УДК 531.36

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

С. А. БАБУШКИН

(Ленинград)

Задачи, связанные с определением относительного движения двух вращающихся абсолютно твердых тел, ранее рассматривались в [1–4]. В этой работе получены нелинейные дифференциальные уравнения для определения трех углов последовательных поворотов между осями систем координат двух вращающихся тел по заданным проекциям их абсолютных угловых скоростей.

Поставлена задача об определении ошибок углов последовательных поворотов в зависимости от ошибок задания составляющих абсолютных угловых скоростей двух тел. Дифференциальные уравнения преобразованы к удобной для исследования форме и для различных частных случаев интегрируются.

1. Векторы абсолютных угловых скоростей $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ двух вращающихся абсолютно твердых тел будем задавать своими проекциями Ω_X, Ω_Y, Ω_Z и ω_x, ω_y, ω_z соответственно на оси систем координат $OXYZ$ и $Oxyz$, жестко связанных с телами. Обозначим через Q, P, R и Ψ, Θ, Γ углы последовательных поворотов между осями некоторой произвольным образом выбранной инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ и осями систем координат $OXYZ$ и $Oxyz$ соответственно. Обозначим через ψ, ϑ, γ относительные углы последовательных поворотов между системами координат $OXYZ$ и $Oxyz$. Проекции векторов абсолютных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ на оси систем координат $Oxyz$ и $OXYZ$ имеют вид

$$\omega_x=\Gamma^\cdot+\Psi^\cdot \sin\Theta,\qquad \omega_y=\Psi^\cdot\cos\Theta\cos\Gamma+\Theta^\cdot\sin\Gamma,\qquad \omega_z=-\Psi^\cdot\cos\Theta\sin\Gamma+\Theta^\cdot\cos\Gamma \tag{1.1}$$

$$\Omega_X=R^\cdot+Q^\cdot\sin P,\qquad \Omega_Y=Q^\cdot\cos P\cos R+P^\cdot\sin R,\qquad \Omega_Z=-Q^\cdot\cos P\sin R+P^\cdot\cos R \tag{1.2}$$

Выразим проекции абсолютной угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z второго тела через проекции абсолютной угловой скорости Ω_X, Ω_Y, Ω_Z первого тела, углы относительного вращения ψ, ϑ, γ и их производные $\psi^\cdot$, $\vartheta^\cdot$, $\gamma^\cdot$. Полученные соотношения разрешим относительно производных $\psi^\cdot$, $\vartheta^\cdot$, $\gamma^\cdot$

$$\begin{gathered}\psi^\cdot=\cos^{-1}\vartheta\,(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma+\Omega_X\cos\psi\sin\vartheta-\Omega_Y\cos\vartheta-\Omega_Z\sin\psi\sin\vartheta)\\ \vartheta^\cdot=\omega_y\sin\gamma+\omega_z\cos\gamma-\Omega_X\sin\psi-\Omega_Z\cos\psi\\ \gamma^\cdot=\omega_x-\operatorname{tg}\vartheta\,(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)-\cos^{-1}\vartheta\,(\Omega_X\cos\psi-\Omega_Z\sin\psi)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Для нахождения углов ψ, ϑ, γ, характеризующих относительное движение двух тел, в технических задачах могут моделироваться различные системы кинематических уравнений и, в частности, уравнения (1.1), (1.2) абсолютного движения двух вращающихся тел с последующим вычислением углов ψ, ϑ, γ из выражений для тригонометрических функций этих углов через тригонометрические функции углов ориентации обоих тел или уравнения (1.3) относительного движения двух вращающихся тел. Входными сигналами вычислительного устройства являются величины ω_x, ω_y, ω_z, которые измеряются физическими измерителями с ошибками $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$, $\Delta\omega_z$, и величины Ω_X, Ω_Y, Ω_Z, которые либо задаются как известные функции времени некоторым программным устройством, либо определяются в другом вычислительном устройстве с ошибками $\Delta\Omega_X$, $\Delta\Omega_Y$, $\Delta\Omega_Z$.

Вычислительное устройство решает систему трех нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующую систему трех кинематических уравнений (1.3)

$$\begin{gathered}e_\psi^\cdot=\cos^{-1}e_\vartheta[(\omega_y+\Delta\omega_y)\cos e_\gamma-(\omega_z+\Delta\omega_z)\sin e_\gamma+(\Omega_X+\Delta\Omega_X)\cos e_\psi\sin e_\vartheta-\\ -(\Omega_Y+\Delta\Omega_Y)\cos e_\vartheta-(\Omega_Z+\Delta\Omega_Z)\sin e_\psi\sin e_\vartheta]\\ e_\vartheta^\cdot=(\omega_y+\Delta\omega_y)\sin e_\gamma+(\omega_z+\Delta\omega_z)\cos e_\gamma-(\Omega_X+\Delta\Omega_X)\sin e_\psi-(\Omega_Z+\Delta\Omega_Z)\cos e_\psi\\ e_\gamma^\cdot=\omega_x+\Delta\omega_x-\operatorname{tg}e_\vartheta[(\omega_y+\Delta\omega_y)\cos e_\gamma-(\omega_z+\Delta\omega_z)\sin e_\gamma]-\\ -\cos^{-1}e_\vartheta[(\Omega_X+\Delta\Omega_X)\cos e_\psi-(\Omega_Z+\Delta\Omega_Z)\sin e_\psi]\end{gathered} \tag{1.4}$$

при начальных условиях

$$e_\psi^\circ=\psi^\circ+\Delta e_\psi^\circ,\qquad e_\vartheta^\circ=\vartheta^\circ+\Delta e_\vartheta^\circ,\qquad e_\gamma^\circ=\gamma^\circ+\Delta e_\gamma^\circ \tag{1.5}$$

где ψ°, ϑ°, γ° – значения углов ψ, ϑ, γ в момент времени $t=0$; Δe_ψ°, Δe_ϑ°, Δe_γ° – ошибки задания начальных условий. Шесть переменных коэффициентов $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, $\Omega_X(t)$, $\Omega_Y(t)$, $\Omega_Z(t)$ определяются через шесть функций времени $\Psi(t)$, $\Theta(t)$, $\Gamma(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $R(t)$ по формулам (1.1), (1.2). Относительно шести переменных коэффициентов $\Delta\omega_x(t)$, $\Delta\omega_y(t)$, $\Delta\omega_z(t)$, $\Delta\Omega_X(t)$, $\Delta\Omega_Y(t)$, $\Delta\Omega_Z(t)$ будем предполагать только, что они ограничены по модулю малыми положительными числами.

