

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА
ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ
К ЗАДАЧАМ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Ш. А. МУХАМЕДИЕВ, Л. В. НИКИТИН, С. Л. ЮНГА

(Москва)

Рассматривается задача о плоской деформации образца из упрочняющегося упругопластического материала. Образец имеет боковой надрез и нагружается сосредоточенными усилиями. Используется деформационная теория пластичности Генки — Ильюшина. Развивается предложенная в [1] модификация метода локальных вариаций. Приводится алгоритм решения задачи об образце модифицированным методом локальных вариаций. Задача решается для материала, диаграмма растяжения которого берется из эксперимента. Приводятся картины развития пластической зоны и зависимость значений J -интеграла от величины приложенных усилий и геометрии образца.

При испытаниях на вязкость разрушения в лабораторных условиях применяют различного рода образцы с острыми разрезами и усталостными трещинами. Одним из распространенных является компактный образец с боковым надрезом, подвергаемый внецентренному растяжению через шпильки. Методика проведения экспериментов и определения параметров хрупкого разрушения для различных образцов в предположении выполнения условий квазихрупкого разрушения приведена в [2, 3]. Обычно для таких образцов приводятся численные решения упругих задач методами коллокаций и конечных элементов (КЭ). Однако для пластичных материалов с низким пределом текучести возможность использования представлений и результатов линейной механики разрушения требует непомерного увеличения размеров образцов. В последние годы начали появляться работы (например [4]), посвященные пластическому анализу разрушения таких материалов. Несмотря на высокую точность решения, достигаемую специальным выбором модели конечных элементов, практическая ценность большинства этих работ в некоторой степени снижается из-за того, что поведение материала идеализируется и реальная диаграмма напряжение — деформация заменяется билинейной или прандтлевской.

1. Рассмотрим задачу о плоской деформации образца с острым боковым надрезом, нагружаемого сосредоточенными усилиями P на единицу толщины (фиг. 1). Примем, что материал образца подчиняется соотношениям деформационной теории пластичности Генки — Ильюшина

$$\varepsilon = 3K\sigma, e_{ij} = \gamma s_{ij} / 2\tau, \tau = g(\gamma) \gamma \quad (1.1)$$

где ε — относительное изменение объема, σ — среднее давление, K — коэффициент объемного сжатия, e_{ij} , s_{ij} — компоненты девиаторов деформации и напряжения, а $\gamma = (2e_{ij}e_{ij})^{1/2}$ и $\tau = (1/2s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ — интенсивности деформаций и напряжений.

При плоской деформации, параллельной координатной плоскости x_1, x_2 прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3 (фиг. 1), отличными от нуля компонентами вектора перемещения, тензора деформации и тензора напряжения являются соответственно u_i , ε_{ij} , σ_{ij} ; $i, j = 1, 2$ и σ_{33} .

Ввиду симметрии задачи относительно оси x_1 достаточно рассматривать верхнюю половину области ($x_2 \geq 0$). На границе рассматриваемой области выполняются следующие условия: $\sigma_{22} = P\delta(x_1 + b)$ при $x_2 = H$, $-b \leq x_1 \leq 0$; $\sigma_{12} = u_2 = 0$ при $x_2 = 0$, $l - b \leq x_1 \leq 0$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. На

остальных сторонах образца и на берегу трещины вектор напряжения равен нулю. Будем считать, что u_i в начале координат равно нулю.

Предполагая напряженное состояние непрерывным, воспользуемся для решения задачи вариационным принципом минимума полной энергии, согласно которому действительные перемещения сообщают минимум функционалу полной энергии

$$I = \int \left(\frac{\varepsilon^2}{6K} + \int g(\gamma) \gamma d\gamma \right) dx_1 dx_2 - A \quad (1.2)$$

по отношению ко всем кинематически возможным перемещениям [5]. Здесь A — работа внешних сил.

