МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1976

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Г. В. ДЖАНИКАШВИЛИ

(Тбилиси)

Рассматривается вопрос об оптимальной стабилизации лагранжевых и эйлеровых решений в ограниченной круговой задаче трех тел, когда третья точка – спутник подвержен активному управляющему воздействию.

С помощью теоремы Н. Н. Красовского найдены оптимальные управления для уравнений первого приближения. Построен сходящийся ряд для оптимальной функции Ляпунова в нелинейной постановке задачи.

1. Рассмотрим три материальные точки с массами m_1, m_2 и m. Будем считать, что масса спутника m ничтожно мала по сравнению с массами m_1 и m_2, которые движутся одна относительно другой по окружностям радиуса a.

Введем в рассмотрение равномерно вращающуюся вокруг оси с кеплеровской угловой скоростью n систему осей координат $Oxyz$ с началом в центре масс системы точек m_1 и m_2, ось Ox которой проходит через эти точки.

Допустим, что спутник m подвержен управляющему воздействию $\mathbf{u}$, тогда уравнения движения примут вид

$$x^{\cdot\cdot}-2y^{\cdot}=\frac{\partial W}{\partial x}+u_1,\quad y^{\cdot\cdot}+2x^{\cdot}=\frac{\partial W}{\partial y}+u_2,\quad z^{\cdot\cdot}=\frac{\partial W}{\partial z}+u_3 \tag{1.1}$$

Здесь $u_1=m^{-1}n^{-2}Q_1$, $u_2=m^{-1}n^{-2}Q_2$, $u_3=m^{-1}n^{-2}Q_3$; Q_1, Q_2, Q_3 — силы, порожденные управлением $\mathbf{u}$, производная берется по переменной $\chi=nt$, а W — потенциальная энергия точки

$$W=-{}^1/_2(x^2+y^2)-a^3[(1-\mu)r_1^{-1}+\mu r_2^{-1}],\quad \mu=m_2/(m_1+m_2)$$
$$r_1^2=(x-x_1^*)^2+y^2+z^2,\quad r_2^2=(x-x_2^*)^2+y^2+z^2$$
$$x_1^*=-\mu a,\quad x_2^*=(1-\mu)a \tag{1.2}$$

Система (1.1) при $\mathbf{u}=0$ допускает следующие решения:

$$x_0=\alpha_i\ {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)},\quad y_0=0,\quad \alpha_1<x_1,\quad x_1<\alpha_2<x_2,\quad \alpha_3>x_2 \tag{1.3}$$

$$x_0=\alpha_4=\alpha_5={}^1/_2a(1-2\mu),\quad y_0=\beta_4=-\beta_5=a\sqrt{3}/2 \tag{1.4}$$

представляющие собой соответственно прямолинейные и треугольные точки либрации.

Принимая движения (1.3) и (1.4) за невозмущенные, положим

$$x_1=x-x_0,\quad x_2=x^{\cdot},\quad x_3=y-y_0,\quad x_4=y^{\cdot},\quad z_1=z,\quad z_2=z^{\cdot} \tag{1.5}$$

Составляя уравнения возмущенного движения, в первом приближении получим

$$x_1^{\cdot}=x_2,\quad x_2^{\cdot}=2x_4+p_{21}^{(i)}x_1+p_{23}^{(i)}x_3+u_1$$

$$x_3^{\cdot}=x_4,\quad x_4^{\cdot}=-2x_2+p_{41}^{(i)}x_1+p_{43}^{(i)}x_3+u_2$$

$$z_1^{\cdot}=z_2,\quad z_2^{\cdot}=p_{65}^{(i)}z_1+u_3 \tag{1.6}$$

$$p_{21}^{(i)}=-1-2a^3[(1-\mu)r_1^{-3}+\mu r_2^{-3}],\quad p_{43}^{(i)}=-1+a^3[(1-\mu)r_1^{-3}+\mu r_2^{-3}]$$

$$p_{41}^{(i)}=p_{23}^{(i)}=0\quad (i=1,2,3),\quad p_{21}^{(i)}=-{}^3/_4,\quad p_{43}^{(i)}=-{}^9/_4 \tag{1.7}$$

$$p_{41}^{(i)}=p_{23}^{(i)}=\pm{}^3/_4\sqrt{3}(1-2\mu),\quad p_{65}^{(i)}=1\quad (i=4,5)$$

(в формулах (1.7) $i=1, 2, 3$ отвечают прямолинейным точкам либрации, а $i=4, 5$ — треугольным).