Для системы дифференциальных уравнений (1.4) известно порождающее решение $e_\psi^*=\psi(t)$, $e_\vartheta^*=\vartheta(t)$, $e_\gamma^*=\gamma(t)$, которое имеет место при $\Delta\omega_x(t)=\Delta\omega_y(t)=\Delta\omega_z(t)=0$, $\Delta\Omega_X(t)=\Delta\Omega_Y(t)=\Delta\Omega_Z(t)=0$, $\Delta e_\psi{}^\circ=\Delta e_\vartheta{}^\circ=\Delta e_\gamma{}^\circ=0$ и определяется формулами

$$-\sin\psi\cos\vartheta=\cos\Psi\cos\Theta(\sin Q\cos R+\cos Q\sin P\sin R)-\sin\Theta\cos P\sin R-$$
$$-\sin\Psi\cos\Theta(\cos Q\cos R-\sin Q\sin P\sin R)$$
$$\sin\vartheta=\cos\Psi\cos\Theta(\sin Q\sin R-\cos Q\sin P\cos R)+\sin\Theta\cos P\cos R-$$
$$-\sin\Psi\cos\Theta(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R)$$
$$-\sin\gamma\cos\vartheta=(\sin\Psi\cos\Gamma+\cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)(\sin Q\sin R-\cos Q\sin P\cos R)-$$
$$-\cos\Theta\sin\Gamma\cos P\cos R+(\cos\Psi\cos\Gamma-\sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R) \tag{1.6}$$

Исследуем частные решения системы (1.4) в некоторой, в общем случае, не малой окрестности порождающего решения.

2. Вместо неизвестных e_ψ, e_ϑ, e_γ введем в рассмотрение новые неизвестные e_Ψ, e_Θ, e_Γ, определив их следующими нелинейными конечными уравнениями прямого и обратного преобразования:

$$-\sin e_\Psi\cos e_\Theta=-\sin Q\cos P\cos e_\psi\cos e_\vartheta+(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R)\sin e_\vartheta-$$
$$-(\cos Q\cos R-\sin Q\sin P\sin R)\sin e_\psi\cos e_\vartheta$$
$$\sin e_\Theta=\sin P\cos e_\psi\cos e_\vartheta+\cos P\cos R\sin e_\vartheta+\cos P\sin R\sin e_\psi\cos e_\vartheta$$
$$-\sin e_\Gamma\cos e_\Theta=\sin P(\sin e_\psi\cos e_\gamma+\cos e_\psi\sin e_\vartheta\sin e_\gamma)-\cos P\cos R\cos e_\vartheta\sin e_\gamma-$$
$$-\cos P\sin R(\cos e_\psi\cos e_\gamma-\sin e_\psi\sin e_\vartheta\sin e_\gamma) \tag{2.1}$$
$$-\sin e_\psi\cos e_\vartheta=(\sin Q\cos R+\cos Q\sin P\sin R)\cos e_\Psi\cos e_\Theta-\cos P\sin R\sin e_\Theta-$$
$$-(\cos Q\cos R-\sin Q\sin P\sin R)\sin e_\Psi\cos e_\Theta$$
$$\sin e_\vartheta=(\sin Q\sin R-\cos Q\sin P\cos R)\cos e_\Psi\cos e_\Theta+\cos P\cos R\sin e_\Theta-$$
$$-(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R)\sin e_\Psi\cos e_\Theta$$
$$-\sin e_\gamma\cos e_\vartheta=(\sin Q\sin R-\cos Q\sin P\cos R)(\sin e_\Psi\cos e_\Gamma+\cos e_\Psi\sin e_\Theta\sin e_\Gamma)-$$
$$-\cos P\cos R\cos e_\Theta\sin e_\Gamma+(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R)\times$$
$$\times(\cos e_\Psi\cos e_\Gamma-\sin e_\Psi\sin e_\Theta\sin e_\Gamma) \tag{2.2}$$

Продифференцируем по времени соотношения (2.1) и подставим вместо производных $Q^\cdot$, $P^\cdot$, $R^\cdot$ и $e_\psi^\cdot$, $e_\vartheta^\cdot$, $e_\gamma^\cdot$ их выражения из уравнений (1.2), (1.4). После преобразований получим систему трех нелинейных дифференциальных уравнений

$$e_\Psi^\cdot=\cos^{-1}e_\Theta[(\omega_y+\Delta\omega_y)\cos e_\Gamma-(\omega_z+\Delta\omega_z)\sin e_\Gamma+\Delta\Omega_\xi\sin e_\Theta\cos e_\Psi-\Delta\Omega_\eta\cos e_\Theta-$$
$$-\Delta\Omega_\zeta\sin e_\Theta\sin e_\Psi]$$
$$e_\Theta^\cdot=(\omega_y+\Delta\omega_y)\sin e_\Gamma+(\omega_z+\Delta\omega_z)\cos e_\Gamma-\Delta\Omega_\xi\sin e_\Psi-\Delta\Omega_\zeta\cos e_\Psi \tag{2.3}$$
$$e_\Gamma^\cdot=\omega_x+\Delta\omega_x-\operatorname{tg}e_\Theta[(\omega_y+\Delta\omega_y)\cos e_\Gamma-(\omega_z+\Delta\omega_z)\sin e_\Gamma]-\cos^{-1}e_\Theta(\Delta\Omega_\xi\cos e_\Psi-\Delta\Omega_\zeta\sin e_\Psi)$$

$$\Delta\Omega_\xi=\Delta\Omega_X\cos Q\cos P+\Delta\Omega_Y(\sin Q\sin R-\cos Q\sin P\cos R)+$$
$$+\Delta\Omega_Z(\sin Q\cos R+\cos Q\sin P\sin R)$$
$$\Delta\Omega_\eta=\Delta\Omega_X\sin P+\Delta\Omega_Y\cos P\cos R-\Delta\Omega_Z\cos P\sin R \tag{2.4}$$
$$\Delta\Omega_\zeta=-\Delta\Omega_X\sin Q\cos P+\Delta\Omega_Y(\cos Q\sin R+\sin Q\sin P\cos R)+$$
$$+\Delta\Omega_Z(\cos Q\cos R-\sin Q\sin P\sin R)$$