2. Из-за трудности непосредственного применения энергетического подхода в механике разрушения упругопластических тел обычно используется некоторый параметр, характеризующий начало разрушения. Достижение критического значения этим параметром должно вызывать начало роста трещины, а величина критического значения должна являться константой материала. В работах [6, 8] в качестве такого параметра предложена величина J -интеграла [8].

Этот интеграл в случае упрочняющегося материала (1.1) имеет вид

$$J = \int_{\Gamma} \left(\frac{\varepsilon^2}{6K} + \int g(\gamma) \gamma d\gamma \right) dx_2 - n_j \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds$$

где контур Γ , охватывающий кончик трещины, обходится против часовой стрелки, $n = (n_1, n_2)$ — единичная нормаль к этому контуру, ds — элемент длины дуги. В равновесном состоянии для нелинейно-упругого материала, а следовательно, при активном процессе нагружения и для материала (1.1), величина J не зависит от контура интегрирования.

Для материалов, обладающих асимптотическим линейным или степенным упрочнением, нетрудно получить связь между величиной J и величинами пластических коэффициентов интенсивности напряжений (или деформаций). Для таких материалов критерий по предельному значению J_c эквивалентен критерию по предельному значению пластического коэффициента интенсивности.

3. В качестве параметра, характеризующего начало роста трещины, будем рассматривать величину J -интеграла. В работе [6] показано, что J слабо зависит от состояния материала в непосредственной близости от вершины трещины, хотя величина J_c , конечно, зависит от этого состояния и определяется им. Другими словами, J слабо зависит от поведения кривой τ от γ на бесконечности, которое, кстати, невозможно определить из эксперимента. Таким образом, при решении задачи возможно поведение кривой упрочнения аппроксимировать на бесконечности произвольной, в определенных пределах, аналитической функцией. Отсюда следует, что выбор модели КЭ с равновеликими элементами в некоторой степени оправдан, если решается задача с использованием критерия по J_c .

С другой стороны, напряженно-деформированное состояние в основной площади образца определяется поведением кривой $\tau(\gamma)$ на не очень «далеких» участках. Это поведение можно определить из эксперимента и оно должно быть с возможно большей степенью точности учтено при решении задачи для конкретного материала. При таком учете на величину J будут влиять специфические свойства рассматриваемого материала.

Зависимость $\tau(\gamma)$ можно получить как обобщение на сложное напряженное состояние экспериментальной кривой одноосного растяжения $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1)$ (фиг. 2). В параметрическом виде зависимость $\tau = \tau(\gamma)$ описы-

ваются следующим образом:

$$\tau = \sigma_1(\varepsilon_1) / \sqrt{3}, \quad \gamma = [3\varepsilon_1 - K\sigma_1(\varepsilon_1)] / \sqrt{3}$$

Будем считать, что $\tau'(\gamma) > 0$ и что функция $\tau = \tau(\gamma)$ асимптотически стремится к линейной при $\gamma \rightarrow \infty$. Функцию $\tau = \tau(\gamma)$ аппроксимируем кусочно-линейной функцией, график которой представлен на фиг. 3. Участок между 0 и 1 характеризует упругое поведение материала и считается первым, отрезок 1-2 считается вторым и т. д. Участок $(N-1)-N$ является участком асимптотического линейного упрочнения. Таким образом, если γ принадлежит i -му участку, то

$$g(\gamma) = \mu_i + \kappa_i \frac{1}{\gamma}, \quad \mu_i = \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\gamma_i - \gamma_{i-1}}, \quad \kappa_i = \frac{\tau_{i-1}\gamma_i - \tau_i\gamma_{i-1}}{\gamma_i - \gamma_{i-1}} \quad (3.1)$$

