МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1976

УДК 539.3

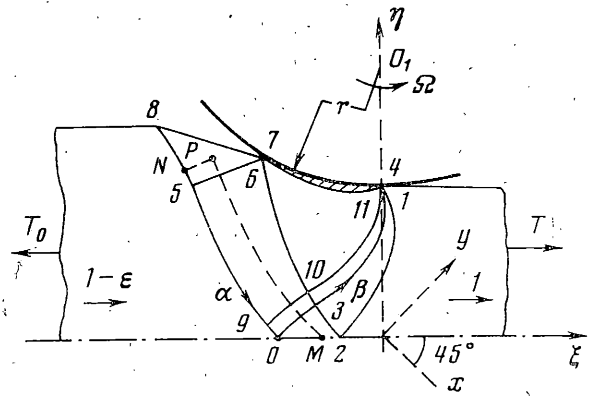
О ВНЕКОНТАКТНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОСЫ ПРИ ПРОКАТКЕ

Б. А. ДРУЯНОВ

(Москва)

Рассматривается деформация идеально жесткопластической полосы при прокатке. Показано, что для возникновения внеконтактной деформации необходимо большое противонатяжение. Прокатка полосы при большом противонатяжении, но без внеконтактной деформации рассматривалась в статье [1].

1. Исходные уравнения. Известно, что уравнения плоского течения идеальных жесткопластических тел составляют гиперболическую систему, имеющую два ортогональных семейства характеристик [2]. Назовем семейством α то, на котором направление касательных напряжений получается поворотом нормали по часовой стрелке. Примем, что положительное направление на линиях β получается из положительного направления на линиях α поворотом на 90° против часовой стрелки.



Пусть q — среднее безразмерное давление, а φ — угол наклона характеристик семейства α к оси ox: $q=-(\sigma_x+\sigma_y)/4k$, $\varphi={}^1/_2\operatorname{arctg}(\sigma_x-\sigma_y)/4k$ (k — предел текучести на сдвиг). Тогда величины α, β определяются по формулам

$$\alpha={}^1/_2[\varphi-(q-q_0)],\qquad \beta={}^1/_2[\varphi+(q-q_0)] \tag{1.1}$$

(q_0 — значение q в начальной точке).

В области, где оба семейства характеристик криволинейны, величины α, β могут быть приняты за криволинейные координаты.

Пусть x, y — безразмерные декартовы координаты. Обозначим через X, Y проекции радиус-вектора на направления характеристик семейств α, β соответственно $X=x\cos\varphi+y\sin\varphi$, $Y=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$.

Радиусы кривизны этих линий можно выразить через X, Y по формулам $R=\partial X/\partial\alpha-Y$, $S=-\partial Y/\partial\beta-X$.

Указанные величины, а также проекции скорости на направления характеристик — u, v удовлетворяют вдоль характеристик следующим соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Vmatrix} u \\ Y \\ S \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} v \\ -X \\ -R \end{Vmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Vmatrix} v \\ X \\ R \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -u \\ Y \\ S \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

В области, где оба семейства характеристик криволинейны, величины u, v, X, Y, R, S удовлетворяют уравнению $\partial^2 f/\partial\alpha\partial\beta+f=0$, для которого функцией Римана служит функция $J_0[2\sqrt{(\alpha-a)(\beta-b)}]$ (J_n — символ функции Бесселя первого рода n-го порядка).

2. Постановка задачи и краевые условия. Примем за характерные параметры v_1 и h_1 скорость и половину толщины полосы после деформации. Геометрия задачи характеризуется безразмерными параметрами: r — радиус валка, h_0 — половина толщины полосы до деформации, θ_0 — угол захвата, ε — редукция полосы.

Безразмерная угловая скорость валка равна $\omega=\Omega h_1/v_1$ (Ω — размерная угловая скорость).

Деформируемая область ограничены слева характеристикой 8-0 семейства α, справа характеристикой 2-1 семейства β. Линия 8-6 является линией тока — это свободная от напряжений граница деформируемого материала (фигура).

