

ВИБРАЦИОННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВДОЛЬ ПЛОСКОСТИ,  
КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ЛИНИИ  
НАИБОЛЬШЕГО СКАТА

В. В. АНДРОНОВ, Р. Ф. НАГАЕВ

(Москва, Ленинград)

Рассматривается движение тела вдоль шероховатой плоской поверхности, наклоненной к горизонту и совершающей гармонические колебания в своей плоскости перпендикулярно линии наибольшего наклона. Вначале обсуждаются два приближенных способа определения средней скорости установившегося движения, справедливые либо в случае очень большой, либо в случае очень низкой интенсивности вибраций. Более общее решение получается в результате приближенной замены гармонического ускорения плоскости в уравнениях движения тела эквивалентным в том или ином смысле выражением, изменяющимся по закону прямоугольного синуса. Отвечающее симметричному периодическому режиму решение полученной системы построено в работе с использованием известной задачи Пэнлеве о криволинейном движении тела по наклонной шероховатой плоскости [4]. Детализация этой последней задачи была дана в работах [2, 3].

Приближенное решение задачи в случае низкой интенсивности вибраций было предложено в работе [4]. Не сводящийся к рассматриваемому случаю колебаний плоскости, близких к круговым, изучен в работе [5].

1. Уравнения движения тела в декартовой системе координат, жестко связанной с плоскостью, имеют вид

$$m\ddot{x} = mA\omega^2 \sin \omega t - \frac{F\dot{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad m\ddot{y} = P - \frac{F\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — относительные декартовы координаты тела, отсчитываемые соответственно поперек и вдоль (по направлению наибольшего ската) плоскости,  $A$  и  $\omega$  — амплитуда и частота вибраций плоскости,  $m$  — масса тела,  $P$  — проекция его веса на плоскость,  $F$  — величина изотропного кулонова трения скольжения.

Перепишем уравнения (1.1) в безразмерной форме (штрихом обозначается дифференцирование по  $\tau$ )

$$r' = \sin \tau - \mu r \gamma^{-1} (r^2 + s^2)^{-1/2}, \quad s' = \mu [1 - s \gamma^{-1} (r^2 + s^2)^{-1/2}] \quad (1.2)$$

$$\tau = \omega t, \quad r = \dot{x} / A\omega, \quad s = \dot{y} / A\omega, \quad \mu = P / mA\omega^2, \quad \gamma = P / F$$

Отметим, что для равномерного в среднем виброперемещения необходимо, чтобы было  $P < F$  и, следовательно,  $\gamma < 1$ .

В случае вибраций низкой интенсивности удельная скатывающая сила  $P/m$  может значительно превышать амплитуду ускорения плоскости. В этом случае  $\mu \gg 1$ , поэтому инерционным слагаемым во втором уравнении (1.2) в первом приближении естественно пренебречь. Последующий анализ приводит к следующему выражению для безразмерной средней скорости движения [4]:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s \, d\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} F (\delta_{\pm}, \delta_{\pm}^*) \quad (1.3)$$

Алгоритм вычисления и графики для определения величины  $F(\delta_{\pm}, \delta_{\pm}^*)$  приведены в монографии [6]. Укажем также связь размерной  $V$  и безразмерной  $v$  скоростей

$$V = A\omega v \quad (1.4)$$

Периодическое решение системы (1.2) удается также построить и в другом крайнем случае, характеризующемся высоким уровнем интенсивности колебаний, когда  $\mu \ll 1$ . Такое решение рационально искать в виде следующих рядов по степеням этого малого параметра:

$$r = r_0 + r_1\mu + \mu^2 \dots, \quad s = s_0 + s_1\mu + \mu^2 \dots \quad (1.5)$$

При этом будем считать, что выполняются следующие совместимые с (1.2) соотношения:

$$r(\tau) = -r(\tau + \pi), \quad s(\tau) = s(\tau + \pi) \quad (1.6)$$

и поэтому искомый периодический режим, а также все последовательные к нему приближения симметричны. Симметричное в смысле (1.6) порождающее приближение в силу (1.2) является неизолированным [7] и определяется по формулам

