УДК 539.3.01

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ СРЕД С ДЕФОРМИРУЕМОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ

В. М. СУЯЗОВ

(Воронеж)

Развивается вариант теории упругих неизотермических изотропных сред с внутренними вращениями и деформациями частиц с использованием неразложимых представлений для определяющих параметров относительно полной ортогональной группы преобразований. В отличие от ранее известных работ [1–3] при построении теории вместо тензора макродеформации используется тензор микродеформации, что позволяет получить уравнения состояния упругих сред, структура которых аналогична определяющим уравнениям для жидкости с микроструктурой статей [4, 5].

1. Приведем основные динамические и термодинамические уравнения. Рассмотрим движение упругого континуума относительно фиксированной декартовой системы координат x_i. Допустим, что деформации материала малы, так что различием между материальными и пространственными координатами можно пренебречь. Обозначим посредством u^k и Φ_{kl} соответственно компоненты векторов бесконечно малого перемещения и компоненты бесконечно малого градиента микроперемещения. В качестве величин, характеризующих кинематическое состояние материала, возьмем меру относительной микродеформации, меру малой относительной деформации «микросреды» по отношению к окружающей «макросреде», градиент вектора бесконечно малых поворотов φ^r, градиент микродеформации, определяемые соответственно соотношениями

$$\psi_{ij}=\Phi_{(ij)},\qquad \gamma_{ij}=u_{ji}-\Phi_{ij},\qquad \varphi_{r,\,i},\qquad \psi_{ij,\,s},\qquad 2\varphi^r=\varepsilon^{rij}\Phi_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь запятая означает частное дифференцирование по соответствующей координате. Круглые и квадратные скобки в индексах обозначают соответственно симметрию и антисимметрию тензора по этим индексам. В соотношении (1.1) и везде далее принято правило суммирования по повторяющемуся дважды тензорному индексу.

Напряженное состояние описывается симметричными силовыми напряжениями $t^{(ij)}$, микронапряжениями s^{ij}, моментными напряжениями M^{ij}, двойными безмоментными напряжениями $\mu^{r(ij)}$ и вектором силового напряжения t^r. Введенные величины удовлетворяют системе динамических уравнений движения и уравнениям термодинамики, которые с учетом малости деформации, изотропности материала в линейном приближении запишем в виде [1, 4]

$$\rho=\rho_0(1+u_{i,\,i}),\qquad \rho_0 u^{r\bullet\bullet}=t^{ir}{}_{,\,i}+\rho_0 f^r \tag{1.2}$$

$$\rho_0 I_0\varphi^{r\bullet\bullet}=t^r+M^{ir}{}_{,\,i}+\rho_0 l^r,\qquad {}^1\!/_2\rho_0 I_0\psi_{ir}{}^{\bullet\bullet}=t^{(ir)}-s^{ir}+\mu^{s(ir)}{}_{,\,s}+\rho_0 B^{(ir)}$$

$$\rho_0 u^\bullet-\rho_0 r+q_{i,\,i}=\pi,\qquad \rho_0 T\sigma=\pi-\rho_0(F^\bullet+\gamma T^\bullet)-q^r T_{,\,r}/T\geqslant 0$$

$$\pi=t^{ir}\gamma_{ir}{}^\bullet+s^{ir}\psi_{ir}{}^\bullet+M^{ir}\dot\varphi_{r,i}+\mu^{s(ir)}\dot\psi_{ir,s},\qquad M^{ir}=\varepsilon^{jsr}\mu^{ijs}$$

$$F=u-\gamma T,\qquad 2I^{nm}=I_0\delta^{mn},\qquad l^r=\varepsilon^{rij}B^{ij},\qquad t^l=\varepsilon^{lij}t^{ij} \tag{1.3}$$

Здесь ρ_0 — массовая плотность в недеформированном состоянии, δ^{mn} — символ Кронекера, ε^{ijr} — аксиальный асимметричный тензор Леви — Чивита. Точка означает дифференцирование по времени.