Характеристики 6-7 и 1-11 — вырожденные, из них исходят веера характеристик. Заштрихованная область является стоячей волной жесткого материала, налипающего на валок и вращающегося вместе с ним с угловой скоростью ω. Вдоль линий 7-11 и 8-0-4 касательная составляющая скорости терпит разрыв.

Характеристики 8-0 и 0-4 примем за начальные линии криволинейной системы координат α, β. Криволинейные координаты точки n будем обозначать α_n, β_n. В точке O имеем $\alpha=\beta=0$.

Скачок касательной составляющей скорости на линии 8-0 обозначим c. В точке 8 свободная поверхность имеет излом.

Нормальное и касательное напряжение на площадке, нормаль к которой составляет угол θ с осью абсцисс, определяются по формулам: $\sigma_n/k=-q-\sin 2(\varphi-\theta)$, $\tau_n/k=\cos 2(\varphi-\theta)$.

На линии 8-6 имеем $\tau_n=\sigma_n=0$. Отсюда на 8-6

$$\varphi-\theta=\pi/4,\ q=-1 \tag{2.1}$$

Из (1.1) получаем $\varphi=\alpha+\beta$, $q=q_0+2(\beta-\alpha)$.

В точке 8 имеем $\alpha_8<0$, $\beta_8=0$. Следовательно, $q_0=2\alpha_8-1$. Поэтому на 8-6

$$\varphi-\theta=\pi/4, \qquad \alpha=\beta+\alpha_8 \tag{2.2}$$

На отрезке 0-2 оси симметрии $\tau_n=0$. Отсюда на 0-2

$$\alpha+\beta=0, \qquad R=S \tag{2.3}$$

Наконец, на жесткопластических границах должны быть непрерывные нормальные компоненты скорости.

3. Поле скоростей. Примем за неизвестную функцию значение u на отрезке 0-2 оси симметрии. Заметим, что $u=v=z(\alpha)$ на 0-2 (фигура).

Как следует из условия несжимаемости, скорость полосы до деформации равна $1-\varepsilon$. Следовательно, на 0-8

$$u=(1-\varepsilon)\sin(\pi/4+\alpha)+c, \qquad v=(1-\varepsilon)\cos(\pi/4+\alpha) \tag{3.1}$$

Нетрудно проверить, что в силу уравнения $\partial^2 f/\partial\alpha\partial\beta+f=0$ выражение

$$d\Phi_1=G\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}d\alpha_1+u\frac{\partial G}{\partial\beta_1}d\beta_1 \tag{3.2}$$

является полным дифференциалом, где $G=J_0[2\sqrt{(\alpha-\alpha_1)(\beta-\beta_1)}]$. Проинтегрируем (3.2) по замкнутому контуру $MPNO$ (фигура). После некоторых преобразований получим следующие выражения для u и v в области 8-6-5:

$$u=z(-\beta)-\int_0^{-\beta}z(\lambda)\{J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta+\lambda)}]+J_{0\beta}'\}d\lambda+$$

$$+(1-\varepsilon)\int_0^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\lambda\right)J_0(2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}]d\lambda \tag{3.3}$$

$$v=(1-\varepsilon)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\int_0^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\lambda\right)J_0'\alpha[2\sqrt{(\alpha-\lambda)\beta}]d\lambda+$$

$$+\int_0^{\beta}z(\lambda)\{J_0[2\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta+\lambda)}]-J_{0\alpha}'\}d\lambda \tag{3.4}$$

