

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ  
НЕОДНОРОДНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Т. ВАСИЛЕНКО, Я. М. ГРИГОРЕНКО, Н. Д. ПАНКРАТОВА

(Киев)

Задача о распределении напряжений и перемещений в толстостенных однородных изотропных сферических оболочках была предметом ряда исследований [1-3]. Задача о центрально-симметричной трансверсально изотропной полой сфере рассматривалась еще Сен-Венаном [4]. Построение решения задачи об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии замкнутых толстостенных изотропных и трансверсально изотропных однородных сферических оболочек может быть выполнено на основе представления общих решений осесимметричной задачи теории упругости в сферической системе координат в аналитической форме [5, 6]. Однако численная реализация такого подхода может встретить определенные трудности [6]. Некоторые числовые результаты для однородной сферической оболочки приведены в [5, 6]. Температурные напряжения в толстостенной изотропной оболочке рассмотрены в работе [7]. Детальное исследование напряженно-деформированного состояния трансверсально изотропной сферической оболочки при центрально-симметричном нагреве проведено в статье [8].

В этой работе предлагается метод решения пространственных осесимметричных задач для замкнутых сферических оболочек из дискретно или непрерывно радиально-неоднородных материалов, подверженных действию силовых нагрузок и температурного поля. В предложенном методе строится разрешающая система уравнений относительно функций, в которых формулируются условия контакта смежных слоев, и после разделения переменных с помощью разложений в ряды по полиномам Лежандра полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами решается численным методом. Выполнено решение ряда конкретных задач для однородных и неоднородных оболочек при неравномерных нагрузках и проведено сравнение с решениями, основанными на гипотезе Кирхгофа — Лява.

Рассматриваются толстостенные слоистые замкнутые сферические оболочки, составленные из трансверсально изотропных слоев постоянной толщины, подверженные действию неравномерных осесимметричных поверхностных и массовых сил и температурного поля. В качестве исходных данных для каждого слоя принимаются уравнения пространственной задачи теории упругости в сферической системе координат  $\varphi, \theta, r$  [4, 9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_r^i - \sigma_\varphi^i - \sigma_\theta^i + \tau_{r\varphi}^i \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \rho^i F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\varphi^i - \sigma_\theta^i) \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{r\varphi}^i}{r} + \rho^i F_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}^i}{\partial \varphi} + \frac{3\tau_{r\theta}^i + 2\tau_{\varphi\theta}^i \operatorname{ctg} \varphi}{r} + \rho^i F_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_r^i, \sigma_\varphi^i, \sigma_\theta^i, \tau_{r\varphi}^i, \tau_{r\theta}^i, \tau_{\varphi\theta}^i$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho^i F_r, \rho^i F_\varphi, \rho^i F_\theta$  — составляющие вектора объемных сил;  $r_i$  ( $i=2, 3, \dots, N-1$ ) — радиусы поверхностей контакта смежных слоев.

Выражения для деформаций через перемещения имеют вид

$$\begin{aligned}
 e_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}, & e_\varphi^i &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi^i}{\partial \varphi} + u_r^i \right), & e_\theta^i &= \frac{1}{r} (u_\varphi^i \operatorname{ctg} \varphi + u_r^i) \\
 e_{r\varphi}^i &= \frac{\partial u_\varphi^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r^i}{\partial \varphi} - u_\varphi^i \right), & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r} \\
 e_{\varphi\theta}^i &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \varphi} - u_\theta^i \operatorname{ctg} \varphi \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку материал каждого слоя оболочки обладает свойствами трансверсальной изотропии, то соотношения закона Гука с учетом гипотезы Дюгамеля — Неймана [7, 9] запишутся в форме

$$\begin{aligned}
 e_\varphi^i &= a_{11}^i \sigma_\varphi^i + a_{12}^i \sigma_\theta^i + a_{13}^i \sigma_r^i + \alpha_1^i T, & e_\theta^i &= a_{12}^i \sigma_\varphi^i + a_{11}^i \sigma_\theta^i + a_{13}^i \sigma_r^i + \alpha_1^i T \\
 e_r^i &= a_{13}^i (\sigma_\varphi^i + \sigma_\theta^i) + a_{33}^i \sigma_r^i + \alpha_3^i T, & e_{r\varphi}^i &= a_{44}^i \tau_{r\varphi}^i, & e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i, \\
 e_{\varphi\theta}^i &= 2(a_{11}^i - a_{12}^i) \tau_{\varphi\theta}^i
 \end{aligned} \quad (3)$$