$$r_0 = -\cos \tau, \quad s_0 = v_0 \quad (1.7)$$

Уравнения для определения последующих приближений имеют вид

$$\begin{aligned} s_1' &= 1 - v_0 \gamma^{-1} (v_0^2 + \cos^2 \tau)^{-1/2}, & r_1' &= \gamma^{-1} \cos \tau (v_0^2 + \cos^2 \tau)^{-1/2} \\ s_2' &= -\gamma^{-1} \cos \tau (v_0 r_1 + s_1 \cos \tau) (v_0^2 + \cos^2 \tau)^{-3/2}, \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Условие существования аналитического по  $\mu$  решения (1.5), как известно, совпадает с условием периодичности первого приближения  $s_1$  и выполняется, если первое приближение  $v_0$  безразмерной средней скорости  $v$  является простым корнем уравнения

$$\gamma = \frac{2}{\pi} v_0 (1 + v_0^2)^{-1/2} K[(1 + v_0^2)^{-1/2}] \quad (1.9)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $(1 + v_0^2)^{-1/2}$ . Соответствующий анализ показывает, что уравнение (1.9) при  $0 < \gamma < 1$  допускает лишь одно положительное решение, причем с ростом  $\gamma$  (с увеличением наклона плоскости) скорость  $v_0$  также увеличивается, возрастая до бесконечности при  $\gamma \rightarrow 1$ .

Уравнения первого приближения в силу (1.9) допускают симметричное периодическое решение, зависящее, вообще говоря, от произвольной первой поправки  $v_1$  к величине  $v_0$  и представимое в виде следующих рядов Фурье:

$$s_1 = v_1 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h \sin 2k\tau, \quad r_1 = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \sin (2k-1)\tau \quad (1.10)$$

причем коэффициенты  $a_h$  и  $b_h$  являются известными функциями  $v_0$ . Подстановка этих соотношений в третье уравнение (1.8) дает

$$s_2' = v_1 \sum_{h=0}^{\infty} c_h \cos 2k\tau + \sum_{h=0}^{\infty} d_h \sin 2k\tau \quad (1.11)$$

где коэффициенты  $c_h$  и  $d_h$  также известны. Из условия периодичности  $s_2$ , поскольку  $c_0 \neq 0$ , вытекает, что  $v_1 = 0$ . Следовательно, определяемая согласно (1.9) величина  $v_0$  совпадает с безразмерной средней скоростью  $v$  с точностью до величин порядка  $\mu^2$ .

Не останавливаясь на дальнейшем уточнении полученных решений, отметим, что они всегда устойчивы асимптотически.

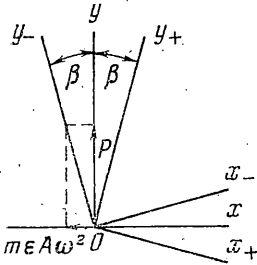
2. Заменим исходную систему (1.1) следующим ее приближенным аналогом:

$$mx'' = m\varepsilon A\omega^2 \operatorname{sign} \sin \omega t - \frac{Fx'}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad my'' = P - \frac{Fy'}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2.1)$$

Здесь безразмерный коэффициент  $\varepsilon$  может быть выбран так или иначе из условия близости решений точной и приближенной систем ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ).

Далее наряду с исходной декартовой системой осей  $(x, y)$  будем пользоваться также еще двумя  $(x_+, y_+)$  и  $(x_-, y_-)$ , полученными из нее в результате поворота на угол

$$\beta = \operatorname{arctg} (m\varepsilon A\omega^2 / P) \quad (2.2)$$



Фиг. 1

соответственно по и против часовой стрелки (фиг. 1). Очевидная связь относительных координат тела во всех этих системах задается соотношениями

$$x = x_{\pm} \cos \beta \pm y_{\pm} \sin \beta, \quad y = y_{\pm} \cos \beta \mp x_{\pm} \sin \beta \quad (2.3)$$

Будем в дальнейшем движение тела в интервалах времени  $2\pi k < \omega t < \pi(2k+1)$  и  $\pi(2k+1) < \omega t < 2\pi(k+1)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) описывать соответственно в системах координат  $(x_+, y_+)$  и  $(x_-, y_-)$ .

