УДК 539.384/385

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ОСНОВАННАЯ НА МОДЕЛИ ОСНАЩЕННОЙ КРИВОЙ

В. В. ЕЛИСЕЕВ

(Ленинград)

Известный вывод уравнений теории стержней, предложенный Кирхгофом и Клебшем, основан на сведении трехмерной задачи теории упругости к одномерной с помощью кинематических гипотез и гипотез о малости одних напряжений по сравнению с другими. Как будет показано ниже, можно достаточно далеко продвинуться в построении теории стержней, рассматривая стержни как оснащенные кривые [1] — одномерные объекты с внутренними степенями свободы. Представление об оснащенной кривой позволяет построить как теорию Кирхгофа – Клебша («теорию без сдвига»), так и теорию типа Тимошенко («теорию со сдвигом»).

1. Определим оснащенную кривую как обычную кривую, с каждой точкой которой связан ортогональный триэдр ортов $\mathbf{d}_i$ ($i=1, 2, 3$). Ориентация оснащающего триэдра относительно натурального триэдра кривой, вообще говоря, произвольна. В дальнейшем примем, что в недеформированном состоянии оснащенной кривой $\mathbf{d}_1{}^\circ=\mathbf{t}^\circ$, т. е. $\mathbf{d}_1{}^\circ$ совпадает с ортом касательной $\mathbf{t}^\circ$ (значком) $(\ldots)^\circ$ отмечаются величины, характеризующие недеформированное состояние). Будем различать теорию без сдвига и теорию со сдвигом. В теории без сдвига и в деформированном состоянии $\mathbf{d}_1=\mathbf{t}$. Напротив, в теории со сдвигом при деформации $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{t}$ расходятся, так что

$$\mathbf{t}=a_2\mathbf{d}_2+a_3\mathbf{d}_3+\sqrt{1-a_2{}^2-a_3{}^2}\mathbf{d}_1 \tag{1.1}$$

Если элементарные объекты в обычной кривой суть точки, то в оснащенной кривой это – твердые тела. Триэдр $\mathbf{d}_i$ определяет ориентацию этих твердых тел. В теории без сдвига допустимо вращение твердых тел только вокруг касательной, а в теории со сдвигом допустимо произвольное вращение.

Введем для оснащенного триэдра аналог вектора Дарбу

$$\mathbf{d}_i'=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{d}_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.2}$$

Здесь и ниже $(\ldots)'$ есть производная по дуговой координате s. Будем применять правило суммирования по повторяющимся индексам, так что, например

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_i\mathbf{d}_i\equiv\sum_{i=1}^{3}\omega_i\mathbf{d}_i \tag{1.3}$$

Функции $\omega_i(s)$ являются коэффициентами системы дифференциальных уравнений (1.2) и потому определяют $\mathbf{d}_i(s)$ с точностью до жесткого поворота. Если $\mathbf{t}=\mathbf{d}_1$, то, интегрируя уравнение $\mathbf{R}'=\mathbf{t}$, где $\mathbf{R}(s)$ – радиус-вектор точек кривой, можно восстановить и оснащенную кривую, т. е. определить функции $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{d}_i(s)$ с точностью до жесткого перемещения. Если же $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}_1$ связаны соотношением (1.1), то для восстановления должны быть заданы, наряду с $\mathbf{d}_i(s)$, также и $a_k(s)$ ($k=2, 3$). Таким образом, доказано, что оснащенная кривая определяется с точностью до жесткого перемещения следующими функциями: в теории без сдвига – $\omega_i(s)$; в теории со сдвигом – $\omega_i(s)$, $a_k(s)$.

Обращаясь к деформации кривой, положим

$$\varepsilon=\frac{ds}{ds^\circ}-1,\qquad \varkappa_i=\omega_i[s(s^\circ)]-\omega_i{}^\circ(s^\circ) \tag{1.4}$$

Здесь s и s° – дуговые координаты одной и той же материальной частицы после и до деформации соответственно. Функции $\varepsilon(s^\circ)$, $\varkappa_i(s^\circ)$, $a_k(s^\circ)$ определяют деформацию кривой и инвариантны относительно жесткого перемещения. Очевидно, эти функции будут малы, если малы понимаемые в обычном смысле деформации моделируемого стержня. Представляется очевидным также, что деформация кривой в точке определяется значениями указанных функций в точке, так что эти значения

[1] Понятие оснащенной поверхности использовалось П. А. Жилиным в докладе на IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин при выводе уравнений теории оболочек.

