По физическому смыслу поставленной задачи положительные числа M, K являются малыми, а число T не мало. Нетрудно доказать, что приближения, определяемые формулами (6.4), образуют сходящуюся последовательность к искомому частному решению системы (6.3). Для этого рассмотрим ряды $x_i^{(1)}+[x_i^{(2)}-x_i^{(1)}]+\ldots$ $\ldots+[x_i^{(m)}-x_i^{(m-1)}]+\ldots$ $(i=1,2)$. Члены рядов по модулю меньше членов знакоположительного числового ряда, общий член которого равен $M(2K)^{m-1}T^m(m!)^{-1}$. Сумма этого ряда $S={}^1/_2MK^{-1}(e^{2KT}-1)$. Поэтому в промежутке $0\leqslant t\leqslant T$ равномерно сходятся и ряды (6.6), суммы которых обладают следующими свойствами: 1) удовлетворяют нулевым начальным условиям, 2) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6.3), 3) являются единственным частным решением этой системы уравнений при нулевых начальных условиях. Заметим, что построенные последовательные приближения ввиду малости чисел M, K сходятся очень быстро и для приближенной оценки частного решения может быть использовано неравенство $|x_i(t)|\leqslant{}^1/_2MK^{-1}(e^{2KT}-1)\approx MT$ $(i=1, 2)$.

Поступила 16 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
2. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М., «Наука», 1966.
3. *Quasius G. K.* Strapdown inertial quidance. Space Aeronaut, 1963, vol. 40, No. 3. (Рус. перев.: Вопросы ракетной техники, 1964, № 5.)
4. *Бабушкин С. А.* Самонастраивающаяся система с нелинейной моделью. В кн.: Самонастраивающиеся автоматические системы. М., «Наука», 1965.
5. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les, applications géométriques du calcul infinitésimal, t. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1887.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Булгаков Б. В.* Колебания. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 629.19:533.6

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ СПУСКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ПОСТОЯННЫМ УГЛОМ НАКЛОНА ТРАЕКТОРИИ

О. А. ПРИВАРНИКОВ

(Запорожье)

Изучается плоское угловое движение летательного аппарата под воздействием возмущающих и управляющих моментов при спуске в атмосфере с постоянным углом наклона траектории. Показано, что дифференциальное уравнение переходного процесса сводится к неоднородному уравнению Уиттекера. Получены приближенные аналитические зависимости изменения угла атаки с высотой для случая неколебательного переходного процесса. Колебательный переходный процесс исследован в [1].

Дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс при спуске с постоянным углом траектории в случае управления подъемной силой, согласно [1], запишем в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dh^2}-(b\rho+c_2\rho e^{-{}^1/_2k\rho})\frac{d\alpha}{dh}+(a\rho+c_1\rho)\alpha=\nu_1e^{k\rho}+\nu_2+\nu_3e^{{}^1/_2k\rho}+\nu_4e^{-{}^1/_2k\rho}+\nu_5\rho e^{{}^1/_2k\rho}+N\rho \quad (1)$$

где все обозначения соответствуют [1]. Серией последовательных замен уравнение (1) приводим к виду

$$\alpha=y(\tau),\qquad \tau=e^{-{}^1/_2Ah}=\rho^{{}^1/_2},\qquad y=z\exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2b}{A}\tau+\frac{2c_2}{A}\tau e^{-{}^1/_2k\tau^2}\right)d\tau\right)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}+I(\tau)z=f(\tau),\qquad I(\tau)=4A^{-2}(a+c_1)-2bA^{-1}+\frac{1}{4}\tau^{-2}-$$
$$-\tau^2A^{-2}[(b+c_2e^{-{}^1/_2k\tau^2})^2-c_2kAe^{-{}^1/_2k\tau^2}]-2c_2A^{-1}e^{-{}^1/_2k\tau^2} \tag{2}$$
$$f(\tau)=4A^{-2}\tau^{-{}^3/_2}(\nu_1e^{k\tau^2}+\nu_2+\nu_3e^{{}^1/_2k\tau^2}+\nu_4e^{-{}^1/_2k\tau^2}+$$
$$+\nu_5\tau^2e^{{}^1/_2k\tau^2}+N\tau^2)\exp({}^1/_2bA^{-1}\tau^2-c_2k^{-1}A^{-1}e^{-{}^1/_2k\tau^2}$$

На большей части траектории можно принять

$$\exp(-{}^1/_2k\rho)\approx1-{}^1/_2k\rho,\qquad \rho<k^{-1} \tag{3}$$

Учитывая (3) и пренебрегая малыми слагаемыми ($\sim\tau^4$), приводим $I(\tau)$ к виду

$$I(\tau)\approx a_2-\mu_2\tau^2+{}^1/_4\tau^{-2},\qquad a_2=4A^{-2}(a+c_1)-2A^{-1}(b+c_2)$$
$$\mu_2=(b+c_2)^2A^{-2}-2c_2kA^{-1} \tag{4}$$