Выберем модель КЭ в следующем виде [9]: рассматриваемую область разобьем на треугольные КЭ с катетами Δx_1 и Δx_2 тремя семействами параллельных линий. Эти элементы и узловые точки будем нумеровать в некотором порядке, причем индексы элементов и узловых точек будем заключать в скобки и ставить соответственно вверху и внизу. Функцию перемещений в каждом КЭ выберем линейной

$$u_1^{(m)} = C_1^{(m)} x_1 + C_2^{(m)} x_2 + C_3^{(m)}, \quad u_2^{(m)} = C_4^{(m)} x_1 + C_5^{(m)} x_2 + C_6^{(m)}$$

Константы $C_1^{(m)}, \dots, C_6^{(m)}$ и, следовательно, деформации и напряжений в каждом из конечных элементов однозначно определяются через перемещения узловых точек элемента. Тогда функционал (1.2) выразится через перемещения всех узловых точек и естественным образом представится суммой функционалов по всем конечным элементам. Принимая во внимание граничные условия поставленной задачи, можно записать

$$I \approx I_0 = \sum_{m=1}^M I^{(m)} - P u_{2(p)} \quad (3.2)$$

Суммирование в (3.2) происходит по всем КЭ, M — общее число КЭ, p — номер узловой точки приложения сосредоточенной силы, а $I^{(m)}$ выражается формулой

$$I^{(m)} = \left\{ \frac{(\varepsilon^{(m)})^2}{6K} + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\kappa_j (\gamma_j - \gamma_{j-1}) + \frac{1}{2} \mu_j (\gamma_j^2 - \gamma_{j-1}^2) \right] + \right. \\ \left. + \kappa_i (\gamma^{(m)} - \gamma_{i-1}) + \frac{1}{2} \mu_i [(\gamma^{(m)})^2 - \gamma_{i-1}^2] \right\} \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2$$

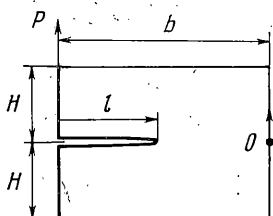
где i — номер участка кусочно-линейной функции $\tau = \tau(\gamma)$, на котором находится точка $(\gamma^{(m)}, \tau^{(m)})$.

Таким образом, задача сведена к определению узловых перемещений $u_{1(i)}$ и $u_{2(i)}$, удовлетворяющих крайевым условиям

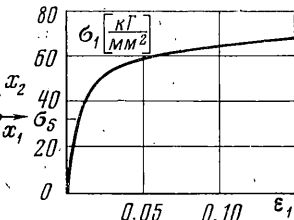
$$u_{2(j)} = 0, \quad u_{1(0)} = 0 \quad (3.3)$$

и доставляющих минимум функционалу (3.2). В (3.3) индекс j пробегает номера узловых точек на отрезке $[-b+l, 0]$ продолжения трещины, а индекс 0 означает номер узловой точки, лежащей в начале координат (фиг. 1). Для решения поставленной задачи воспользуемся предложенной в [1] модификацией метода локальных вариаций — МЛВ [10].

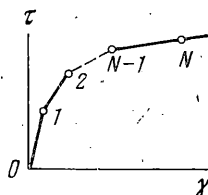
4. Изложим идею модификации метода локальных вариаций. При использовании его в каждом узле значения искомой функции подвергаются изменению (с целью уменьшения функционала) с фиксированным шагом варьирования h . В модифицированном методе в каждом узле (i) шаг варьирования h_i выбирается из условия минимальности квадратичной функции от h_i , представляющей два первых члена разложения приращения функционала в ряд Тейлора. Коэффициент при h_i в первой степени в квадратич-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ной функции при корректно выбранной аппроксимации является конечно-разностным представлением уравнения Эйлера для минимизируемого функционала в (i)-м узле. Коэффициент при h_i во второй степени, зависящий от вторых производных подынтегральной функции, для обеспечения отрицательности приращения функционала должен удовлетворять некоторым условиям — в частности, он должен быть положительным.