Пусть критерий качества переходного процесса имеет вид

$$J(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j+n_1u_1^2+n_2u_2^2\right]dt+\int_{t_0}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}z_iz_j+n_3u_3^2\right]dt\right\} \tag{1.8}$$

при этом квадратичные формы под знаком интегралов являются определенно-положительными.

Выясним достаточное условие разрешимости задачи об оптимальной стабилизации тривиального решения системы (1.6) с функционалом (1.8). Для этого рассмотрим следующую матрицу:

$$R(Q, PQ, P^2Q, P^3Q, P^4Q, P^5Q) \tag{1.9}$$

где

$$P=\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0' & B\end{Vmatrix},\quad Q=\begin{Vmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{Vmatrix}$$

$$A=\begin{Vmatrix} 0&1&0&0\\ p_{21}^{(i)}&0&p_{23}^{(i)}&2\\ 0&0&0&1\\ p_{41}^{(i)}&-2&p_{43}^{(i)}&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1&1\\ p_{65}^{(i)}&0\end{Vmatrix},\quad 0=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

Определитель шестого порядка, составленный из первых шести столбцов матрицы R, отличен от нуля, что является достаточным условием разрешимости задачи (1.6), (1.8), более того, разрешима задача о стабилизации невозмущенного движения в силу системы полных уравнений, и она решается, исходя из линейного приближения (1.6), если область начальных возмущений для каждой из точек либрации (1.3), (1.4) достаточно мала.

Будем искать управления в виде: $u_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_3(z_1, z_2)$; тогда задача (1.6), (1.8) распадается на две отдельные задачи.

Задача 1. Найти управления $u_1^\circ(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_2^\circ(x_1, x_2, x_3, x_4)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения ($x_1=x_2=x_3=x_4=0$) в силу системы уравнений (при $u_1=u_1^\circ$, $u_2=u_2^\circ$)

$$x_1^{\cdot}=x_2,\quad x_2^{\cdot}=2x_4+p_{21}^{(i)}x_1+p_{23}^{(i)}x_3+u_1$$

$$x_3^{\cdot}=x_4,\quad x_4^{\cdot}=-2x_2+p_{41}^{(i)}x_1+p_{43}^{(i)}x_3+u_2 \tag{1.11}$$

и чтобы минимизировался функционал

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j + n_1u_1^2 + n_2u_2^2\right]dt \tag{1.12}$$

для всех начальных значений $|x_j(t_0)| \leqslant \eta$, $t_0 \geqslant 0$.

При решении поставленной задачи воспользуемся теоремой Н. Н. Красовского.

Оптимальную функцию Ляпунова $V^\circ(x)$ будем искать в виде

$$2V^\circ = \sum_{i=1}^{4} k_ix_i^2 + 2k_5x_1x_2 + 2k_6x_3x_4 \tag{1.13}$$

Функция Беллмана для рассматриваемой задачи имеет вид

$$B[V^\circ, x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2] = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V^\circ}{\partial x_i}X_i + \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j + \frac{1}{2}n_1u_1^2 + \frac{1}{2}n_2u_2^2 \tag{1.14}$$

где $X_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — правые части системы (1.11).

Так как оптимальные управления u_i° $(i=1, 2)$ должны минимизировать выражение (1.14), то

$$\partial B/\partial u_i = n_iu_i^\circ + \partial V^\circ/\partial x_{2i} = 0$$

откуда

$$u_i^\circ = -\frac{1}{n_i}\frac{\partial V^\circ}{\partial x_{2i}} \qquad (i=1,2) \tag{1.15}$$