Таким образом, соответствующее (2) однородное уравнение может быть представлено в форме

$$4\tau^2\frac{d^2z}{d\tau^2}+(4a_2\tau^2-4\mu_2\tau^4+1)z=0 \tag{5}$$

Уравнение (5) родственно уравнению Уиттекера и соответствующими подстановками [2] сводится к нему. Если обозначить через $W_{\lambda,\mu}(\tau)$ решение уравнения Уиттекера, то решение (5) примет вид

$$z_1=\tau^{-{}^1/_2}W_{\lambda,0}(\sqrt{\mu_2}\tau^2),\qquad \lambda=a_2/4\sqrt{\mu_2},\qquad \mu=0 \tag{6}$$

Согласно (4) $\mu_2>0$, т. е. аргумент функции $W_{\lambda,\mu}(\tau)$ действителен и μ — целое ($\mu=0$), поэтому $W_{-\lambda,\mu}(-\tau)$ не является решением уравнения Уиттекера, и для построения фундаментальной системы решений (5) второе частное решение z_2 следует искать в виде

$$z_2=z_1\int z_1^{-2}\,d\tau \tag{7}$$

Тогда общее решение (2) может быть записано в форме

$$z=C_1z_1+C_2z_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}z_1^{-2}d\tau+z_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}z_1^{-2}\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad \varphi(\tau)=\int z_1f(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

Несмотря на то что (8) является решением уравнения (2) в квадратурах, его практическое применение эффективно лишь в следующих случаях: $a_2>0$, $a_2\gg|{}^1/_4\tau^{-2}-\mu_2\tau^2|$; $\sqrt{\mu_2}\tau^2\gg1$. Первый случай соответствует устойчивому колебательному переходному процессу и подробно изучался в [1]. Для рассмотрения второго случая воспользуемся асимптотическим представлением [2] функции $W_{\lambda,0}(\sqrt{\mu_2}\tau^2)$

$$W_{\lambda,0}(\sqrt{\mu_2}\,\tau^2)\approx e^{-{}^1/_2\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}(\sqrt{\mu_2}\,\tau^2)^{\lambda}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^n}\prod_{\nu=1}^{n}\left(\lambda+\frac{1}{2}-\nu\right)^2\right\} \tag{9}$$

Если $\sqrt{\mu_2}\tau^2\gg\lambda^2$, можно ограничиться в (9) первым слагаемым

$$W_{\lambda,0}(\sqrt{\mu_2}\tau^2)\approx e^{-{}^1/_2\sqrt{\mu_2}\tau^2}(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^{\lambda},\qquad \sqrt{\mu_2}\gg\lambda^2\tau^{-2} \tag{10}$$

С учетом (6), (8), (10) и начальных условий при $\tau=\tau_0$ общее решение (2) примет вид

$$z=z_1(\tau)\{p_1(\tau_0)+p_2(\tau_0)[g(\tau,\lambda)-g(\tau_0,\lambda)]+G(\tau,\lambda)-G(\tau_0,\lambda)\}$$
$$z_1(\tau)=\tau^{-{}^1/_2}e^{-{}^1/_2\sqrt{\mu_2}\tau^2}(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^{\lambda},\qquad p_1(\tau_0)=z(\tau_0)/z_1(\tau_0)$$
$$p_2(\tau_0)=z_1(\tau_0)z'(\tau_0)-z(\tau_0)z_1'(\tau_0)-\varphi(\tau_0)$$
$$z(\tau_0)=\alpha_0\tau_0^{{}^1/_2}\exp({}^1/_2bA^{-1}\tau_0^2-{}^1/_2c_2k^{-1}A^{-1}e^{-{}^1/_2k\tau_0^2})$$
$$g(\tau,\lambda)=\int z_1^{-2}\,d\tau,\qquad G(\tau,\lambda)=\int z_1^{-2}\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad \varphi(\tau)=\int z_1f(\tau)\,d\tau$$

$$f(\tau) = 4A^{-2}e^{-c_2/kA}\tau^{-3/2}\left(\sum_{i=1}^{4}\nu_i e^{r_i\tau^2} + \nu_5\tau^2 e^{r_3\tau^2} + \nu_6\tau^2 e^{r_2\tau^2}\right)$$

$$r_1 = k + {}^1/_2 A^{-1}(b + c_2), \quad r_2 = r_1 - k, \quad r_3 = r_1 - {}^1/_2 k, \quad r_4 = r_1 - {}^3/_2 k, \quad \nu_6 = N \quad (11)$$