При такой схеме с переменным шагом варьирования, которая для квадратичных функционалов обеспечивает максимально возможное уменьшение функционала при варьировании в данном узле, уже не надо несколько раз подсчитывать функционал по элементам, окружающим варьируемый узел, что в несколько раз по сравнению с МЛВ уменьшает число операций за одну итерацию.

Замечено, что при такой схеме с переменным h_i с увеличением числа итераций последовательность шагов варьирования в каждом узле начинает образовывать геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим единицы, не зависящим от номера узла i и от вида нулевого приближения. Экспоненциальный характер установления решения в модифицированном МЛВ позволяет, не доводя процесса варьирования до сходимости (т. е. малых значений h_i), на некоторой итерации прибавить к значениям варьируемой функции в каждом узле остатки геометрических прогрессий и с большой степенью точности выйти на искомое решение. Сокращение числа итераций в результате такого приема вместе с сокращением числа операций за одну итерацию при схеме с переменным h_i дает существенную экономию машинного времени по сравнению с МЛВ.

Наиболее полно возможности модифицированного метода могут быть использованы в задачах без жестких ограничений (типа условия идеальной пластичности) на искомую функцию и ее производные, в частности в задачах о деформировании упрочняющегося материала. Заметим, что если интерес представляет не полное решение, а отдельная его часть (например J -интеграл, раскрытие трещины и т. д.), также устанавливающаяся в процессе минимизации по экспоненциальному закону, то можно, не используя описанный выше прием, вычислять через некоторое число итераций асимптотическое значение искомой величины. При этом процесс варьирования также не надо доводить до сходимости, а критерием его окончания может служить практическая неизменность асимптотических значений.

5. Варьируемыми величинами при решении рассматриваемой задачи являются узловые перемещения $u_{1(i)}$ и $u_{2(i)}$. Шаг варьирования для первой компоненты вектора перемещения в некотором узле (i) обозначим через $h_{1(i)}$, для второй — через $h_{2(i)}$. Пусть в некоторой узловой точке (i) варьируется одна из компонент вектора перемещения, например u_2 . Тогда в модифицированном методе (п. 4) приращение функционала выразится в виде

$$\Delta I_0(h_{2(i)}) \approx 1/2 \Delta x_1 \Delta x_2 h_{2(i)} (E_{2(i)} + h_{2(i)} R_{2(i)}) \quad (5.1)$$

(5.2)

$$E_{2(i)} = \sum_n \left\{ \frac{\varepsilon^{(n)} \Delta \varepsilon_{22(i)}^{(n)}}{3K} + \frac{2}{3} g(\gamma^{(n)}) [(2\varepsilon_{22}^{(n)} - \varepsilon_{11}^{(n)}) \Delta \varepsilon_{22(i)}^{(n)} + 6\varepsilon_{12}^{(n)} \Delta \varepsilon_{12(i)}^{(n)}] \right\}$$

$$R_{2(i)} = \sum_n \left\{ \frac{1}{6K} (\Delta \varepsilon_{22(i)}^{(n)})^2 + \frac{2}{3} g(\gamma^{(n)}) [(\Delta \varepsilon_{22(i)}^{(n)})^2 + 3(\Delta \varepsilon_{12(i)}^{(n)})^2] - \frac{2}{9} \frac{\kappa_t}{(\gamma^{(n)})^3} [(2\varepsilon_{22}^{(n)} - \varepsilon_{11}^{(n)}) \Delta \varepsilon_{22(i)}^{(n)} + 6\varepsilon_{12}^{(n)} \Delta \varepsilon_{12(i)}^{(n)}] \right\} \quad (5.3)$$

Шаг варьирования выбирается в виде

$$h_{2(i)} = -E_{2(i)} / 2R_{2(i)} \quad (5.4)$$

Из (5.1) и (5.4)

$$\Delta I_0(h_{2(i)}) \approx -(E_{2(i)}^2 / 8R_{2(i)}) \Delta x_1 \Delta x_2 \quad (5.5)$$