Тогда уравнения (2.1) в указанных интервалах времени переписутся в форме

$$mx_{\pm}'' = -\frac{Fx_{\pm}'}{\sqrt{x_{\pm}^2+y_{\pm}^2}}, \quad my_{\pm}'' = \sqrt{P^2+(m\varepsilon A\omega^2)^2} - \frac{Fy_{\pm}'}{\sqrt{x_{\pm}^2+y_{\pm}^2}} \quad (2.4)$$

Введем новые безразмерные координаты

$$\xi_{\pm} = m\omega x' [P^2+(m\varepsilon A\omega^2)^2]^{-1/2}, \quad \eta_{\pm} = m\omega y' [P^2+(m\varepsilon A\omega^2)^2]^{-1/2} \quad (2.5)$$

и уравнения (2.4) перепишем в следующей безразмерной форме:

$$\xi_{\pm}' = -\frac{v\xi_{\pm}}{\sqrt{\xi_{\pm}^2+\eta_{\pm}^2}}, \quad \eta_{\pm}' = 1 - \frac{v\eta_{\pm}}{\sqrt{\xi_{\pm}^2+\eta_{\pm}^2}}, \quad v = \frac{F}{\sqrt{P^2+(m\varepsilon A\omega^2)^2}} \quad (2.6)$$

Здесь переменные  $\xi_{\pm}$  и  $\eta_{\pm}$  связаны с  $x_{\pm}$  и  $y_{\pm}$  соотношениями, аналогичными (2.5).

Уравнения (2.4) или, что то же самое, (2.6) описывают по существу движение твердого тела по неподвижной шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту в направлении оси  $y_+$  (или  $y_-$ ) под некоторым эффективным углом. Пенлеве показал, что эти уравнения могут быть в общем случае проинтегрированы в квадратурах [1]. Для этого весьма эффективным является переход [2] к полярным координатам

$$\xi_{\pm} = \zeta \sin \psi_{\pm}, \quad \eta_{\pm} = \zeta \cos \psi_{\pm} \quad (2.7)$$

Здесь существенно, что переменная  $\zeta$  в обеих системах координат имеет один и тот же смысл безразмерной мгновенной скорости тела, а  $\psi_+$  ( $\psi_-$ ) — угол между направлением этой скорости и осью  $y_+$  ( $y_-$ ), отсчитываемый по часовой стрелке. Подставляя (2.7) в (2.6), получим

$$\zeta' = \cos \psi_{\pm} - v, \quad \zeta \psi_{\pm}' = -\sin \psi_{\pm} \quad (2.8)$$

Будем полагать, что в некоторый момент времени  $\tau=2\pi k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

$$\zeta=\zeta_k, \quad \psi_+=\psi_k-\beta \quad (2.9)$$

где  $\psi_k$  — угол между направлением скорости в этот момент времени и несмещенной осью  $y$ , отсчитываемый также по часовой стрелке. Тогда в результате интегрирования системы (2.8) при начальных условиях (2.9) после некоторых преобразований окончательно получим следующие справедливые в интервале  $2\pi k < \tau < \pi(2k+1)$  выражения:

$$\zeta=\zeta_k \frac{\sin(\psi_k-\beta)}{\sin \psi_+} \left[ \frac{\operatorname{tg}^{1/2} \psi_+}{\operatorname{tg}^{1/2}(\psi_k-\beta)} \right]^v \quad (2.10)$$

$$\tau-2\pi k=(1-v^2)^{-1} \{ \zeta_k [v+\cos(\psi_k-\beta)] - \zeta (v+\cos \psi_+) \}$$

Через полпериода изменения внешней силы в момент  $\tau=\pi(2k+1)$  соотношения (2.10) примут вид

$$\zeta_k^*=\zeta_k \frac{\sin(\psi_k-\beta)}{\sin(\psi_k^*-\beta)} \left[ \frac{\operatorname{tg}^{1/2}(\psi_k^*-\beta)}{\operatorname{tg}^{1/2}(\psi_k-\beta)} \right]^v \quad (2.11)$$

$$\pi=(1-v^2)^{-1} \{ \zeta_k [v+\cos(\psi_k-\beta)] - \zeta_k^* [v+\cos(\psi_k^*-\beta)] \}$$

где  $\zeta_k^*$  и  $\psi_k^*$  — величина безразмерной скорости и угол между ее направлением и осью  $y$  в этот момент времени.

Симметричный периодический режим движения тела характеризуется тем, что

$$\zeta_k=\zeta_k^*=w, \quad \psi_k=-\psi_k^*=-\theta \quad (2.12)$$

Уравнения для определения величин  $w$  и  $\theta$  получаются после подстановки (2.12) в (2.11) и имеют вид

$$\frac{\sin(\beta+\theta)}{\sin(\beta-\theta)} \left[ \frac{\operatorname{tg}^{1/2}(\beta-\theta)}{\operatorname{tg}^{1/2}(\beta+\theta)} \right]^v=1, \quad \pi(1-v^2)=2w \sin \theta \sin \beta \quad (2.13)$$

Система (2.13) допускает имеющие физический смысл решения, лишь если

$$\cos \beta < v < 1 \quad (2.14)$$

причем угол  $\theta$  меняется в пределах от 0 до  $\beta$ . Неравенства (2.14), очевидно, и ограничивают область существования рассматриваемого симметричного режима. При  $v < \cos \beta$  возможны только ускоренные режимы виброперемещения, в то время как при  $v > 1$  установившимся состоянием является покой тела относительно плоскости<sup>1</sup>.