должны быть аргументами плотности потенциальной энергии деформации (в данной точке).

2. Пусть M и M' – положение некоторой произвольной частицы оснащенной кривой до и после деформации. Переход из M в M' характеризуется вектором перемещения $\mathbf{u}$ и тензором поворота $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{d}^i=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{d}_i^\circ \tag{2.1}$$

Наряду с данной частицей рассмотрим частицу, бесконечно близкую к ней. Положения ее до и после деформации обозначим N и N'. Оснащающие триэдры в положениях M и N' связаны тензором поворота, который можно представить двояко, по переходам $M-M'-N'$ и $M-N-N'$ ($\mathbf{E}$ – единичный тензор)

$$(\mathbf{E}+\boldsymbol{\omega}\, ds\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{Q}=\left(\mathbf{Q}+\frac{d}{ds^\circ}\mathbf{Q}\, ds^\circ\right)\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{\omega}^\circ\, ds^\circ\times\mathbf{E}) \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует

$$\boldsymbol{\omega}(1+\varepsilon)\times\mathbf{Q}=\frac{d}{ds^\circ}\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\times\boldsymbol{\omega}^\circ \tag{2.3}$$

Пусть кривая испытывает некоторое малое дополнительное перемещение. При этом $\delta\mathbf{Q}=\delta\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{Q}$, где $\delta\boldsymbol{\lambda}$ – вектор малого поворота. Варьируя соотношение (2.3), получим

$$\delta\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\frac{\delta\varepsilon}{1+\varepsilon}+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{\lambda}=(\delta\boldsymbol{\lambda})' \tag{2.4}$$

Введем вектор $\boldsymbol{\varkappa}=\varkappa_i\mathbf{d}_i^\circ$. Тогда в соответствии с (1.4)

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{Q}\cdot(\boldsymbol{\omega}^\circ+\boldsymbol{\varkappa}) \tag{2.5}$$

Подстановка этого выражения в (2.4) приводит к соотношению

$$\mathbf{Q}\cdot\delta\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\omega}\frac{\delta\varepsilon}{1+\varepsilon}=(\delta\boldsymbol{\lambda})' \tag{2.6}$$

Формулы (2.3) и (2.6) имеют тот же смысл, что и известная вторая формула Клебша в классической теории.

Рассмотрим далее орт касательной $\mathbf{t}$. Согласно известной формуле Френе

$$\mathbf{t}=(\mathbf{R}+\mathbf{u})'=\left(\mathbf{t}^\circ+\frac{d}{ds^\circ}\mathbf{u}\right)\frac{1}{1+\varepsilon} \tag{2.7}$$

С другой стороны, в теории без сдвига

$$\mathbf{t}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{t}^\circ \tag{2.8}$$

В результате будем иметь

$$\left(\mathbf{t}+\frac{d}{ds^\circ}\mathbf{u}\right)\frac{1}{1+\varepsilon}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{t}^\circ \tag{2.9}$$

Варьируя это соотношение, найдем

$$(\delta\mathbf{u})'+\mathbf{t}\times\delta\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{t}\frac{\delta\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{2.10}$$

По своему смыслу (2.9) и (2.10) соответствуют первой формуле Клебша в классической теории.

В теории со сдвигом на основании соотношений (1.1), (2.1) и (2.7) получим

$$\left(\mathbf{t}^\circ+\frac{d}{ds^\circ}\mathbf{u}\right)\frac{1}{1+\varepsilon}=\mathbf{Q}\cdot\left(a_2\mathbf{d}_2+a_3\mathbf{d}_3+\sqrt{1-a_2^2-a_3^2}\,\mathbf{d}_1^\circ\right) \tag{2.11}$$

Отсюда следует уравнение в вариациях

$$(\delta\mathbf{u})'+\mathbf{t}\times\delta\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{t}\frac{\delta\varepsilon}{1+\varepsilon}+\sum_{i=2,3}\left(\mathbf{d}_i-\frac{a_i}{\sqrt{1-a_2^2-a_3^2}}\mathbf{d}_1\right)\delta a_i \tag{2.12}$$