В (5.2), (5.3) суммирование ведется по КЭ, для которых точка (i) является одной из вершин; индекс t в (5.3) равен номеру участка кусочно-линейной функции $\tau(\gamma)$, которому принадлежит $\gamma^{(n)}$; не зависящие от $h_{2(i)}$ и деформированного состояния величины $\Delta \varepsilon_{st(i)}^{(n)}$, $s, t=1, 2$ в (5.2), (5.3) являются приращениями соответствующих компонент деформации, вызываемыми единичным шагом варьирования в направлении x_2 . При варьировании $u_{2(p)}$ (узел приложения силы P) в (5.1), (5.5) из $E_{2(p)}$ вычитается $2P/(\Delta x_1 \Delta x_2)$.

Аналогичный вид имеют выражения для $\Delta I_0(h_{1(i)})$, $E_{1(i)}$, $R_{1(i)}$ и $h_{1(i)}$, которые получаются из (5.1)–(5.5) заменой всех индексов 1 и 2 на 2 и 1 соответственно. Величины $\Delta \varepsilon_{st(i)}^{(n)}$, $s, t=1, 2$ в этом случае являются приращениями соответствующих деформаций от единичного шага варьирования в направлении x_1 .

Перед началом процесса варьирования задается удовлетворяющее (3.3) нулевое приближение, которым в данном случае являлось поле перемещений в ненагруженном образце. Одна итерация считается законченной, когда во всех узлах, допускающих независимое изменение соответствующей компоненты перемещения, $u_{s(i)}$ ($s=1, 2$) будут заменены на $u_{s(i)} + h_{s(i)}$. Процесс итераций на данной сетке заканчивается при достижении заданной точности по асимптотическому значению J -интеграла. Для увеличения скорости сходимости применяется измельчение сетки, при котором нулевым приближением по мелкой сетке служит быстро устанавливающееся решение на грубой сетке.

В случае, когда подинтегральная функция функционала является кусочно-непрерывной, при использовании схемы с переменным шагом возникает одна общая особенность, которую отметим кратко на примере материала (1.4), (3.1), считая, что $\mu_{j+1} < \mu_j$, $j=1, \dots, N-1$. Обозначим через

$\gamma_-^{(n)}$ и $\gamma_+^{(n)}$ интенсивности деформаций соответственно до и после варьирования в элементах, окружающих варьируемую точку (i), и будем для определенности считать, что во всех этих КЭ $\gamma_-^{(n)}$ принадлежат j -му участку кусочно-линейной функции $\tau(\gamma)$. Если в результате варьирования с шагом $h_{s(i)}$ ($s=1, 2$) в некоторых из КЭ, окружающих (i)-й узел, $\gamma_+^{(n)}$ стали принадлежать ($j-1$) или ($j+1$) участку кусочно-линейной функции $\tau(\gamma)$, то, как можно показать, изменение функционала выражается формулой

$$\Delta I_0(h_{s(i)}) \approx \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2 \left[-\frac{E_{s(i)}^2}{4R_{s(i)}} - \frac{1}{2} (\mu_j - \mu_{j+1}) \Sigma (\gamma_+^{(n)} - \gamma_j)^2 + \frac{1}{2} (\mu_{j-1} - \mu_j) \Sigma (\gamma_+^{(n)} - \gamma_{j-1})^2 \right] \quad (5.6)$$

Приближенное равенство в (5.6) выполняется с той же точностью, что и в (5.5). Первый знак суммы в правой части (5.6) означает суммирование по тем из элементов, окружающих варьируемый узел (i), в которых $\gamma_+ > \gamma_j$, второй знак — по тем, в которых $\gamma_+^{(n)} < \gamma_{j-1}$. Таким образом, при $\gamma_+^{(n)} < \gamma_{j-1}$ возможно увеличение функционала. Расчеты показывают, однако, что это обстоятельство не влияет на окончательные результаты.