2. Рассмотрим уравнения состояния упругой среды с учетом неразложимых представлений для определяющих переменных (1.1). Из (1.3) непосредственно видно, что свободная энергия F может быть функцией только переменных совокупности (1.1) (исключая φ^r) и температуры T. Используя условие ее дифференцируемости из (1.3), находим уравнения состояния и неравенство для производства энтропии в виде

$$t^{ij}=\rho_0\frac{\partial F}{\partial\gamma_{ij}},\qquad s^{ij}=\rho_0\frac{\partial F}{\partial\psi_{ij}},\qquad M^{ij}=\rho_0\frac{\partial F}{\partial\varphi_{j,i}},\qquad \mu^{p(ij)}=\rho_0\frac{\partial F}{\partial\psi_{ij,p}}$$

$$\gamma=-\frac{\partial F}{\partial T},\qquad \rho_0 T\sigma=-q^r T_{\,r}/T\geqslant 0 \tag{2.1}$$

Для определения явного вида уравнений состояний конкретизируем функцию свободной энергии, разложив ее в ряд по ее аргументам. При этом членами выше второго порядка малости пренебрегаем. Линейные члены разложения опустим на основании предположения, что в недеформированном состоянии ($t=t_0$, $T=T_0$) напряжения в теле отсутствуют. Принимая во внимание, что скалярная функция должна быть формивариантной относительно ортогональной группы преобразований, а также предположение о малости изменения температуры $\theta=T-T_0$, искомое разложение для свободной энергии запишем в виде

$$\rho_0 F = \frac{1}{2} \overset{klmn}{b}_{\langle\gamma,\gamma\rangle} \gamma_{kl}\gamma_{mn} - \frac{\rho_0 c}{2T_0}\theta^2 - \rho_0 \overset{kl}{b}_{\langle\psi,\theta\rangle}\psi_{kl}\theta - \rho_0 \overset{kl}{b}_{\langle\gamma,\theta\rangle}\gamma_{kl}\theta + \frac{1}{2} \overset{(kl)(mn)}{b}_{\langle\psi,\psi\rangle} \psi_{kl}\psi_{mn} +$$
$$+ \frac{1}{2} \overset{klmn}{b}_{\langle\varphi,\varphi\rangle} \varphi_{l,k}\varphi_{n,m} + \overset{(kl)(mn)}{b}_{\langle\gamma,\psi\rangle} \psi_{kl}\gamma_{mn} + \frac{1}{2} \overset{k(lm)r(sq)}{a}_{\langle\mu,\mu\rangle} \psi_{lm,k}\psi_{sq,r} + \overset{klm(rs)}{a}_{\langle\varphi,\mu\rangle} \varphi_{l,k}\psi_{rs,m} \tag{2.2}$$

Здесь индексы, заключенные в угловые скобки, не являются тензорными. Для тензоров второго и четвертого рангов из (2.2) имеем известные выражения (2.3). Тензор шестого ранга и псевдотензор пятого ранга из (2.2) определяем в виде

$$b^{kl}=b\delta^{kl}, \qquad b^{klmn}=b_1\delta^{kl}\delta^{mn}+b_2(R_{ln}{}^{km}-{}^2/_3\delta^{mn}\delta^{kl})+b_3\overset{kls}{\delta}_{mns} \tag{2.3}$$

$$R_{ln}{}^{km}=\delta^{km}\delta^{ln}+\delta^{lm}\delta^{kn}, \qquad \overset{kls}{\delta}_{mnp}=\varepsilon^{kls}\varepsilon_{mnp}, \qquad \delta_{np}{}^{ls}=\overset{kls}{\delta}_{knp}$$

$$\begin{gathered} a^{klr(sq)}=3a_6\varepsilon^{kl(r}\delta^{sq)}+a_8\varepsilon^{klf}(R_{qr}{}^{sf}-2\delta^{fr}\delta^{qs})+ \\ +a_7[(R_{fk}{}^{ql}-{}^2/_3\delta^{lk}\delta^{qf})\varepsilon^{frs}+(R_{fk}{}^{sl}-{}^2/_3\delta^{lk}\delta^{sf})\varepsilon^{frq}] \\ a^{k(lm)r(sq)}=a_5(2\delta^{ls}\delta^{qr}\delta^{mk}-\delta^{lr}\delta^{qs}\delta^{mk}+2\delta^{lq}\delta^{sr}\delta^{mk}+2\delta^{ms}\delta^{qr}\delta^{lk}-\delta^{mr}\delta^{qs}\delta^{lk}+ \\ +2\delta^{mq}\delta^{sr}\delta^{lk}-\delta^{ks}\delta^{qr}\delta^{lm}-4\delta^{kr}\delta^{qs}\delta^{lm}-\delta^{kq}\delta^{sr}\delta^{lm})+a_4(\delta^{mk}\delta_{rs}{}^{ql}+\delta^{lk}\delta_{rs}{}^{qm}-2\delta^{ml}\delta_{rs}{}^{qk}+ \\ +\delta^{lk}\delta_{rq}{}^{sm}+\delta^{mk}\delta_{rq}{}^{sl}-2\delta^{ml}\delta_{rq}{}^{sk})+a_3(\delta^{mq}\delta_{kl}{}^{rs}+\delta^{ls}\delta_{km}{}^{rq}+\delta^{ms}\delta_{kl}{}^{rq}+\delta^{lq}\delta_{km}{}^{rs}+ \\ +\overset{mrq}{\delta}_{skl}+\overset{lrq}{\delta}_{skm}+\overset{lrs}{\delta}_{qkm}+\overset{mrs}{\delta}_{qkl})+\overset{(klm)(rsq)}{a_*} \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\overset{(klm)(rsq)}{a_*}=9a_2\delta^{(qr}\delta^{s)(l}\delta^{mk)}+{}^1/_2a_1(\delta^{sl}R_{kr}{}^{mq}+\delta^{sk}R_{rl}{}^{qm}+\delta^{sm}R_{rk}{}^{ql}-{}^{18}/_5\delta^{(qr}\delta^{s)(l}\delta^{mk)})$$