Вторые слагаемые в фигурных скобках имеют тот же аргумент, что и первые. Характеристики составляют угол 45° с линией 8-6. Следовательно, $u=v$ при $\alpha=\beta+\alpha_8$. Приравнивая (3.3) и (3.4) и полагая в них $\alpha=\alpha_8-\xi$, $\beta=-\xi$, получим после преобразований

$$z(\xi)-2\int_0^{\xi}z(\lambda)\{J_0[2\sqrt{(\xi-\lambda)(\xi+\lambda-\alpha_8)}]-\lambda\Lambda_1\}d\lambda=$$

$$=(1-\varepsilon)\int_0^{\xi+\alpha_8}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\lambda\right)\{J_0[2\sqrt{\xi(\xi-\lambda-\alpha_8)}]+\xi\Lambda_1\}d\lambda+(1-\varepsilon)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\xi-\alpha_8\right) \tag{3.5}$$

$$\Lambda_1(2\sqrt{\alpha\beta})=-\beta^{-1}J_{0\alpha}'(2\sqrt{\alpha\beta})$$

Уравнение (3.5) единственным образом определяет функцию $z(\alpha)$. Это линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Если $z(\alpha)$ найдено, то распределение скоростей определяется последовательно в областях 0-2-3, 0-3-6-8, 2-1-7-6. Следовательно, рассматриваемая задача является кинематически определимой.

Параметр α_2 определим так, чтобы на линиях 6-2 и 2-1 не было скачка касательной составляющей скорости: $z(\alpha_2)=1/\sqrt{2}$.

Заметим, что параметр c выражается через α_8. Действительно, $u=v$ в точке 8 со стороны области 5-6-8. Воспользовавшись (3.1) найдем, что

$$c=(1-\varepsilon)\left[\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\alpha_8\right)-\sin\left(\frac{1}{4}\pi+\alpha_8\right)\right]$$

4. Сетка характеристик. На линии 7-4 нормальная скорость v должна быть непрерывна. Со стороны жесткой зоны [1]

$$v=\omega X+(1+r)\cos(\pi/4+\varphi)$$

Так как со стороны деформируемой зоны v известно, $v=v(\alpha)$ на линии 7-11, то

$$X=\omega^{-1}v(\alpha)-(1+r)\cos(\varphi+\pi/4)$$

Уравнение $\partial Y / \partial \alpha = -X$ определяет Y. Константа интегрирования и угловая скорость ω определяются из условий прохождения линии 7-11 через точку 11.

Если бы параметры α_6, β_4 и α_8 были известны, то поле характеристик определялось бы во всех областях в следующем порядке: 6-7-11-10, 1-11-10-2, 0-2-3, 0-3-10-9, 9-10-6-5, 5-6-8. В области 5-6-8 поле характеристик строится по условиям на характеристике 5-6 и свободной границе 8-6. Форма линии 8-6 определяется в результате решения.

Рассмотрим вопрос об определении параметров. Параметры сетки характеристик α_6, β_4, α_8 определяются из геометрических условий. Действительно, точка 7 должна лежать на окружности валка. Это приводит к уравнению типа $f_1(\alpha_6, \beta_4, \alpha_8)=0$. Вид функции f_1 не выписываем ввиду его сложности.

Далее необходимо потребовать, чтобы точка 2 лежала на оси симметрии полосы: $\eta_2=0$. Это условие дает уравнение $f_2(\alpha_6, \beta_4, \alpha_8)=0$.

Если уравнения $f_1=0$, $f_2=0$ выполнены, то точка 8 автоматически попадает на прямую $\eta=h_0$. Действительно, из условия несжимаемости следует $\eta_8(1-\varepsilon)=1\cdot 1$, т. е. $\eta_8=1/(1-\varepsilon)h_0$.

Таким образом, один из параметров остается неопределенным.

Натяжения жестких концов полосы определяются из условий их равновесия. Очевидно, что натяжение входящего конца полосы близко к пределу текучести. Оно уравновешивается контактными касательными напряжениями и натяжением выходящего конца полосы T. Среднее растягивающее напряжение в выходящем жестком конце полосы меньше σ_s, если длина линии контакта достаточно велика.

Поступила 28 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друянов Б. А.* Прокатка полосы с противонатяжением. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3.

2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.