Далее введем в рассмотрение еще одну группу неизвестных функций e_q, e_p, e_r, определив их следующими нелинейными конечными уравнениями прямого и обратного преобразования

$$-\sin e_q\cos e_p=(\sin\Psi\sin\Gamma-\cos\Psi\sin\Theta\cos\Gamma)(\cos e_\Psi\sin e_\Gamma+\sin e_\Psi\sin e_\Theta\cos e_\Gamma)-$$
$$-\cos\Psi\cos\Theta\sin e_\Psi\cos e_\Theta+(\sin\Psi\cos\Gamma+\cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\times$$
$$\times(\cos e_\Psi\cos e_\Gamma-\sin e_\Psi\sin e_\Theta\sin e_\Gamma)$$
$$\sin e_p=\cos\Psi\cos\Theta\sin e_\Theta+(\sin\Psi\sin\Gamma-\cos\Psi\sin\Theta\cos\Gamma)\cos e_\Theta\cos e_\Gamma-$$
$$-(\sin\Psi\cos\Gamma+\cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\cos e_\Theta\sin e_\Gamma$$
$$\sin e_r\cos e_p=-\sin\Psi\cos\Theta\sin e_\Theta+(\cos\Psi\sin\Gamma+\sin\Psi\sin\Theta\cos\Gamma)\cos e_\Theta\cos e_\Gamma-$$
$$-(\cos\Psi\cos\Gamma-\sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\cos e_\Theta\sin e_\Gamma \tag{2.5}$$
$$-\sin e_\Psi\cos e_\Theta=-\cos\Psi\cos\Theta\sin e_q\cos e_p+\sin\Theta(\cos e_q\sin e_r+\sin e_q\sin e_p\cos e_r)-$$
$$-\sin\Psi\cos\Theta(\cos e_q\cos e_r-\sin e_q\sin e_p\sin e_r)$$
$$\sin e_\Theta=\cos\Psi\cos\Theta\sin e_p+\sin\Theta\cos e_p\cos e_r+\sin\Psi\cos\Theta\cos e_p\sin e_r$$

$$-\sin e_\Gamma \cos e_\Theta = (\sin\Psi\cos\Gamma + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\sin e_p - \cos\Theta\sin\Gamma\cos e_p\cos e_r -$$
$$-(\cos\Psi\cos\Gamma - \sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\cos e_p\sin e_r \tag{2.6}$$

Продифференцировав по времени соотношения (2.5) и подставив вместо производных $\Psi^\bullet$, $\Theta^\bullet$, $\Gamma^\bullet$ и $e_\Psi^\bullet$, $e_\Theta^\bullet$, $e_\Gamma^\bullet$ их выражения из уравнений (1.1), (2.3), после преобразований получим систему трех нелинейных дифференциальных уравнений

$$e_p^\bullet = \Delta\omega_\zeta\cos e_r + \Delta\omega_\eta\sin e_r - \Delta\Omega_\xi\sin e_q - \Delta\Omega_\zeta\cos e_q \tag{2.7}$$
$$e_r^\bullet = \Delta\omega_\xi - \operatorname{tg} e_p(\Delta\omega_\eta\cos e_r - \Delta\omega_\zeta\sin e_r) - \cos^{-1} e_p(\Delta\Omega_\xi\cos e_q - \Delta\Omega_\zeta\sin e_q)$$
$$e_q^\bullet = \cos^{-1} e_p(\Delta\omega_\eta\cos e_r - \Delta\omega_\zeta\sin e_r) + \Delta\Omega_\xi\sin e_p\cos e_q - \Delta\Omega_\eta\cos e_p - \Delta\Omega_\zeta\sin e_q\sin e_p$$
$$\Delta\omega_\xi = \Delta\omega_x\cos\Psi\cos\Theta + \Delta\omega_y(\sin\Psi\sin\Gamma - \cos\Psi\sin\Theta\cos\Gamma) +$$
$$+\Delta\omega_z(\sin\Psi\cos\Gamma + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)$$
$$\Delta\omega_\eta = \Delta\omega_x\sin\Theta + \Delta\omega_y\cos\Theta\cos\Gamma - \Delta\omega_z\cos\Theta\sin\Gamma \tag{2.8}$$
$$\Delta\omega_\zeta = -\Delta\omega_x\sin\Psi\cos\Theta + \Delta\omega_y(\cos\Psi\sin\Gamma + \sin\Psi\sin\Theta\cos\Gamma) +$$
$$+\Delta\omega_z(\cos\Psi\cos\Gamma - \sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)$$

Начальные условия $e_p(0)$, $e_r(0)$, $e_q(0)$ для интегрирования системы (2.7) определяются в функции начальных условий (1.5) конечными формулами (2.1), (2.5). Система уравнений (2.7) более проста для интегрирования, чем исходная система (1.4), потому что при малых по модулю функциях времени $\Delta\omega_x(t)$, $\Delta\omega_y(t)$, $\Delta\omega_z(t)$, $\Delta\Omega_X(t)$, $\Delta\Omega_Y(t)$, $\Delta\Omega_Z(t)$ и числах Δe_ψ°, Δe_ϑ°, Δe_γ° эта система имеет малые по модулю переменные коэффициенты $\Delta\omega_\xi(t)$, $\Delta\omega_\eta(t)$, $\Delta\omega_\zeta(t)$, $\Delta\Omega_\xi(t)$, $\Delta\Omega_\eta(t)$, $\Delta\Omega_\zeta(t)$ и начальные условия для интегрирования $e_p(0)=e_p^\circ$, $e_r(0)=e_r^\circ$, $e_q(0)=e_q^\circ$.

Все приведенные выше преобразования имеют физический смысл.