Проварьируем соотношения (2.11) вблизи их решения (2.12) и затем положим

$$\delta \zeta_k^*=\lambda \delta \zeta_k, \quad \delta \psi_k^*=-\lambda \delta \psi_k \quad (2.15)$$

Полученная таким образом однородная линейная система имеет следующее квадратное уравнение для определения характеристических чисел режима  $\lambda$ :

$$(1-v^2) \sin(\beta+\theta) \lambda^2 - 2 \sin \theta [\cos \beta (\cos 2\beta - v^2) + 2v \cos \theta \sin^2 \beta] \lambda - (1-v^2) \sin(\beta-\theta) = 0 \quad (2.16)$$

Несложный анализ уравнения (2.16) показывает, что его корни по модулю меньше единицы внутри всей области (2.14) существования симмет-

<sup>1</sup> В случае гармонического возбуждения между областями покоя и симметричного безостановочного движения существуют симметричные движения с зонами застоя тела внутри каждого полупериода движения.

ричного режима, причем, если  $v=1$ ,  $\cos \beta$ , одно из характеристических чисел равно единице по модулю. Таким образом, построенный симметричный режим всегда устойчив асимптотически.

3. Перемещения тела за полпериода в направлении осей  $x_+$  и  $y_+$  в силу (2.5) подсчитываются по формулам

$$p_+ = \int_{2\pi h}^{\pi(2h+1)} \xi_+ d\tau, \quad q_+ = \int_{2\pi h}^{\pi(2h+1)} \eta_+ d\tau \quad (3.1)$$

Далее, производя замену переменной  $\tau \rightarrow \psi = \psi_+ + \beta$ , согласно вытекающему из второго уравнения (2.8) дифференциальному равенству

$$\zeta d\psi = -\sin(\psi - \beta) d\tau \quad (3.2)$$

и выполняя интегрирование при учете (2.7), (2.10), (2.12) и (2.13), после некоторых преобразований окончательно получим

$$p_+ = \frac{2w^2}{1-4v^2} \sin \theta (2v \cos \beta + \cos \theta \cos 2\beta) \quad (3.3)$$

$$q_+ = \frac{w^2}{1-v^2} \sin \theta \sin \beta (v + \cos \theta \cos \beta)$$

Определяемая согласно (1.4) безразмерная средняя скорость виброперемещения в симметричном режиме в силу (2.5) равна

$$v = q\varepsilon / \pi \sin \beta \quad (3.4)$$

где  $q$  — безразмерное перемещение тела в направлении несмещенной оси  $y$  за полпериода изменения внешней силы, которое в силу (2.3) определяется по формуле

$$q = q_+ \cos \beta - p_+ \sin \beta \quad (3.5)$$

При выводе формулы (3.4) учитывалось, что рассматриваемый режим симметричен и поэтому перемещение тела за период движения равно удвоенной величине  $q$ . Подставляя теперь (3.5) в (3.4) при учете (3.3) окончательно получим

$$v = \frac{\pi\varepsilon(1-v^2)}{8(4v^2-1)\sin\theta\sin\beta} [6v\cos\beta + \cos\theta(4v^2-1+3\cos 2\beta)] \quad (3.6)$$

Зависимость средней скорости  $v$  от безразмерных параметров  $v$  и  $\beta$  удобно анализировать, обращая первое уравнение (2.13) относительно  $v$ . При этом следует, меняя  $\theta$  в интервале от 0 до  $\beta$ , вычислять  $v$ , а потом и  $v$  согласно (3.6). Зависимость  $v(v, \beta)$  можно легко перестроить на плоскости  $(\gamma, \mu)$ . Взаимосвязь «старых» и «новых» безразмерных параметров задачи имеет вид

$$\gamma = v^{-1} \cos \beta, \quad \mu = \varepsilon \operatorname{ctg} \beta \quad (3.7)$$

Отметим, что вследствие (2.14), область существования симметричного режима может быть представлена в виде

$$\mu(\varepsilon^2 + \mu^2)^{-1/2} < \gamma < 1 \quad (3.8)$$

причем появление ускоренных режимов здесь имеет место при  $\gamma > 1$  и наоборот.