6. По описанному алгоритму составлена программа на языке АЛГОЛ-60. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-4. В качестве проверочного варианта была решена задача о полубесконечной трещине отрыва в упругой среде. Вершина трещины окружалась квадратом со стороной a , на сторонах которого в качестве граничных условий задавались перемещения из асимптотических формул Вестергарда [3]. При разбиении области на 65, 100, 256 и 484 конечных элементов точность определения коэффициента интенсивности напряжений k_1 составили соответственно 8, 6,5, 4 и 3%.

Затем решались упругие задачи для образцов типа изображенного на фиг. 1. На фиг. 4 сравниваются зависимости $k_1^0 = k_1 b / P l^{1/2}$ от l/b для упругого материала при $H/b=0.6$ (сплошная кривая получена методом граничной коллокации и заимствована из книги [2]). Кружками обозначены величины коэффициентов интенсивности, полученные в настоящей работе при разбиении области на 256 конечных элементов. Расхождение не превышает 5–6%.

Наконец, был решен ряд упругопластических задач для таких образцов (фиг. 1) при разбиении области на 256 конечных элементов. Результаты расчетов можно использовать для определения параметров хрупкого разрушения компактных образцов с боковым надрезом.

На фиг. 5 показано развитие в зависимости от нагрузки $p=P/\sigma_s b$ пластических зон для образца с $H/b=0.5$ из линейно-упрочняющегося материала. Отношение тангенса угла наклона линейного участка упрочнения к модулю Юнга E равно 0,1, а коэффициент Пуассона $\nu=0.3$. Меньшей нагрузке соответствует более частая штриховка. Фиг. 5, а отвечает случаю $l/b=0.25$ и $p_1=0.125$, $p_2=0.175$, $p_3=0.225$; фиг. 5, б — случаю $l/b=0.5$ и $p_1=0.112$, $p_2=0.150$, $p_3=0.187$.

Во втором случае общая пластичность наступает при меньших нагрузках, чем в первом случае, и пластическая зона выходит на ненадрезанную сторону образца. Характер развития пластических зон и анализ γ в КЭ при последовательном нагружении показывают, что разгрузка вплоть до общей пластичности, а также в некотором диапазоне нагрузок после ее наступления не возникает.

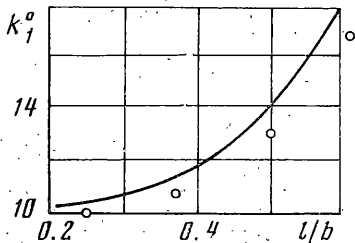
Перейдем теперь к результатам решения задачи для нелинейно-упрочняющегося материала. Расчеты проводились для алюминиевого сплава Д20-1 ($\nu=0.3$), диаграмма одноосного растяжения которого изображена на фиг. 2. Кривая растяжения заменялась ломаной из пяти звеньев ($N=5$), вершины которой соответствовали значениям деформации ϵ_1 , равным 0.0000, 0.0050, 0.0100, 0.0375, 0.1100, 0.1700. На фиг. 6 изображены полученные при разбиении области на 256 конечных элементов зависимости $J^0 = JE/\sigma_s^2 l$ от нагрузки для образца с $H/b=0.6$ при $l/b=0.25$ и $l/b=0.5$

(пунктирными линиями изображены соответствующие зависимости для упругого материала). Заметим, что в обоих случаях для приведенного на фиг. 6 диапазона изменения нагрузки общая пластичность в образце не наступает.