Учитывая, что $\sqrt{\mu_2}\tau^2 \gg 1$, последовательным интегрированием по частям находим асимптотическое представление для $g(\tau, \lambda)$

$$g(\tau, \lambda) = \frac{e^{\sqrt{\mu_2}\tau^2}}{2\sqrt{\mu_2}}(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^{-2\lambda}\eta(\tau, \lambda) \quad (12)$$

$$\eta(\tau, \lambda) = 1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\mu_2}\tau^2} - \frac{2\lambda(2\lambda+1)}{(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^2} + \frac{2\lambda(2\lambda+1)(2\lambda+2)}{(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^3} - \ldots, \quad \sqrt{\mu_2} \gg 2|\lambda|\tau^{-2}$$

При определении $\varphi(\tau)$ экспоненциальную функцию, входящую в подынтегральное выражение, раскладываем в ряд

$$\varphi_i(\tau) = 4A^{-2}\nu_i e^{-c_2/kA}\mu_2^{\lambda/2}\tau^{2\lambda-1}\psi_i(\tau, \lambda), \quad \psi_i(\tau, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p_i\tau^2)^n}{n!(2n+2\lambda-1)} \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\psi_i(\tau, \lambda) = \tau^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p_i\tau^2)^n}{n!(2n+2\lambda+1)} \quad (i=5,6), \quad p_i = r_i - \frac{1}{2}\sqrt{\mu_2}, \quad p_5 = p_3, \quad p_6 = p_2 \quad (13)$$

Так как $c_2A^{-1} \gg k$ и $c_2 \gg b$, приближенно можно принять

$${}^1/_2\sqrt{\mu_2} \approx {}^1/_2(b + c_2)A^{-1} - {}^1/_2 k, \quad p_1 \approx {}^3/_2 k, \quad p_2 \approx {}^1/_2 k, \quad p_3 \approx k, \quad p_4 \approx 0 \quad (14)$$

При вычислении функций $\psi_i(\tau, \lambda)$ можно ограничиться небольшим количеством членов ряда, так как согласно (3), $\tau^2 < k^{-1}$. Обозначим $\tau^2 = x$ и применяя метод последовательного интегрирования по частям, асимптотическое разложение $G_i(x, \lambda)$ получим в виде

$$G_i(x, \lambda) = \frac{1}{2}\mu_2^{-\lambda}\int e^{\sqrt{\mu_2}x}\varphi_i(x)x^{-2\lambda}dx = \frac{1}{2}\mu_2^{-\lambda}e^{\sqrt{\mu_2}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[\varphi_i(x)x^{-2\lambda}]^{(n-1)}}{(\sqrt{\mu_2})^n}$$

Применяя формулу Лейбница для вычисления $(n-1)$ производных произведения функций, после соответствующих преобразований и возвращения к переменной τ представим $G_i(\tau, \lambda)$ в форме

$$G_i(\tau, \lambda) = 2A^{-2}e^{-c_2/kA}\mu_2^{-1/2(\lambda+1)}\nu_i\tau^{-2\lambda-1}e^{\sqrt{\mu_2}\tau^2}\left[\psi_i(\tau, \lambda) + \frac{\xi_i(\tau, \lambda)}{2\sqrt{\mu_2}\tau^2}\right]$$

$$\xi_i(\tau, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\varepsilon_k(\tau, \lambda)\omega_i^{(k)}(\tau, \lambda), \quad \varepsilon_k(\tau, \lambda) = 1 + \frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(k+n)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n)\Gamma(2\lambda)(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^n}$$

$$\omega_i^{(k)}(\tau, \lambda) = e^{p_i\tau^2}\left[\left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-1} + \left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-2}\frac{k-1}{1!}\frac{\lambda - {}^3/_2}{\sqrt{\mu_2}\tau^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\frac{(\lambda - {}^3/_2)(\lambda - {}^5/_2)}{(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^2} + \ldots\right] \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\omega_i^{(k)}(\tau, \lambda) = \tau^2 e^{p_i\tau^2}\left[\left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-1} + \left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-2}\frac{k-1}{1!}\frac{\lambda - {}^1/_2}{\sqrt{\mu_2}\tau^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p_i}{\sqrt{\mu_2}}\right)^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\frac{(\lambda - {}^1/_2)(\lambda - {}^3/_2)}{(\sqrt{\mu_2}\tau^2)^2} + \ldots\right] \quad (i=5,6), \quad \sqrt{\mu_2} \gg 2|\lambda|\tau^{-2} \quad (15)$$

Γ — обозначает гамма-функцию.