Нелинейные конечные уравнения (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) представляют собой соотношения для направляющих косинусов углов между осями систем координат $Oxyz$, $OXYZ$, $O\xi\eta\zeta$ и осями их моделирующих систем координат, воспроизводимых с учетом ошибок $\Delta\omega_x(t)$, ..., $\Delta\Omega_z(t)$; Δe_ψ°, Δe_ϑ°, Δe_γ° в рассматриваемом вычислительном устройстве. Переход от системы дифференциальных уравнений (1.4) к системе (2.3) и далее к системе (2.7) последовательно переводит задачу изучения относительного вращения двух тел с заданными большими угловыми скоростями и неизвестными малыми погрешностями в угловых скоростях к существенно более простой задаче изучения относительного вращения тел только с малыми неизвестными погрешностями в угловых скоростях.

3. Рассмотрим частный случай

$$\Delta\omega_x(t) = \Delta\omega_y(t) = \Delta\omega_z(t) = \Delta\Omega_X(t) = \Delta\Omega_Y(t) = \Delta\Omega_Z(t) = 0 \tag{3.1}$$

Система дифференциальных уравнений (2.7) в этом случае имеет решение

$$e_p = e_p^\circ, \qquad e_r = e_r^\circ, \qquad e_q = e_q^\circ \tag{3.2}$$

Так как система дифференциальных уравнений (2.7) эквивалентна системе (2.3), то нетрудно получить общее решение последней системы дифференциальных уравнений.

Действительно, обозначив через $e_\Psi^\circ = e_\Psi(0)$, $e_\Theta^\circ = e_\Theta(0)$, $e_\Gamma^\circ = e_\Gamma(0)$, $\Psi^\circ = \Psi(0)$, $\Theta^\circ = \Theta(0)$, $\Gamma^\circ = \Gamma(0)$ начальные значения переменных e_Ψ, e_Θ, e_Γ, Ψ, Θ, Γ, запишем систему конечных уравнений (2.5) для момента времени $t=0$ и разрешим эту систему относительно постоянных e_q°, e_p°, e_r°

$$e_u^\circ = f_u^\circ(e_\Psi^\circ, e_\Theta^\circ, e_\Gamma^\circ, \Psi^\circ, \Theta^\circ, \Gamma^\circ) \quad (u=q,p,r) \tag{3.3}$$
$$f_q^\circ = -\arcsin[s_1^\circ(1-s_2^{\circ 2})^{-1/2}], \qquad f_p^\circ = \arcsin s_2^\circ, \qquad f_r^\circ = -\arcsin[s_3^\circ(1-s_2^{\circ 2})^{-1/2}]$$
$$s_1^\circ = -\cos\Psi^\circ\cos\Theta^\circ\sin e_\Psi^\circ\cos e_\Theta^\circ + (\sin\Psi^\circ\sin\Gamma^\circ - \cos\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\cos\Gamma^\circ)\times$$
$$\times(\cos e_\Psi^\circ\sin e_\Gamma^\circ + \sin e_\Psi^\circ\sin e_\Theta^\circ\cos e_\Gamma^\circ) + (\sin\Psi^\circ\cos\Gamma^\circ + \cos\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\sin\Gamma^\circ)\times$$
$$\times(\cos e_\Psi^\circ\cos e_\Gamma^\circ - \sin e_\Psi^\circ\sin e_\Theta^\circ\sin e_\Gamma^\circ)$$
$$s_2^\circ = \cos\Psi^\circ\cos\Theta^\circ\sin e_\Theta^\circ + (\sin\Psi^\circ\sin\Gamma^\circ - \cos\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\cos\Gamma^\circ)\cos e_\Theta^\circ\cos e_\Gamma^\circ -$$
$$-(\sin\Psi^\circ\cos\Gamma^\circ + \cos\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\sin\Gamma^\circ)\cos e_\Theta^\circ\sin e_\Gamma^\circ$$
$$s_3^\circ = -\sin\Psi^\circ\cos\Theta^\circ\sin e_\Theta^\circ + (\cos\Psi^\circ\sin\Gamma^\circ + \sin\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\cos\Gamma^\circ)\cos e_\Theta^\circ\cos e_\Gamma^\circ -$$
$$-(\cos\Psi^\circ\cos\Gamma^\circ - \sin\Psi^\circ\sin\Theta^\circ\sin\Gamma^\circ)\cos e_\Theta^\circ\sin e_\Gamma^\circ$$

Подставим теперь полученные выражения (3.3) в систему конечных уравнений (2.6) и разрешим эту систему уравнений относительно переменных e_Ψ, e_Θ, e_Γ

$$e_w = f_w[e_\Psi^\circ, e_\Theta^\circ, e_\Gamma^\circ, \Psi(t), \Theta(t), \Gamma(t), \Psi^\circ, \Theta^\circ, \Gamma^\circ] \quad (w=\Psi,\Theta,\Gamma) \tag{3.4}$$
$$f_\Psi = -\arcsin[g_1(1-g_2^2)^{-1/2}], \qquad f_\Theta = \arcsin g_2, \qquad f_\Gamma = -\arcsin[g_3(1-g_2^2)^{-1/2}]$$
$$g_1 = -\cos\Psi\cos\Theta\sin f_q^\circ\cos f_p^\circ + \sin\Theta(\cos f_q^\circ\sin f_r^\circ + \sin f_q^\circ\sin f_p^\circ\cos f_r^\circ) -$$
$$-\sin\Psi\cos\Theta(\cos f_q^\circ\cos f_r^\circ - \sin f_q^\circ\sin f_p^\circ\sin f_r^\circ)$$

$$g_2 = \cos\Psi\cos\Theta\sin f_p^\circ + \sin\Theta\cos f_p^\circ\cos f_r^\circ + \sin\Psi\cos\Theta\cos f_p^\circ\sin f_r^\circ$$
$$g_3 = (\sin\Psi\cos\Gamma + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\sin f_p^\circ - \cos\Theta\sin\Gamma\cos f_p^\circ\cos f_r^\circ -$$
$$-(\cos\Psi\cos\Gamma - \sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma)\cos f_p^\circ\sin f_r^\circ$$

Три конечных уравнения (3.4) представляют общее решение системы дифференциальных уравнений (2.3).