где через  $a_m^i$  обозначены упругие постоянные  $i$ -го слоя оболочки [4], а через  $\alpha_1^i, \alpha_3^i$  — коэффициенты линейного температурного расширения. Материал каждого слоя является неоднородным в радиальном направлении, поэтому указанные характеристики — функции  $r$ . На поверхности контакта  $r=r_i$  имеют место условия совместной работы  $i$ - и  $i+1$ -го слоев без скольжения и отрыва

$$\sigma_r^i = \sigma_r^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = \tau_{r\varphi}^{i+1}, \quad \tau_{r\theta}^i = \tau_{r\theta}^{i+1}, \quad u_r^i = u_r^{i+1}, \quad u_\varphi^i = u_\varphi^{i+1}, \quad u_\theta^i = u_\theta^{i+1} \quad (4)$$

На граничных поверхностях  $r=r_0, r=r_N$  могут быть сформулированы условия как в напряжениях, так и в перемещениях.

В качестве основных неизвестных при построении разрешающей системы уравнений выбираются функции, в которых формулируются условия контакта смежных слоев и условия на граничных поверхностях.

Из исходных уравнений (1)–(3) определенными преобразованиями можно получить для  $i$ -го слоя оболочки систему уравнений (индекс  $i$  здесь и в дальнейшем опускается)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= -\frac{2}{r} \left( 1 + \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \right) \sigma_r - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right) + \frac{2}{r^2 (a_{11} + a_{12})} u_r + \\
 &+ \frac{1}{r^2 (a_{11} + a_{12})} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \right) - \frac{2\alpha_1 T}{r (a_{11} + a_{12})} - \rho F_r \\
 \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} &= \frac{a_{13}}{r (a_{11} + a_{12})} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} - \frac{3}{r} \tau_{r\varphi} - \frac{1}{r^2 (a_{11} + a_{12})} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \\
 &- \frac{1}{\Delta r^2} \left[ a_{11} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \right) + a_{12} u_\varphi \right] + \frac{1}{(a_{11} + a_{12}) r} \frac{\partial \alpha_1 T}{\partial r} - \rho F_\varphi \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{3\tau_{r\theta}}{r} - \frac{1}{2r^2 (a_{11} - a_{12})} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\theta \operatorname{ctg} \varphi \right) + \right. \\
 &+ \left. 2 \operatorname{ctg} \varphi \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\theta \operatorname{ctg} \varphi \right) \right] - \rho F_\theta
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left( a_{33} - \frac{2a_{13}^2}{a_{11} + a_{12}} \right) \sigma_r + \frac{2a_{13}}{(a_{11} + a_{12})r} u_r +$$

$$+ \frac{a_{13}}{(a_{11} + a_{12})r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \right) + \alpha_3 T - \frac{2a_{13}\alpha_1 T}{a_{11} + a_{12}}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = a_{44}\tau_{r\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_\varphi, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = a_{44}\tau_{r\theta} + \frac{1}{r} u_\theta, \quad \Delta = a_{11}^2 - a_{12}^2$$

Решение системы (5) ищется в виде

$$\sigma_r(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_r(r) P_n(\cos \varphi), \quad \tau_{r\varphi}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\varphi}(r) P_n^1(\cos \varphi)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}(r) P_n^1(\cos \varphi), \quad u_r(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w(r) P_n(\cos \varphi) \quad (6)$$

$$u_\theta(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u(r) P_n^1(\cos \varphi), \quad u_\phi(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v(r) P_n^1(\cos \varphi)$$

где  $P_n(\cos \varphi)$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка. В аналогичной форме представляются поверхностные нагрузки, объемные силы и температура

$$\alpha_1 T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1 T(r) P_n(\cos \varphi), \quad \alpha_3 T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_3 T(r) P_n(\cos \varphi)$$

$$\rho F_r = \sum_{n=0}^{\infty} \rho F_r(r) P_n(\cos \varphi) \quad \rho F_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \rho F_\varphi(r) P_n^1(\cos \varphi) \quad (7)$$

$$\rho F_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \rho F_\theta(r) P_n^1(\cos \varphi)$$