Подставляя (12), (13), (15) в (11) и учитывая (14), получим приближенный закон изменения угла атаки

$$\alpha=\alpha_0\exp\left[-\left(\sqrt{\mu_2}+\frac{1}{2}k\right)(\tau^2-\tau_0^2)\right]\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1-2\lambda}+$$

$$+\frac{\alpha_1 R_1(\tau,\lambda)}{\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}\exp\left[-\frac{1}{2}k(\tau^2-\tau_0^2)\right]\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2\lambda-1}+\frac{2R_2(\tau,\lambda)}{A^2\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}\exp\left[-\frac{1}{2}k(\tau^2-\tau_0^2)\right]$$

$$\alpha_1=\frac{\alpha_0^{\bullet}}{AV_0\sin\theta_0}+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\alpha_0+\alpha_0\tau_0^2\left(\sqrt{\mu_2}+\frac{1}{2}k\right)$$

$$R_1(\tau,\lambda)=\eta(\tau,\lambda)-\eta(\tau_0,\lambda)\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{-4\lambda}\exp[-\sqrt{\mu_2}(\tau^2-\tau_0^2)]$$

$$R_2(\tau,\lambda)=\sum_{i=1}^{6}\nu_i\left[\psi_i(\tau,\lambda)+\frac{\xi_i(\tau,\lambda)}{2\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}\right]-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{-2\lambda-1}\exp[-\sqrt{\mu_2}(\tau^2-\tau_0^2)]\times$$

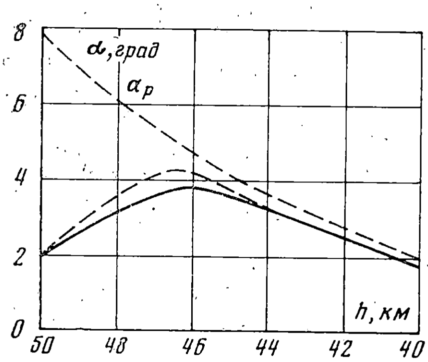
$$\times\sum_{i=1}^{6}\nu_i\left[\psi_i(\tau_0,\lambda)-\frac{\xi_i(\tau_0,\lambda)}{2\sqrt{\mu_2}\,\tau_0^2}\right]-R_1(\tau,\lambda)e^{-\frac{1}{2}k\tau_0^2}\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2\lambda-1}\sum_{i=1}^{6}\nu_i\psi_i(\tau_0,\lambda)\tag{16}$$

Условия применимости соотношений (16) определяются допущениями, принятыми при их получении

$$\sqrt{\mu_2}\tau_0^2\gg\lambda^2,\qquad \sqrt{\mu_2}\tau_0^2\gg2|\lambda|,\qquad \tau^2<k^{-1}\tag{17}$$

При вычислении функций, заданных асимптотическими разложениями, соответствующий ряд необходимо обрывать на члене, с которого начинается его возрастание.

Из (17) следует, что $\mu_2\gg\rho_0^{-2}$, т. е. определяется высотой h_0, с которой начинается управление. Оценку угла атаки в установившемся режиме ($\tau\gg\tau_0$) можно получить из (16), если в разложениях для $\psi_i(\tau,\lambda)$ ограничиться первым слагаемым и положить $e^{p_i\tau^2}\approx1$, $\xi_i^\lambda(\tau,\lambda)\approx-1$, $e^{-\frac{1}{2}k\tau^2}\approx1$



$$\alpha=\alpha_p\left(1+\frac{bA-a}{A^2\sqrt{\mu_2}(\lambda-1/2)}\right)\left(1-\frac{\lambda-1/2}{\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}\right)+$$

$$+\frac{2N}{A^2\sqrt{\mu_2}\,\tau^2}\left(\frac{\tau^2}{2\lambda+1}-\frac{1}{2\sqrt{\mu_2}}\right)$$

$$(\lambda\geqslant2),\qquad(\sqrt{\mu_2}\tau_0^2>10)\tag{18}$$

Соотношение (18) позволяет оценить μ_2, λ исходя из заданной точности отработки программного угла атаки α_p. На фигуре сравниваются значения $\alpha(h)$, полученные численным интегрированием (сплошная линия) и по формуле (16) (пунктирная линия) при начальных условиях $h_0=50$ *км*, $V_0=5$ *км/сек*, $\theta_0=15°$, $\alpha_0=2°$, $\alpha_0^{\bullet}=0$ и параметрах $bA^{-1}=200$, $c_2A^{-1}=10^4$, $a=0$, $c_1A^{-2}=2.5\cdot10^4$, $N=0$, т. е. при $\mu_2=10^8$ и $\lambda=2$. Следует отметить, что значение μ_2 выбрано минимальным ($\sqrt{\mu_2}\tau_0^2\sim9$), а λ — максимальным ($\lambda^2=4$), т. е. на пределе выполнимости (17). Для уменьшения времени переходного процесса и статической ошибки следует увеличить μ_2. При этом точность (16) повысится, так как асимптотические разложения будут представлять соответствующие функции с большей точностью.

Поступила 17 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Приварников О. А.* Аналитический метод решения некоторых задач динамики спуска. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.

2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.