Основываясь на конечных соотношениях (2.1), (2.2), совершенно аналогично получим общее решение исходной системы дифференциальных уравнений (1.4), которое так же как и (3.4), запишем в форме

$$e_v = \varphi_v[\Psi(t), \Theta(t), \Gamma(t), \Psi^\circ, \Theta^\circ, \Gamma^\circ; Q(t), P(t), R(t); Q^\circ, P^\circ, R^\circ; e_\psi^\circ, e_\vartheta^\circ, e_\gamma^\circ] \quad (v=\psi, \vartheta, \gamma) \tag{3.5}$$

Общие решения (3.4), (3.5) построены без всяких ограничений на начальные условия, следовательно, числа Δe_ψ°, Δe_ϑ°, Δe_γ° в соотношениях (1.5) можно и не предполагать малыми по модулю.

В рассматриваемом частном случае три функции времени $\Psi(t)$, $\Theta(t)$, $\Gamma(t)$ являются частным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.3). Общее решение этой системы, удовлетворяющее произвольным начальным условиям e_Ψ°, e_Θ°, e_Γ°, определяется, как следует из (3.4), по одному известному частному решению. Этот результат служит еще одним доказательством известной теоремы Дарбу в задаче определения абсолютного углового положения вращающегося твердого тела [5]. К дифференциальному уравнению Риккати для комплексной переменной и квадратуре [6], исследуемых Дарбу, система дифференциальных уравнений (2.3) преобразуется посредством введения новых неизвестных

$$z = z_1 + iz_2, \qquad z_1 = \frac{\sin e_\Theta}{1+\cos e_\Theta\cos e_\Gamma}, \qquad z_2 = -\frac{\cos e_\Theta \sin e_\Gamma}{1+\cos e_\Theta\cos e_\Gamma}$$
$$\eta = e_\Psi + \operatorname{arctg}\frac{z_1(1-z_1^2-z_2^2)}{z_2(1+z_1^2+z_2^2)} - i\ln(z_1^2+z_2^2)^{1/2}$$

Преобразованная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$z^\bullet \frac{1}{2}(\omega_z - i\omega_x) + i\omega_y z + \frac{1}{2}(\omega_z + i\omega_x) z^2, \qquad \eta^\bullet = \frac{1}{2}(\omega_z + i\omega_x)\left(z + \frac{1}{\bar z}\right)$$

Соотношения (3.5) обобщают теорему Дарбу на задачу определения относительного углового положения двух вращающихся твердых тел.

4. Предполагая неизвестные функции e_p, e_r, e_q в системе нелинейных дифференциальных уравнений (2.7) малыми и линеаризуя уравнения этой системы, получим систему трех линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$e_p^\bullet - \Delta\omega_\eta e_r + \Delta\Omega_\xi e_q = \Delta\omega_\zeta - \Delta\Omega_\zeta \tag{4.1}$$
$$e_r^\bullet - \Delta\Omega_\zeta e_q + \Delta\omega_\eta e_p = \Delta\omega_\xi - \Delta\Omega_\xi, \qquad e_q^\bullet - \Delta\Omega_\xi e_p + \Delta\omega_\zeta e_r = \Delta\omega_\eta - \Delta\Omega_\eta$$

которая должна интегрироваться при начальных условиях $e_p(0) = e_p^\circ$, $e_r(0) = e_r^\circ$, $e_q(0) = e_q^\circ$.

Рассмотрим два частных случая интегрирования системы уравнений (4.1).

Если пренебречь в левых частях уравнений (4.1) произведениями малых неизвестных функций e_p, e_r, e_q на малые переменные коэффициенты $\Delta\Omega_\xi(t), \ldots, \Delta\omega_\zeta(t)$, то придем к системе уравнений

$$e_p^\bullet = \Delta\omega_\zeta - \Delta\Omega_\zeta, \qquad e_r^\bullet = \Delta\omega_\xi - \Delta\Omega_\xi, \qquad e_q^\bullet = \Delta\omega_\eta - \Delta\Omega_\eta \tag{4.2}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (4.2) имеет вид

$$e_p = e_p^\circ + \int_0^t [\Delta\omega_\zeta(\tau) - \Delta\Omega_\zeta(\tau)]d\tau, \qquad e_r = e_r^\circ + \int_0^t [\Delta\omega_\xi(\tau) - \Delta\Omega_\xi(\tau)]d\tau$$
$$e_q = e_q^\circ + \int_0^t [\Delta\omega_\eta(\tau) - \Delta\Omega_\eta(\tau)]d\tau \tag{4.3}$$

В случае

$$\Delta\Omega_\xi(t) = \Delta\Omega_\eta(t) = \Delta\Omega_\zeta(t) = 0 \tag{4.4}$$

полученные выражения (4.3) для вариаций e_p, e_r, e_q углов e_ψ, e_ϑ, e_γ эквивалентны по физическому смыслу выражениям для вариаций направляющих косинусов углов [2]. Основываясь на формулах (2.4), (2.8) и предполагая функции времени $\Delta\omega_x(t), \ldots, \Delta\Omega_Z(t)$ в уравнениях системы (1.4) ограниченными по модулю малыми положительными числами ε, E

$$|\Delta\omega_v(t)| \leqslant \varepsilon \quad (v=x,\,y,\,z), \qquad |\Delta\Omega_w(t)| \leqslant E \quad (w=X,\,Y,\,Z) \tag{4.5}$$

нетрудно дать оценку сверху интегралов (4.3) в произвольный момент времени t, а именно

$$\left|\int\limits_0^t [\Delta\omega_u(\tau) - \Delta\Omega_u(\tau)]\,d\tau\right| \leqslant 3(\varepsilon+E)t \quad (u=\xi,\eta,\zeta) \tag{4.6}$$

Оценки (4.6) являются, естественно, очень грубыми и в каждой конкретной технической задаче необходимо более точными методами оценивать интегралы (4.3), причем в отдельных случаях может оказаться, что вариации e_p, e_r, e_q углов вообще не возрастают с течением времени (ошибки не накапливаются).

Остановимся на одной из таких задач, поставленной в работе [4].