3. Рассмотрим деформированное состояние равновесия оснащенной кривой, в котором она находится под действием распределенной нагрузки $\mathbf{p}(s)$, распределенного момента $\mathbf{m}(s)$ и соответствующих сил и моментов на концах. Отметим, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$ отнесены к единице длины дуги в деформированном состоянии. Согласно принципу возможных перемещений, для участка кривой между любыми двумя точками $s=s_1$ и $s=s_2$ имеем

$$\int_{s_1^\circ}^{s_2^\circ} \delta U\, ds^\circ = (\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{\lambda})\Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u}+\mathbf{m}\cdot\delta\boldsymbol{\lambda})\, ds \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ – сила и момент в сечении; U – потенциальная энергия деформации на единицу длины недеформированной дуги. После очевидных преобразований равенство (3.1) можно представить в виде

$$\int_{s_1^\circ}^{s_2^\circ} \delta U\, ds^\circ = \int_{s_1}^{s_2} [(\mathbf{P}'+\mathbf{p})\cdot\delta\mathbf{u} + \mathbf{P}\cdot(\delta\mathbf{u})' + (\mathbf{M}'+\mathbf{m})\cdot\delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{M}\cdot(\delta\boldsymbol{\lambda})']\, ds$$

Взяв в качестве $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\lambda}$ жесткое перемещение, получим уравнения статики

$$\mathbf{P}'+\mathbf{p}=0,\quad \mathbf{M}'+\mathbf{m}+\mathbf{t}\times\mathbf{P}=0 \tag{3.2}$$

Учитывая последнее и пользуясь произвольностью s_1 и s_2, будем иметь

$$\delta U=(1+\varepsilon)\{\mathbf{P}\cdot[(\delta\mathbf{u})'+\mathbf{t}\times\delta\boldsymbol{\lambda}]+\mathbf{M}\cdot(\delta\boldsymbol{\lambda})'\} \tag{3.3}$$

В теории без сдвига, используя выведенные в п. 2 кинематические формулы, выражение (3.3) можно представить в форме

$$\delta U=\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}\delta\varepsilon+\mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\chi}=(1+\varepsilon)\boldsymbol{\varkappa}+\varepsilon\boldsymbol{\omega}^\circ \tag{3.5}$$

Из (3.4) следует

$$U=U(\varepsilon,\boldsymbol{\chi}),\qquad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{t},\qquad \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\chi}}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{Q} \tag{3.6}$$

Последнее соотношение можно записать в виде $\partial U/\partial\chi_i=M_i$, где $\chi_i=\boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{d}_i^\circ$, $M_i=\mathbf{M}\cdot\mathbf{d}_i$. Этот результат совпадает с классическим при $\varepsilon=0$, т. е. в случае нерастяжимой кривой.

Обращаясь к теории со сдвигом и рассуждая аналогичным образом, получаем

$$U=U(\varepsilon,\boldsymbol{\chi},a_k),\qquad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{t},\qquad \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\chi}}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}$$
$$\frac{\partial U}{\partial a_k}=\mathbf{P}(1+\varepsilon)\cdot\left(\mathbf{d}_k-\frac{a_k}{\sqrt{1-a_2^2-a_3^2}}\mathbf{d}_1\right) \tag{3.7}$$

Этих и полученных выше соотношений достаточно для построения полной системы уравнений теории упругости оснащенной кривой. Общими для обеих теорий будут уравнения статики (3.2), кинематические формулы (2.3), (2.5), (3.5) и соотношения упругости (3.6). Кинематическая формула (2.9) относится к теории без сдвига; формула (2.11) – к теории со сдвигом. В последнем случае имеем два дополнительных параметра a_k и соответственно два дополнительных соотношения упругости в (3.7). Легко убедиться, что в теориях со сдвигом и без сдвига число уравнений соответствует числу неизвестных.

4. В практически важных случаях малых деформаций, а также малых деформаций и поворотов выведенные выше соотношения могут быть линеаризованы. В качестве примера приведем сводку формул для теории со сдвигом в случае малых деформаций и поворотов.