Разделяя с помощью выражений (6) и (7) переменные в системе (5), для каждого члена разложения получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN}{dr} = B(r)N + f, \quad N = \{\sigma_r, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\theta}, w, u, v\}, \quad B = \|b_{ip}(r)\| \quad (i, p=1, 2, \dots)$$

$$f = \{f_1, f_2, \dots, f_6\} \quad (8)$$

Ненулевые элементы матрицы  $B$  и компоненты вектора  $f$  для  $n \geq 1$  будут определяться соотношениями

$$b_{11} = -\frac{2}{r} \left( 1 + \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \right), \quad b_{12} = \frac{n(n+1)}{r}, \quad b_{14} = \frac{2}{r^2(a_{11} + a_{12})}, \quad b_{15} = -\frac{b_{14}}{2} n(n+1) \quad (9)$$

$$b_{21} = \frac{a_{13}}{r(a_{11} + a_{12})}, \quad b_{22} = -\frac{3}{r}, \quad b_{24} = -\frac{1}{2} b_{14}, \quad b_{25} = -\frac{a_{11} + a_{12} - a_{11}n(n+1)}{\Delta r^2}$$

$$b_{33} = b_{22}, \quad b_{36} = -\frac{2-n(n+1)}{2r^2(a_{11} - a_{12})}, \quad b_{41} = a_{33} - \frac{2a_{13}^2}{a_{11} + a_{12}}, \quad b_{44} = 2b_{21}, \quad b_{45} = -n(n+1)b_{21}$$

$$b_{52} = b_{63} = a_{44}, \quad b_{54} = -b_{55} = -b_{66} = -\frac{1}{r}, \quad f_1 = -b_{14}\alpha_1 T - \rho F_r$$

$$f_2 = \frac{b_{14}}{2} r\alpha_1 T - \rho F_\varphi, \quad f_3 = -\rho F_\theta, \quad f_4 = \alpha_3 T - 2b_{21}r\alpha_1 T$$

Напряжения  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\varphi\theta}$  выражаются через амплитудные значения разрешающих функций следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_\varphi^{(1)} P_n(\cos \varphi) + \sigma_\varphi^{(2)} \operatorname{ctg} \varphi P_n^1(\cos \varphi)] \\ \sigma_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sigma_\theta^{(1)} P_n(\cos \varphi) + \sigma_\theta^{(2)} \operatorname{ctg} \varphi P_n^1(\cos \varphi)] \\ \tau_{\varphi\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} [\tau_{\varphi\theta}^{(1)} P_n(\cos \varphi) + \tau_{\varphi\theta}^{(2)} \operatorname{ctg} \varphi P_n^1(\cos \varphi)] \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ a_{13}(a_{12}-a_{11})\sigma_r + \frac{a_{11}-a_{12}}{r} w - a_{11} \frac{n(n+1)}{r} u + \alpha_1 T(a_{12}a_{11}) \right] \\ \sigma_\varphi^{(2)} &= -\frac{1}{(a_{11}-a_{12})r} u \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ a_{13}(a_{12}-a_{11})\sigma_r + \frac{a_{11}-a_{12}}{r} w + a_{12} \frac{n(n+1)}{r} u + \alpha_1 T(a_{12}-a_{11}) \right] \\ \sigma_\theta^{(2)} &= -\sigma_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{\varphi\theta}^{(1)} = -\frac{n(n+1)}{2(a_{11}-a_{12})r} v, \quad \tau_{\varphi\theta}^{(2)} = -\frac{v}{(a_{11}-a_{12})r}\end{aligned}$$

Система (8) распадается на две группы уравнений, одна из которых описывает осесимметричную деформацию оболочки без кручения, а вторая — задачу о кручении.

Для случая  $n=0$ , соответствующего центрально-симметричной деформации оболочки, система (8) содержит два уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_r}{dr} &= -\frac{2}{r} \left( 1 + \frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}} \right) \sigma_r + \frac{2}{r^2} \frac{w}{a_{11}+a_{12}} - \frac{2\alpha_1 T}{r(a_{11}+a_{12})} - \rho F_r \\ \frac{dw}{dr} &= \left( a_{33} - \frac{2a_{13}^2}{a_{11}+a_{12}} \right) \sigma_r + \frac{2a_{13}}{r(a_{11}+a_{12})} w + \alpha_3 T - \frac{2a_{13}\alpha_1 T}{a_{11}+a_{12}}\end{aligned}$$

Заметим, что для  $n=1$  на одной из граничных поверхностей необходимо задать смещение  $u_r$  или  $u_\varphi$  для фиксирования перемещения оболочки как жесткого тела:  $u_r = C \cos \varphi$ ,  $u_\varphi = -C \sin \varphi$ ,  $C = \text{const}$ .

Таким образом, в общем случае для каждого номера  $n$  имеем  $N$  ( $N$  — число слоев оболочки) систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (8). Константы в решениях этих систем определяются из шести условий на граничных поверхностях  $r=r_0$ ,  $r=r_N$  и  $6(N-1)$  условий сопряжения слоев (6).