В вычислительном устройстве системы инерциальной навигации с горизонтируемой гироплатформой для определения широты φ и долготы λ движущегося объекта и курсового угла χ гироплатформы относительно направления на север должна моделироваться система трех кинематических уравнений связей

$$\lambda^\bullet = \cos^{-1}\varphi\,(\omega_y\cos\chi+\omega_x\sin\chi)-U, \qquad \varphi^\bullet=\omega_y\sin\chi-\omega_x\cos\chi,$$
$$\chi^\bullet = -\operatorname{tg}\varphi\,(\omega_y\cos\chi+\omega_x\sin\chi) \tag{4.7}$$

которая получается из рассматриваемой системы кинематических уравнений (1.3) заменой обозначений переменных $\psi\to\lambda$, $\vartheta\to\varphi$, $\gamma\to\chi$, $\omega_x\to\omega_z=0$, $\omega_z\to-\omega_x$, $\Omega_X=\Omega_Z=0$, $\Omega_Y=U=\text{const}$.

Обозначим через $\Delta e_\lambda=e_\lambda-\lambda$, $\Delta e_\varphi=e_\varphi-\varphi$, $\Delta e_\chi=e_\chi-\chi$ малые отклонения координат вычислительного устройства e_λ, e_φ, e_χ от вычисляемых переменных величин λ, φ, χ. Из конечных соотношений (2.5), (2.1) в линейном приближении получаем формулы прямого, а из соотношений (2.2), (2.6) – обратного преобразования вариаций e_p, e_r, e_q через вариации Δe_λ, Δe_φ, Δe_χ

$$e_q=\Delta e_\lambda+\Delta e_\chi\sin\varphi, \qquad e_p=\Delta e_\varphi\cos(Ut+\lambda)-\Delta e_\chi\cos\varphi\sin(Ut+\lambda)$$
$$e_r=\Delta e_\varphi\sin(Ut+\lambda)+\Delta e_\chi\cos\varphi\cos(Ut+\lambda) \tag{4.8}$$
$$\Delta e_\lambda=e_q-\operatorname{tg}\varphi[-e_p\sin(Ut+\lambda)+e_r\cos(Ut+\lambda)], \qquad \Delta e_\varphi=e_r\sin(Ut+\lambda)+e_p\cos(Ut+\lambda)$$
$$\Delta e_\chi=\cos^{-1}\varphi[e_r\cos(Ut+\lambda)-e_p\sin(Ut+\lambda)]$$

В частном случае

$$\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_0^\bullet t, \qquad \varphi(t)=\varphi_0, \qquad \chi(t)=\chi_0-(U+\lambda_0^\bullet)t\sin\varphi_0$$
$$\Delta\omega_x(t)=\Delta\omega_x^\circ=\text{const}, \qquad \Delta\omega_y(t)=\Delta\omega_y^\circ=\text{const}, \qquad \Delta\omega_z(t)=0$$

квадратуры (4.3) вычисляются, и общее решение (4.8) записывается в виде

$$\Delta e_\lambda=\Delta e_\lambda^\circ+\Delta e_\chi^\circ\sin\varphi_0[1-\cos(U+\lambda_0^\bullet)t]+\Delta e_\varphi^\circ\operatorname{tg}\varphi_0\sin(U+\lambda_0^\bullet)t+$$
$$+2M_0(1-3\sin^2\varphi_0)\sin^{-1}2\varphi_0[\Delta\omega_x^\circ\cos(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)-\Delta\omega_y^\circ\sin(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)]$$
$$\Delta e_\varphi=\Delta e_\varphi^\circ\cos(U+\lambda_0^\bullet)t+\Delta e_\chi^\circ\cos\varphi_0\sin(U+\lambda_0^\bullet)t-$$
$$-2M_0\sin\varphi_0[\Delta\omega_x^\circ\sin(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)+\Delta\omega_y^\circ\cos(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)]$$
$$\Delta e_\chi=-\Delta e_\varphi^\circ\cos^{-1}\varphi_0\sin(U+\lambda_0^\bullet)t+\Delta e_\chi^\circ\cos(U+\lambda_0^\bullet)t+$$
$$+M_0(1+\sin^2\varphi_0)\cos^{-1}\varphi_0[\Delta\omega_x^\circ\cos(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)-\Delta\omega_y^\circ\sin(\chi_0-\Lambda_0^\bullet t)] \tag{4.9}$$

где Δe_λ°, Δe_φ°, Δe_χ° – значения соответствующих вариаций в момент времени $t=0$ и $M_0=(U+\lambda_0^\bullet)^{-1}\cos^{-2}\varphi_0$, $\Lambda_0^\bullet=(U+\lambda_0^\bullet)\sin\varphi_0$.

Из приведенных выражений видно, что постоянные погрешности $\Delta\omega_x^\circ$, $\Delta\omega_y^\circ$ на входе рассматриваемого вычислительного устройства обусловливают периодические колебания ошибок на его выходе с круговой частотой $\Lambda_0^\bullet$.

Для длительно работающих систем инерциальной навигации постоянные составляющие ошибок $\Delta\omega_x^\circ$, $\Delta\omega_y^\circ$ на входе вычислительного устройства обычно удается определить техническими средствами и скомпенсировать. Под величинами $\Delta\omega_x(t)$, $\Delta\omega_y(t)$ тогда понимают оставшиеся нескомпенсированные составляющие ошибок, о которых только известно, что они ограничены по модулю. При неблагоприятных обстоятельствах эти ограниченные ошибки на входе вычислительного устройства могут привести к накоплению ошибок на его выходе и возникает задача об определении верхних пределов указанных ошибок.