При малых поворотах существует вектор малого поворота $\boldsymbol{\lambda}$, так что $\mathbf{Q}=\mathbf{E}+\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{E}$. Кинематические формулы (2.6), (2.7), (2.11) примут вид

$$\boldsymbol{\varkappa}+\varepsilon\boldsymbol{\omega}^\circ=\boldsymbol{\lambda}' \tag{4.1}$$

$$\mathbf{t}=\mathbf{u}'+(1-\varepsilon)\mathbf{t}^\circ \tag{4.2}$$

$$\mathbf{u}'+\mathbf{t}^\circ\times\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{t}^\circ\varepsilon+\mathbf{d}_2^\circ a_2+\mathbf{d}_3^\circ a_3\equiv\mathbf{e} \tag{4.3}$$

При построении соотношений упругости в линейной теории в качестве U следует принять квадратичную форму своих аргументов. Тогда, согласно (3.7), (4.1) и (4.3)

$$\mathbf{P}=\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\lambda}', \qquad \mathbf{M}=\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\lambda}'}=\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{e}+\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\lambda}' \tag{4.4}$$

Из существования U следует, что **A** и **C** – симметричные тензоры. Соотношения (4.3) и (4.4) вместе с уравнениями статики (3.2) образуют полную систему уравнений линейной теории со сдвигом.

5. Дальнейшая конкретизация уравнений требует задания функции $U(\varepsilon, \chi, a_k)$ – в частности, задания **A**, **B**, **C** в линейной теории со сдвигом. Вообще говоря, U может содержать в качестве параметров некоторые величины, характеризующие геометрию кривой в окрестности данной точки. Однако в первом приближении зависимостью U от геометрии можно пренебречь подобно тому, как это сделано в классической теории. Тогда тензоры **A**, **B**, **C** будут определяться свойствами материала и геометрией сечений моделируемого стержня. Однако проблема определения **A**, **B**, **C** требует соответствующей интерпретации кинематических и силовых величин, фигурирующих в теории. Представляется, что эта проблема подобна проблеме определения упругих констант материала и потому является самостоятельной и может рассматриваться независимо от данной работы.

Автор благодарит А. И. Лурье, В. А. Пальмова и П. А. Жилина за обсуждение работы.

Поступила 24 VI 1974

УДК 539.375

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Н. А. БАХВАЛОВА

(Ленинград)

Известны несколько вариантов получения закона, описывающего распространение трещины при циклическом нагружении [1-4].

При амплитудных напряжениях, не слишком близких к пределу текучести материала, получаемые формулы соответствуют закону четвертой степени Пэриса [5]. В зависимости от исходных предпосылок коэффициент пропорциональности в этих формулах либо задан с точностью до постоянной размерности длины [2, 3], либо полностью определяется модулем упругости E, пределом прочности σ_0 и удельной энергией на образование единицы поверхности трещины γ.

В первом случае константа размерности длины для различных материалов, судя по данным экспериментов, не является стабильной. Во втором случае расхождение теоретических результатов с экспериментальными данными существенно превышает разброс последних.

В этой работе изучается модель распространения усталостной трещины, основанная на концепции накопления повреждений, что позволяет ввести достаточно стабильную безразмерную характеристику усталостных свойств материала при удовлетворительном согласии получаемых результатов с экспериментальными данными.

Рассмотрим трещину в бесконечной пластине под действием циклической растягивающей нагрузки. Возможный приток энергии dW к концу трещины на любом этапе ее развития определяется формулой $dW/da=K^2/E$, где a – полудлина трещины, K – коэффициент интенсивности напряжений. Предполагается, что за каждый цикл нагружения конец трещины продвигается на малую величину da. При циклическом нагружении в зоне впереди вершины трещины происходит пластическая деформация, сопровождающаяся накоплением повреждений. При этом уменьшается работа, которую нужно дополнительно совершить для разрыва связей в вершине трещины. Суммарное количество потерь энергии $\Delta\gamma$ у конца трещины за цикл приближенно оценивается следующей суммой:

$$\Delta\gamma=\delta\gamma(a)+\delta\gamma(a+da)+\delta\gamma(a+2da)+\ldots+\delta\gamma(a+c) \tag{1}$$

учитывающей тот факт, что рассматриваемая точка в предшествующих циклах находилась на расстоянии от конца трещины, равном da, $2da$, $3da$ и т. д. Здесь $\delta\gamma(x)$ – потери энергии на повреждение материала в окрестности точки x за один цикл, c – размер области, в которой происходит существенное повреждение материала. Учитывая малость da, $\Delta\gamma$ можно записать в интегральном виде. Сумма (1), нормированная на γ-величину работы, необходимой для разрыва связей в вершине трещины и распространения ее при статическом нагружении, имеет смысл функции поврежденности, введенной в [6].