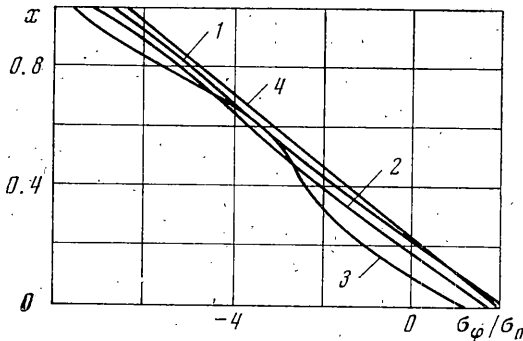
Полученные  $N$  систем уравнений целесообразно представить в виде одной системы шестого порядка, коэффициенты которой задаются различными выражениями на каждом участке  $[r_i, r_{i+1}]$ , соответствующем  $i$ -му слою, и в общем случае являются разрывными в точках сопряжения участков.

Выбор в качестве основных неизвестных функций, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и граничные условия, позволяет автоматически непрерывно проводить решения задач для произвольного числа неоднородных слоев.

Решение краевых задач для систем уравнений (8) находится на ЭЦВМ с помощью устойчивого численного метода дискретной ортогонализации [10].

В алгоритме решения задачи предусмотрено вычисление в произвольной точке оболочки напряжений, перемещений и деформаций.

В качестве примера рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии трансверсально изотропной оболочки под действием локализованной в окрестности полюсов нормальной нагрузки  $q = \sigma_0 \cos^{2M}\varphi$ . Эту нагрузку можно представить в виде конечного отрезка ряда по полиномам Лежандра. При больших  $M$  величина нагрузки быстро убывает при удалении от полюсов оболочки.



Фиг. 1

Решение задачи выполнено для упругих постоянных материала:  $a_{11} = E^{-1}$ ,  $a_{12} = -0.3E^{-1}$ ,  $a_{13} = -1.5E^{-1}$ ,  $a_{33} = 10E^{-1}$ ,  $a_{44} = 1/G' = dE^{-1}$  ( $d = 10, 20$ ).

Исследовался также случай изотропного материала. При решении задачи полагалось  $R = 10$ ,  $h = 1$ ,  $2M = 30$ , где  $R$  — радиус срединной поверхности,  $h$  — толщина оболочки.

Рассмотренная задача решалась также по теории тонких оболочек Кирхгофа — Лява на основе подхода, изложенного в работе [11].

Таблица 1

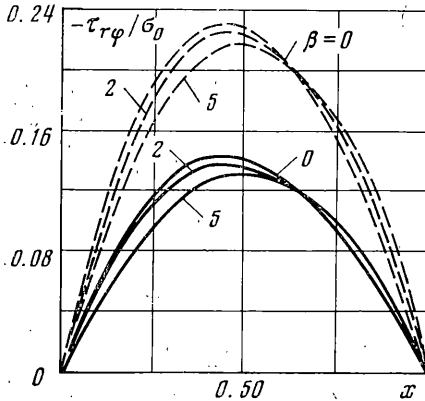
$t$	1	2	3	4
0	-6.730	-7.066	-7.514	-6.349
1	-6.706	-7.040	-7.485	-6.327
2	-6.634	-6.962	-7.399	-6.260
5	-6.149	-6.446	-6.828	-5.805
11	-4.332	-4.533	-4.740	-4.423
17	-2.301	-2.449	-2.269	-2.462
30	-0.111	-0.276	-0.393	-0.056
60	-0.362	-0.365	-0.364	-0.345
90	-0.364	-0.354	-0.342	-0.275

Таблица 2

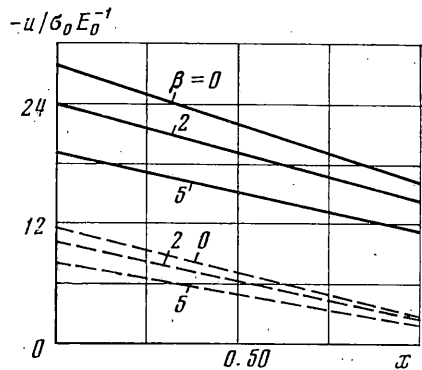
$x$	1	2	3
0	0.568	0.587	0.630
0.2	0.569	0.590	0.630
0.4	0.568	0.585	0.626
0.6	0.566	0.575	0.622
0.8	0.562	0.561	0.656
1.0	0.557	0.542	0.618
		0.504	

Результаты решения представлены в табл. 1, 2 и на фиг. 1. В табл. 1 приводится изменение величины  $\sigma_{\varphi}^+/\sigma_0$  от  $t$  ( $\sigma_{\varphi}^+$  — меридиональные напряжения на внешней поверхности,  $t=180\pi^{-1}\varphi$ ). В табл. 2 показано изменение относительного радиального перемещения  $-10^2 w/E^{-1}\sigma_0$  в полюсе по толщине оболочки. В последней строке табл. 2 дано значение прогиба, полученное по теории тонких оболочек. Распределение меридиональных напряжений по толщине оболочки в полюсе приводится на фиг. 1.

