b}$$

Интеграл по s можно рассматривать как контурный по пути, проходящему непосредственно под действительной осью от v_i^{-1} до θ , пересекающему действительную ось в этой точке, а затем идущему обратно к точке v_i^{-1} непосредственно под действительной осью. Поскольку при $s > v_i^{-1}$ предельные значения $K_i^-(s)$ сверху и снизу на действительной оси отличаются знаком, подынтегральное выражение регулярно вне этого контура, который можно считать замкнутым. Растягивая контур интегрирования, превратим его в окружность C_R большого радиуса.

При больших s имеем асимптотическую оценку: $K_i^-(s) = \sqrt{-s}(1 + \lambda/s) + o(s^{-1/2})$, где λ — некоторая постоянная. Поэтому имеем при $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_i^{-1}}^{\theta} [K_i^-(s)] \frac{ds}{\sqrt{t - \tau(\eta) - s(x - \eta)}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_R} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{x - \eta}} + \frac{t - \tau(\eta)}{2(x - \eta)^{3/2}} \right] \frac{ds}{s} + o(1) = \frac{\pi}{i(x - \eta)^{3/2}} + o(1) \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (5.1) принимает вид

$$\sigma_i(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(x - \eta)^{3/2}} \int_0^{\eta} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta - \xi}}$$

где, как сказано в п. 4, интеграл по η понимается как конечная часть. Это можно записать также в виде

$$\sigma_i(t, x) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{x - \eta}} \int_0^{\eta} p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta - \xi}} \quad (x < l(t))$$

Изменение порядка интегрирования приводит к желаемому результату: $\sigma_i(t, x) = -p_i(x)$ при $x < l(t)$. Второе условие (2.11) удовлетворяется выражением (4.21) автоматически.

Проверка условия (2.12) сводится к исследованию асимптотического поведения решения при $x \rightarrow l(t) + 0$. Перепишем выражение (4.18) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_i(t, x) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x^{\circ}} k_{i0}(\eta) \int_{v_i^{-1}}^{\theta} [K_i^-(s)] \frac{ds d\eta}{\sqrt{t - \tau(\eta) - s(x - \eta)}} + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x^{\circ}}^{\infty} k_{i0}(\eta) \int_{v_i^{-1}}^{\theta} [K_i^-(s)] \frac{ds d\eta}{\sqrt{t - \tau(\eta) - s(x - \eta)}} \end{aligned}$$

где $x^{\circ} = x^{\circ}(x, t)$ — решение уравнения $bt - x = b\tau(x^{\circ}) - x^{\circ}$, а $k_{i0}(x)$ — коэффициенты интенсивности у края неподвижной трещины (находящегося в точках x) при тех же нагрузках $p_i(x)$, равные

$$k_{i0}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^x p_i(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x - \xi}}$$

В первом члене верхний предел интегрирования по s не меньше чем b^{-1} . Поэтому интеграл по s можно вычислить, превратив его в контурный и деформируя контур интегрирования в бесконечность. Это дает для первого члена (назовем его пока σ_{i1}) следующую асимптотическую оценку:

$$\sigma_{i1}(t, x) = k_{i0}(l) [\lambda - b^{-1} + 2\tau'(l)] \frac{\sqrt{\tau'(l)}}{\sqrt{t - \tau(\eta) - s(x - \eta)}} + O(1) \quad (5.2)$$

Во втором слагаемом (назовем его σ_{i2}) поменяем порядок интегрирования

$$\sigma_{i2} = \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_i^{-1}}^{b^{-1}} [K_i^-(s)] \int_{x^0}^{x(s)} k_{i0}(\eta) \frac{d\eta ds}{\sqrt{t - \tau(\eta) - s(x - \eta)}}$$

где $x(s)$ — решение уравнения $t - sx = \tau(x(s)) - x(s)$.

При $x \rightarrow l(t)$ разность $x - x(s)$ стремится к нулю и можно разложить $\tau(x(s))$ в ряд по степеням $x(s) - \eta$ (так как отрезок $x(s) - x^0$ также стремится к нулю). Тогда получим оценку

$$\sigma_{i1}(t, x) = \frac{\sqrt{2}i}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ k_{i0}(l) \sqrt{x - x^0} \int_{v_i^{-1}}^{b^{-1}} [K_i^-(s)] \frac{\sqrt{b^{-1} - s} ds}{\tau'(x) - s} \right\} + O(1)$$

Здесь интеграл снова можно вычислить как контурный, что даёт

$$\begin{aligned} \sigma_{i1}(t, x) = k_{i0}(l) \{ [K_i^-(\tau'(l))] \sqrt{\tau'(l) - b^{-1} - \lambda + b^{-1} - 2\tau'(l)} \} \times \\ \times \frac{\sqrt{\tau'(l)}}{\sqrt{2(x-l) [\tau'(l) - b^{-1}]}} + O(1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Складывая (5.3) с (5.2), получим окончательно

$$\sigma_i(t, x) = ik_{i0}(l) \sqrt{l} \left[K_i^-\left(\frac{1}{l}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{2(x-l(t))}}$$

Таким образом, условие (2.12) выполнено, причем коэффициенты интенсивности напряжения $k_i(t, x)$ получились в виде

$$k_i(t, x) = k_{i0}(l) \{ i\sqrt{l} [K_i^-(1/l)] \}$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с результатом [3].

Поступила 19 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
2. Freund L. B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-I. Constant rate of extension. J. Mech. and Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3.
3. Freund L. B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-II. Non uniform rate of extension. J. Mech. and Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3.
4. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.