Введем векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ с компонентами x_i, u_i $(i=1, 2, 3)$ и матрицу W с элементами W_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$, такие, что

$$x_1=e_p, \quad x_2=e_r, \quad x_3=e_q, \quad u_1=\Delta\omega_x, \quad u_2=\Delta\omega_y, \quad u_3=\Delta\omega_z$$

$$W_{11}=-\sin\Psi\cos\Theta, \quad W_{12}=\cos\Psi\sin\Gamma+\sin\Psi\sin\Theta\cos\Gamma$$

$$W_{13}=\cos\Psi\cos\Gamma-\sin\Psi\sin\Theta\sin\Gamma$$

$$W_{21}=\cos\Psi\cos\Theta, \quad W_{22}\sin\Gamma-\cos\Psi\sin\Theta\cos\Gamma$$

$$W_{23}=\sin\Psi\cos\Gamma+\cos\Psi\sin\Theta\sin\Gamma$$

$$W_{31}=\sin\Theta, \quad W_{32}=\cos\Theta\cos\Gamma, \quad W_{33}=-\cos\Theta\sin\Gamma$$

и с учетом (2.8), (4.4) представим общее решение (4.3) в виде

$$\Delta\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^\circ\int\limits_{t_0}^{t}W(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau, \quad t_0=0 \tag{4.10}$$

В соответствии с работой [7] функцию $\mathbf{u}(t)$ можно рассматривать как элемент некоторого банахова пространства B, определяя в промежутке времени $t_0\leqslant t\leqslant\infty$ различным способом нормы функций $\mathbf{u}(t)$, а функцию $\Delta\mathbf{x}(t)$ как элемент пространства C ограниченных непрерывных в промежутке $t_0\leqslant t\leqslant\infty$ функций с нормой: $\|\Delta x\|_C=\sup\|\Delta x(t)\|$ при $t\geqslant t_0$.

Формула (4.10) задает линейный оператор Φ, переводящий пространство B в пространство C. Для конечного промежутка времени справедливо соотношение

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\|\Delta\mathbf{x}(t)\|\leqslant\|\Phi(t_0, t_1)\|\,\|\mathbf{u}\|_{B(t_0, t_1)}$$

Таким образом, для определения верхних пределов рассматриваемых ошибок $e_p-e_p^\circ$, $e_r-e_r^\circ$, $e_q-e_q^\circ$, т. е. для решения задачи о накоплении возмущений в рассматриваемом вычислительном устройстве, функционирование которого при наличии возмущений описывается системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений (4.1), а в упрощенном случае системой уравнений (4.2), необходимо определять норму оператора $\Phi(t, t_0)$. Задача о накоплении возмущений поставлена и рассматривалась Б. В. Булгаковым [8], а ряд новых результатов по решению этой задачи с указанием библиографии дан Е. А. Барбашиным [7].

5. Рассмотрим случай, когда из шести функций времени, которые входят в систему дифференциальных уравнений (4.1), три функции равны нулю $\Delta\Omega_\xi(t)=\Delta\Omega_\eta(t)=\Delta\Omega_\zeta(t)=0$. Тогда система уравнений (4.1) принимает следующий вид:

$$e_p^\bullet-\Delta\omega_\eta e_r=\Delta\omega_\zeta, \quad e_r^\bullet+\Delta\omega_\eta e_p=\Delta\omega_\xi, \quad e_q^\bullet+\Delta\omega_\zeta e_r=\Delta\omega_\eta \tag{5.1}$$

Эта система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами интегрируется и ее общее решение может быть представлено в форме

$$e_p=e_p^\circ\cos\int\limits_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+e_r^\circ\sin\int\limits_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\left[\Delta\omega_\zeta(\tau)\cos\int\limits_\tau^t\Delta\omega_\eta(u)\,du+\Delta\omega_\xi(\tau)\sin\int\limits_\tau^t\Delta\omega_\eta(u)\,du\right]d\tau$$

$$e_r=-e_p^\circ\sin\int\limits_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+e_r^\circ\cos\int\limits_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\left[-\Delta\omega_\zeta(\tau)\sin\int\limits_\tau^t\Delta\omega_\eta(u)\,du+\Delta\omega_\xi(\tau)\cos\int\limits_\tau^t\Delta\omega_\eta(u)\,du\right]d\tau.$$

$$e_q=e_q^\circ+\int\limits_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\Delta\omega_\zeta(\tau)\left\{-e_p^\circ\sin\int\limits_0^\tau\Delta\omega_\eta(u)\,du+e_r^\circ\cos\int\limits_0^\tau\Delta\omega_\eta(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\tau\left[-\Delta\omega_\zeta(u)\sin\int\limits_u^\tau\Delta\omega_\eta(s)\,ds+\Delta\omega_\xi(u)\cos\int\limits_u^\tau\Delta\omega_\eta(s)\,ds\right]du\right\}d\tau \tag{5.2}$$

Из рассмотрения общего решения нетрудно указать класс прикладных задач, в которых недопустимо пренебрегать членами второго порядка малости в разложениях правых частей (5.2). К ним относятся задачи учета высокочастотных возмущений во входных сигналах (вибрации и нутационные колебания гироскопической системы, осуществляющей измерение величин $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$; учет квантования по уровню входных сигналов при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1.4) в ЦВМ), которые могут приводить к существенному накоплению ошибок в выходных сигналах вычислительного устройства [1].

6. Предполагая по-прежнему $\Delta\Omega_\xi(t)=\Delta\omega_\eta(t)=\Delta\Omega_\zeta(t)=0$, представим первые два нелинейных дифференциальных уравнения системы (2.7) в таком виде:

$$e_p^\bullet-\Delta\omega_\eta e_r=\Delta\omega_\zeta+\psi_1(t,\ e_r),\qquad e_r^\bullet+\Delta\omega_\eta e_p=\Delta\omega_\xi+\psi_2(t,\ e_r,\ e_p)\tag{6.1}$$
$$\psi_1(t,\ e_r)=\Delta\omega_\zeta(\cos e_r-1)+\Delta\omega_\eta(\sin e_r-e_r),$$
$$\psi_2(t,\ e_r,\ e_p)=\Delta\omega_\zeta \operatorname{tg} e_p \sin e_r-\Delta\omega_\eta(\operatorname{tg} e_p\cos e_r-e_p)$$

Введем новые переменные x_1, x_2, определив их соотношениями

$$e_p=e_{p1}(t)+x_1\cos\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+x_2\sin\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau$$
$$e_r=e_{r1}(t)-x_1\sin\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+x_2\cos\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau\tag{6.2}$$

Функции времени $e_{p1}(t)$, $e_{r1}(t)$ представляют собой решение линеаризованной системы дифференциальных уравнений, определяемое первыми двумя выражениями (5.2). В новых переменных система (6.1) нелинейных дифференциальных уравнений записывается в форме

$$x_1^\bullet=f_1(t,\ x_1,\ x_2),\qquad x_2^\bullet=f_2(t,\ x_1,\ x_2)\tag{6.3}$$

$$f_1=\psi_1\cos\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau-\psi_2\sin\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau,\qquad f_2=\psi_1\sin\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau+\psi_2\cos\int_0^t\Delta\omega_\eta(\tau)\,d\tau$$

и под знаком функции ψ_1, ψ_2 переменные e_p, e_r должны быть заменены их выражениями (6.2).