В таблицах и на фигуре цифрами 1–3 отмечены соответственно результаты решения рассматриваемой задачи для изотропной и трансверсально изотропных ( $d=10$  и  $d=20$ ) оболочек. Результаты решения по теории Кирхгофа — Лява отмечены цифрой 4.



Фиг. 2



Фиг. 3

Приведенные данные показывают, что с уменьшением модуля сдвига  $G'$  в окрестности полюса происходит увеличение напряжений на внешней поверхности оболочки и уменьшение их на внутренней. Теория Кирхгофа — Лява дает почти везде заниженные значения напряжений на нагруженной поверхности и завышенные на свободной.

При  $G' \geq E/10$  в окрестности полюса напряжения распределены по толщине оболочки почти по линейному закону. При меньших значениях  $G'$  происходит значительное отклонение распределения нормальных напряжений от линейного. На расстоянии порядка двух толщин от полюса напряжения меняются по толщине почти линейно для всех рассмотренных вариантов значений упругих постоянных.

Из табл. 2 следует, что радиальное перемещение  $w$  в зависимости от степени анизотропии материала имеет максимальное значение в различных точках по толщине оболочки. Так, при  $E/G' \leq 10$  наибольшего значения  $w$  достигает вблизи свободной поверхности, а при  $E/G' = 20$  — вблизи нагруженной. Классическая теория Кирхгофа — Лява дает на 9–20% заниженные значения радиальных перемещений.

Таким образом, полученные результаты указывают на существенную зависимость характера распределения напряжений и перемещений от степени анизотропии материала.

При  $E/G' \leq 10$  достаточно хорошо выполняется предположение о линейном законе распределения тангенциальных напряжений, которое принимается в некоторых приближенных теориях оболочек.

Проводилось также исследование напряженно-деформированного состояния изотропной радиально неоднородной оболочки, модуль упругости материала которой

$$E = \frac{E_0}{1+\alpha} \left[ 1 + \alpha \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta \right]$$

и коэффициент Пуассона  $\nu = \text{const}$ . Здесь  $E_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные величины. Оболочка нагружена внешним давлением, изменяющимся по закону  $q = \sigma_0 P_n(\cos \varphi)$ .

Задача решалась при следующих значениях параметров:  $\alpha=3$ ;  $\beta=0,1, \dots, 5$ ;  $n=0, 2, 3$ ;  $\nu=0.3$ ;  $r_0=10$ ,  $r_N=12$ . Значение  $\beta=0$  соответствует однородному материалу.

Результаты решения задачи показывают, что изменение радиального перемещения по толщине оболочки является незначительным и практически не зависит от степени неоднородности материала.

Распределение амплитудных значений касательных напряжений  $\tau_{r\varphi}$  и меридиональных перемещений  $u$  по толщине оболочки дано на фиг. 2, 3. Сплошные линии

соответствуют  $n=2$ , а пунктирные —  $n=3$ . Из графиков следует, что характер распределения приведенных величин не зависит от неоднородности материала оболочки; перемещения  $u$  являются почти линейной функцией радиальной координаты  $r$ , а касательные напряжения поперечного сдвига распределены по закону, близкому к квадратной параболе.

Это показывает, что для непрерывно неоднородных по толщине оболочек могут быть использованы те же предположения относительно закона распределения перемещений и напряжений поперечного сдвига, которые принимаются в некоторых приближенных теориях однородных оболочек.

Таким образом, предложенный в работе подход позволяет решать задачи статики толстостенных неоднородных сферических оболочек в широком диапазоне изменения геометрических и механических параметров, и полученные результаты могут быть использованы для оценки точности приближенных теорий оболочек, основанных на различных допущениях.

Поступила 26 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1935.
2. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1955.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Гостехиздат, 1950.
5. Chen W. T. On some problems in spherically isotropic elastic materials. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, No. 3, vol. 33.
6. Улитко А. Ф. Напряженное состояние поллой сферы, нагруженной сосредоточенными силами. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 5.
7. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев, «Наукова думка», 1970.
8. Болотина К. С. О термоупругой задаче для толстостенной сферической оболочки из слоистого композита. Изв. вузов. Машиностроение, 1970, № 10.
9. Новожилев В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
11. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев, «Наукова думка», 1973.