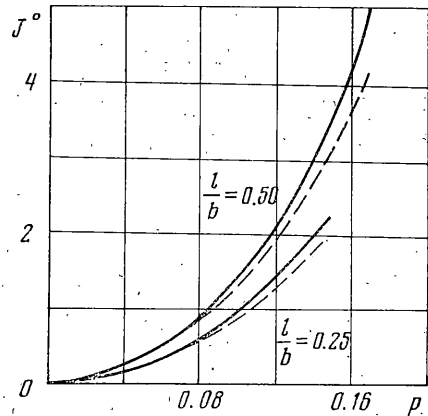
Для контроля за точностью получаемого общего решения вычислялись J -интегралы по различным прямоугольным контурам. В окончательном решении различия в значениях J были порядка нескольких процентов. Критерием окончания счета служило достижение заданной точности по асимптотическому значению (J^*) J -интеграла (п. 4). Практически это происходит следующим образом. Для достаточно больших номеров итерации t кривая $J=J(t)$ с большой степенью точности описывается экспоненциальной зависимостью

$$J=J^*(1-e^{-\alpha(t-t_0)}) \quad (\alpha=\text{const}) \quad (6.1)$$

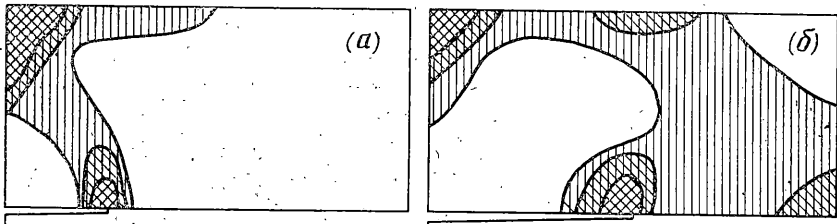
При номерах итерации t , равных t_1 , $t_1+\Delta t$, $t_1+2\Delta t$, где Δt мало (порядка 1–5 итераций), вычисляются величины J -интеграла J_{t_1} , $J_{t_1+\Delta t}$, $J_{t_1+2\Delta t}$. По этим величинам



Фиг. 4



Фиг. 6



Фиг. 5

определяется из (6.1) асимптотическое значение $J_{t_1}^*$, соответствующее t_1 -й итерации. Легко получить, что

$$J_{t_1}^* = (J_{t_1+\Delta t}^2 - J_{t_1} J_{t_1+2\Delta t}) (2J_{t_1+\Delta t} - J_{t_1} - J_{t_1+2\Delta t})^{-1}$$

Счет прекращается на некоторой n -й итерации, когда изменение J^* с числом итераций становится пренебрежимо мало, т. е. когда $|J_s^* - J_n^*|/J_n^* < \epsilon$, где ϵ — заранее заданная малая величина, а $(n-s)$ — заранее заданное, достаточно большое число итераций. В данном случае ϵ выбиралось порядка 0,5%, а $(n-s)$ — порядка 30–40.

По результатам решения для пластических КЭ в пространстве ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{12} строились кривые истории нагружения, которые оказались близкими к прямым, что оправдывает использование деформационной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мужамедиев Ш. А., Юнга С. Л. Определение параметров хрупкого разрушения для надрезанных образцов из линейно-упрочняющегося материала. Тр. XVIII науч. конф. МФТИ, 1972. Сер. Аэромеханика. Процессы управления. Долгопрудный, 1973.
2. Браун У., Сроули Дж. Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации. М., «Мир», 1972.
3. Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.
4. Andersson H. Finite element analysis of a fracture toughness test specimen in the non-linear range. J. Mech. and Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 1.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
6. Broberg K. B. Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics. J. Mech. and Phys. Solids, 1971, vol. 19, No. 6.
7. Begley J. A., Landes J. D. The J-integral as a fracture criterion. Fracture toughness. Proc. 1971 Nat. Symp. Fracture Mech., pt 2. Philadelphia, ASTM, 1972.
8. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Fracture. An advanced treatise. Ed. by Liebowitz H., vol. 2. New York. Acad. Press, 1968.
9. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K. The finite element method in structural and continuum mechanics. New York, Mc. Graw-Hill, 1967.
10. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.