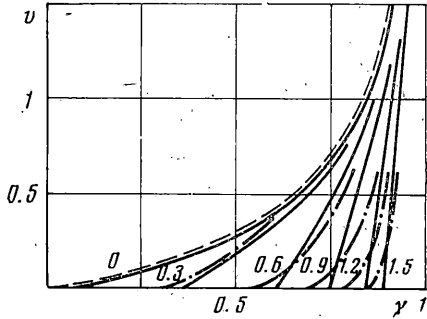
В случае вибраций очень высокой интенсивности ( $\mu \rightarrow 0, \beta \rightarrow \pi/2, \gamma = \text{const}$ ) после раскрытия неопределенностей первое уравнение (2.13) и выражение для безразмерной скорости  $v$  при учете (3.7) примут вид

$$\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \ln \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta)}{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta)} \quad (3.9)$$

$$v = \frac{1}{2} \pi \varepsilon \operatorname{ctg} \theta$$

Последующее исключение из этих соотношений величины  $\theta$  дает

$$\gamma = \frac{v}{\pi \varepsilon} \ln \left[ 1 + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{2v^2} + \frac{\pi \varepsilon}{v} \left( 1 + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{4v^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.10)$$



Фиг. 2

Ранее для этого же случая ( $\mu \rightarrow 0$ ) без использования прямоугольной аппроксимации синуса было получено уравнение (1.9). Выберем неопределенный множитель  $\varepsilon$  из условия максимальной близости (1.9) и (3.10). С этой целью разложим указанные уравнения в ряды по степеням  $1/v$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{24} \pi^2 \varepsilon^2 v^{-2} + v^{-3} \dots, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{4} v^{-2} + v^{-3} \dots \quad (3.11)$$

Нетрудно видеть, что при  $\varepsilon = \sqrt{6}/\pi = 0.7797$  эти уравнения совпадают с точностью до величин порядка  $v^{-3}$ . Приведенным выше значением  $\varepsilon$  далее будем пользоваться как наиболее эффективным при прямоугольной аппроксимации гармонического возмущения.

На фиг. 2 представлены графики зависимости средней скорости  $v$  от параметра  $\gamma$  при различных значениях  $\mu$ . Из этих графиков видно, что скорость  $v$  монотонно увеличивается с ростом  $\gamma$  (с увеличением угла наклона плоскости) от нуля при  $\gamma = \mu(\varepsilon^2 + \mu^2)^{-1/2}$  до бесконечности при  $\gamma = 1$  ( $F = P$ ). С другой стороны, монотонное уменьшение  $\mu$  до нуля (увеличение амплитуды  $A$  или частоты  $\omega$  до бесконечности) при фиксированном  $\gamma$  приводит лишь к конечному увеличению  $v$  (однако при этом в силу (1.4) размерная скорость  $V$  стремится к бесконечности).

Для сравнения на этом же графике приведена зависимость  $v(\gamma)$ , рассчитанная согласно (1.9) (штриховая кривая), а также зависимости  $v(\gamma, \mu)$ , вытекающие из (1.3) (штрих-пунктирные кривые). Последними зависимостями, естественно, следует пользоваться при значениях  $\gamma$ , непосредственно примыкающих справа к точке  $\gamma = \mu(1 + \mu^2)^{-1/2}$  начала движения и отвечающих упомянутым выше периодическим движениям с зонами застоя.

Поступила 22 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М., Гостехиздат, 1954.
2. Нагаев Р. Ф., Рубин Б. Б. О торможении при криволинейном движении по наклонной плоскости. Машиноведение, 1974, № 1.
3. Андронов В. В. Движение тяжелой материальной точки по наклонной шероховатой плоскости под действием периодических мгновенных импульсов. Научн. тр. Моск. лесотехн. ин-та, 1975, вып. 69.
4. Андронов В. В. Движение тела по шероховатой наклонной плоскости, совершающей поступательные поперечные колебания в своей плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
5. Блезман И. И., Гортинский В. В., Дулаев В. Г., Нагаев Р. Ф. Движение материальной частицы по шероховатой плоскости, совершающей колебания, близкие к круговым поступательным. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.
6. Блезман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., «Наука», 1964.
7. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.