Уравнение Беллмана для V° примет вид

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V^\circ}{\partial x_2}(2x_4 + p_{21}^{(i)}x_1 + p_{23}^{(i)}x_3) + \frac{\partial V^\circ}{\partial x_3}x_4 + \frac{\partial V^\circ}{\partial x_4}(-2x_2 + p_{41}^{(i)}x_1 + p_{43}^{(i)}x_3) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i}\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial x_{2i}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j = 0 \tag{1.16}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменных в уравнении (1.16), получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов k_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$ формы (1.13)

$$k_2^2 - 2n_1k_5 - n_1\alpha_{22} = 0,\quad k_4^2 - 2n_2k_6 - n_2\alpha_{44} = 0,\quad k_5^2 - 2n_1p_{21}^{(i)}k_5 - n_1\alpha_{11} = 0$$

$$k_6^2 - 2n_2p_{43}^{(i)}k_6 - n_2\alpha_{33} = 0,\quad k_2k_5 - n_1k_2p_{21}^{(i)} - n_1k_1 - n_1\alpha_{12} = 0$$

$$k_5p_{23}^{(i)} + k_6p_{41}^{(i)} + \alpha_{13} = 0,\quad 2k_5 + k_4p_{41}^{(i)} + \alpha_{14} = 0,\quad k_2p_{23}^{(i)} - 2k_6 + \alpha_{23} = 0$$

$$2k_2 - 2k_4 + \alpha_{24} = 0,\quad k_6k_4 - n_2k_3 - n_2k_4p_{43}^{(i)} - n_2\alpha_{34} = 0 \tag{1.17}$$

Откуда следует

$$k_2 = [\alpha_{22} + 2(n_1p_{21}^{(i)} + N_1)]^{1/2}n_1^{1/2},\quad k_5 = N_1 + n_1p_{21}^{(i)}$$

$$k_4 = [\alpha_{44} + 2(n_2p_{43}^{(i)} + N_2)]^{1/2}n_2^{1/2},\quad k_6 = N_2 + n_2p_{43}^{(i)}$$

$$N_1=[(n_1p_{21}^{(i)})^2+n_1\alpha_{11}]^{1/2},\quad N_2=[(n_2p_{43}^{(i)})^2+n_2\alpha_{33}]^{1/2} \tag{1.18}$$

Из формул (1.15) и (1.18) находим управления

$$u_1^\circ=-\left[\frac{\alpha_{22}}{n_1}+2\left(p_{21}^{(i)}+\frac{N_1}{n_1}\right)\right]^{1/2}x_2-\left(p_{21}^{(i)}+\frac{N_1}{n_1}\right)x_1$$

$$u_2^\circ=-\left[\frac{\alpha_{44}}{n_2}+2\left(p_{43}^{(i)}+\frac{N_2}{n_2}\right)\right]^{1/2}x_4-\left(p_{43}^{(i)}-\frac{N_2}{n_2}\right)x_3 \quad (i=1,\ldots,5) \tag{1.19}$$

Задача 2. Рассмотрим систему

$$z_1^{\boldsymbol{\cdot}}=z_2,\quad z_2^{\boldsymbol{\cdot}}=p_{65}^{(i)}z_1+u_3 \tag{1.20}$$

и функционал

$$J(u_3)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}z_iz_j+n_3u_3^2\right]dt \tag{1.21}$$

Решая задачу об оптимальной стабилизации тривиального решения системы (1.20) при условии минимума (1.21), аналогично предыдущей задаче, для оптимального управления u_3° находим

$$u_3^\circ=-\left[\frac{\beta_{22}}{n_3}+2(n_3p_{65}^{(i)}+N_3)\right]^{1/2}z_2-\left(p_{65}^{(i)}+\frac{N_3}{n_3}\right)z_1$$

$$N_3=[(n_3p_{65}^{(i)})^2+n_3\beta_{11}]^{1/2} \tag{1.22}$$

2. Система нелинейных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}}=x_2,\quad x_2^{\boldsymbol{\cdot}}=2x_4+\frac{\partial W}{\partial x_1}+u_1,\quad x_3^{\boldsymbol{\cdot}}=x_4$$

$$x_4^{\boldsymbol{\cdot}}=-2x_2+\frac{\partial W}{\partial x_3}+u_2,\quad x_5^{\boldsymbol{\cdot}}=x_6,\quad x_6^{\boldsymbol{\cdot}}=\frac{\partial W}{\partial x_5}+u_3 \tag{2.1}$$