Так как нелинейные функции ψ_1, ψ_2 в дифференциальных уравнениях (6.1) имеют третий порядок малости относительно малых переменных $\Delta\omega_\eta(t)$, $\Delta\omega_\zeta(t)$, e_p, e_r, то нелинейные функции f_1, f_2 в дифференциальных уравнениях (6.3) мало отличаются от нуля. Поэтому в любом приближенном методе определения одного частного решения этой системы уравнений с нулевыми начальными условиями последовательные приближения должны быстро сходиться, и в прикладных задачах для записи указанного частного решения можно ограничиться несколькими первыми членами сходящихся рядов.

Рассмотрим в качестве примера, иллюстрирующего данное утверждение, использование для интегрирования системы уравнений (6.3) простейшего приближенного метода — метода последовательных приближений Пикара.

В замкнутой области $0\leqslant t\leqslant T$, $-b\leqslant x_i\leqslant b$ $(i=1,\ 2)$ частное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (6.3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будем определять методом последовательных приближений по формулам

$$x_i^{(m)}=\int_0^t f_i[\tau,\ x_1^{(m-1)}(\tau),\ x_2^{(m-1)}(\tau)]\,d\tau\qquad(i=1,2;\ m=1,2,3,\ldots)\tag{6.4}$$

В рассматриваемой области предполагается, что

$$|f_i(t,\ x_1,\ x_2)|\leqslant M,\qquad\left|\frac{\partial f_i(t,\ x_1,\ x_2)}{\partial x_j}\right|\leqslant K\quad(i,j=1,2)\qquad T\leqslant\frac{b}{M}\tag{6.5}$$

---

[1] Если положить, например, $r(t)=0.0003\sin 628t$, $q(t)=0.0003\cos 628t$, $\Delta\omega_\xi(t)\approx$ $\approx0.2\cos 628t$, $\Delta\omega_\eta(t)\approx-0.2\sin 628t$, то

$$\int_0^t\Delta\omega_\xi(\tau)\,d\tau\sin\int_\tau^t\Delta\omega_\eta(u)\,du\approx3\cdot10^{-5}\left(t-\frac{1}{1256}\sin 1256t\right)$$

По физическому смыслу поставленной задачи положительные числа M, K являются малыми, а число T не мало. Нетрудно доказать, что приближения, определяемые формулами (6.4), образуют сходящуюся последовательность к искомому частному решению системы (6.3). Для этого рассмотрим ряды $\overset{(1)}{x_i}+[\overset{(2)}{x_i}-\overset{(1)}{x_i}]+\ldots$ $\ldots+[\overset{(m)}{x_i}-\overset{(m-1)}{x_i}]+\ldots$ $(i=1,2)$. Члены рядов по модулю меньше членов знакоположительного числового ряда, общий член которого равен $M(2K)^{m-1}T^m(m!)^{-1}$. Сумма этого ряда $S={}^1/_2MK^{-1}(e^{2KT}-1)$. Поэтому в промежутке $0\leqslant t\leqslant T$ равномерно сходятся и ряды (6.6), суммы которых обладают следующими свойствами: 1) удовлетворяют нулевым начальным условиям, 2) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6.3), 3) являются единственным частным решением этой системы уравнений при нулевых начальных условиях. Заметим, что построенные последовательные приближения ввиду малости чисел M, K сходятся очень быстро и для приближенной оценки частного решения может быть использовано неравенство $|x_i(t)|\leqslant{}^1/_2MK^{-1}(e^{2KT}-1)\approx MT$ $(i=1, 2)$.

Поступила 16 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
2. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М., «Наука», 1966.
3. *Quasius G. K.* Strapdown inertial quidance. Space Aeronaut, 1963, vol. 40, No. 3. (Рус. перев.: Вопросы ракетной техники, 1964, № 5.)
4. *Бабушкин С. А.* Самонастраивающаяся система с нелинейной моделью. В кн.: Самонастраивающиеся автоматические системы. М., «Наука», 1965.
5. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les, applications géométriques du calcul infinitésimal, t. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1887.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Булгаков Б. В.* Колебания. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 629.19:533.6

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ СПУСКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ПОСТОЯННЫМ УГЛОМ НАКЛОНА ТРАЕКТОРИИ

О. А. ПРИВАРНИКОВ

(Запорожье)

Изучается плоское угловое движение летательного аппарата под воздействием возмущающих и управляющих моментов при спуске в атмосфере с постоянным углом наклона траектории. Показано, что дифференциальное уравнение переходного процесса сводится к неоднородному уравнению Уиттекера. Получены приближенные аналитические зависимости изменения угла атаки с высотой для случая неколебательного переходного процесса. Колебательный переходный процесс исследован в [1].

Дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс при спуске с постоянным углом траектории в случае управления подъемной силой, согласно [1], запишем в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dh^2}-(b\rho+c_2\rho e^{-{}^1/_2k\rho})\frac{d\alpha}{dh}+(a\rho+c_1\rho)\alpha=\nu_1e^{k\rho}+\nu_2+\nu_3e^{{}^1/_2k\rho}+\nu_4e^{-{}^1/_2k\rho}+\nu_5\rho e^{{}^1/_2k\rho}+N\rho \quad (1)$$

где все обозначения соответствуют [1]. Серией последовательных замен уравнение (1) приводим к виду

$$\alpha=y(\tau),\qquad \tau=e^{-{}^1/_2Ah}=\rho^{{}^1/_2},\qquad y=z\exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2b}{A}\tau+\frac{2c_2}{A}\tau e^{-{}^1/_2k\tau^2}\right)d\tau\right)$$