Пусть вдоль траекторий системы (2.1) минимизируется интеграл

$$J=\int_{t_0}^{\infty}G(\mathbf{x},\mathbf{u})\,dt$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{u})=\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}x_{j+4}x_{i+4}+\sum_{i=1}^{3}n_iu_i^2\right]+\sum_{m=3}^{\infty}\varphi^{(m)}(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi^{(m)}(\mathbf{x})$ — форма m-го порядка от фазовых переменных. Оптимальная функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ и оптимальное управление $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(2x_4+\frac{\partial W}{\partial x_1}+u_1\right)+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_4+\frac{\partial V}{\partial x_4}\left(-2x_2+\frac{\partial W}{\partial x_3}+u_2\right)+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial x_5}x_6+\frac{\partial V}{\partial x_6}\left(\frac{\partial W}{\partial x_5}+u_3\right)+G(\mathbf{x},\mathbf{u})=0,\quad u_i=-\frac{1}{2n_i}\frac{\partial V}{\partial x_{2i}} \quad (i=1,2,3) \tag{2.3}$$

Подставляя в первое из этих соотношений остальные, имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(2x_4+\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_4+\frac{\partial V}{\partial x_4}\left(-2x_2+\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)+$$
$$+\frac{\partial V}{\partial x_5}x_6+\frac{\partial V}{\partial x_6}\frac{\partial W}{\partial x_5}-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{n_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{2i}}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{4}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}x_{j+4}x_{i+4}\right]+\sum_{m=3}^{\infty}\varphi^{(m)}(\mathbf{x})=0 \tag{2.4}$$

Функции $V(\mathbf{x})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ будем искать в виде разложений

$$\begin{gathered} V(\mathbf{x})=V^\circ(\mathbf{x})+V^{(3)}(\mathbf{x})+\ldots+V^{(m)}(\mathbf{x})+,\ldots \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})+\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})+\ldots+\mathbf{u}^{(m-1)}(\mathbf{x})+\ldots \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $V^{(m)}(\mathbf{x})$ и $u^{(m-1)}(\mathbf{x})$ $(m=3,4,\ldots)$ — формы соответственно m и $m-1$-го порядка.

Функции $\partial W/\partial x_{2i}$ разложим в ряд по переменным x_{2i-1} $(i=1,2,3)$ в окрестности точки $\mathbf{x}=0$

$$\frac{\partial W}{\partial x_{2i-1}}=\sum_{m=1}^{\infty}f_i^{(m)}(x_1,x_3,x_5) \tag{2.6}$$

где $f^{(m)}(x_1,x_3,x_5)$ — форма m-го порядка от x_{2i-1}.

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнение (2.4) и приравнивая к нулю члены, имеющие одинаковый порядок относительно $\mathbf{x}$, получаем

$$\left(\frac{dV^{(m)}}{dt}\right)_{(1.6)}=-\sum_{i=1}^{3}f_i^{(m-1)}(x_1,x_3,x_5)\frac{\partial V^\circ}{\partial x_{2i}}-\ldots$$
$$\ldots-\sum_{i=1}^{3}f_i^{(2)}(x_1,x_3,x_5)\frac{\partial V^{(m-1)}}{\partial x_{2i}}-\varphi^{(m)}(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{n_i}\frac{\partial V^{(3)}}{\partial x_{2i}}\frac{\partial V^{(m-1)}}{\partial x_{2i}}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{n_i}\frac{\partial V^{(4)}}{\partial x_{2i}}\frac{\partial V^{(m-2)}}{\partial x_{2i}}+\ldots+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{n_i}\left(\frac{\partial V^{(m/2+1)}}{\partial x_{2i}}\right)^2 \qquad (m=3,4,\ldots) \tag{2.7}$$

Здесь символ $(dV^{(m)}/dt)$ (1.6) означает производную в силу уравнений (1.6) при $u_1=u_1^\circ$, $u_2=u_2^\circ$, $u_3=u_3^\circ$.

Так как система (1.6) при $u=u^\circ$ асимптотически устойчива, то по теореме Ляпунова [1, 2] существует единственное решение системы уравнений (2.7). Зная $V^{(m)}$ $(m=3,4,\ldots)$, согласно (2.3), находим $u_i^{(m-1)}$ $(m=3,4,\ldots)$ $(i=1,2,3)$.

Аналогично работе [3] можно доказать, что ряд для $V(\mathbf{x})$ (2.4) сходится, а $V(\mathbf{x})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ являются аналитическими функциями в окрестности точки $\mathbf{x}=0$.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи и замечания.

Поступила 22 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. *Альбрехт Э. Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.