Тензорные коэффициенты (2.3), (2.4) представлены в форме, которая позволяет получить уравнения состояния через неприводимые слагаемые кинематических переменных (1.1) относительно полной ортогональной группы преобразований. Из (2.1), (2.2) с учетом (2.3), (2.4) получаем уравнения состояния в форме

$$\begin{gathered} t^{(kl)}=(b_{\langle\gamma,\gamma\rangle1}\gamma_{ss}+b_{\langle\gamma,\psi\rangle1}\psi_{ss}-\rho_0b_{\langle\gamma,\theta\rangle}\theta)\delta^{kl}+2b_{\langle\gamma,\gamma\rangle2}\gamma_{(kl)'}+2b_{\langle\gamma,\psi\rangle2}\psi_{kl'} \\ t^{[kl]}=2b_{\langle\gamma,\gamma\rangle3}\varepsilon^{kls}\gamma_s, \qquad 2\gamma^s=\varepsilon^{mns}\gamma_{mn}=\varepsilon^{mns}u_{n,m}-2\varphi^s \\ s^{kl}=(b_{\langle\psi,\psi\rangle1}\psi_{ss}+b_{\langle\gamma,\psi\rangle1}\gamma_{ss}-\rho_0b_{\langle\psi,\theta\rangle}\theta)\delta^{kl}+2b_{\langle\psi,\psi\rangle2}\psi_{kl}'+2b_{\langle\gamma,\psi\rangle2}\gamma_{(kl)'} \\ M^{kl}=b_{\langle\varphi,\varphi\rangle1}\varphi_{s,s}\delta^{kl}+2b_{\langle\varphi,\varphi\rangle2}\varphi_{(l,k)'}+8a_{\langle\varphi,\mu\rangle7}n_{(kl)}+\varepsilon^{klf}(2b_{\langle\varphi,\varphi\rangle3}\chi_f+8a_{\langle\varphi,\mu\rangle8}n_f+3a_{\langle\varphi,\mu\rangle6}\psi_f) \\ \mu^{r(sq)}=3a_{\langle\mu,\mu\rangle1}\psi_{(sq,r)^\circ}+9a_{\langle\mu,\mu\rangle2}\psi_{(r}\delta_{sq)}+8a_{\langle\mu,\mu\rangle3}(\varepsilon^{prq}n_{(ps)}+\varepsilon^{frs}n_{(fq)})+ \\ +8a_{\langle\mu,\mu\rangle4}(n^s\delta^{qr}+n^q\delta^{sr}-2n^r\delta^{qs})+3a_{\langle\mu,\mu\rangle5}(8n^{(s}\delta^{qr)}+\psi^s\delta^{qr}+\psi^q\delta^{sr}-2\psi^r\delta^{sq})+ \\ +6a_{\langle\varphi,\mu\rangle6}\chi_{(r}\delta_{sq)}+2a_{\langle\varphi,\mu\rangle7}(\varepsilon^{nrs}\varphi_{(n,q)}+\varepsilon^{nrq}\varphi_{(n,s)})+2a_{\langle\varphi,\mu\rangle8}(\chi^s\delta^{rq}+\chi^q\delta^{rs}-2\chi^r\delta^{sq}) \end{gathered}$$

$$\gamma=\frac{c}{T_0}\theta+b_{\langle\psi\rangle\theta,}\psi_{ll}+b_{\langle\gamma,\theta\rangle}\gamma_{ll}, \qquad \psi_{(sq,r)}{}^\circ=\psi_{(sq,r)}-\frac{3}{5}\psi^{(s}\delta^{qr)}, \qquad 2n_{nk}=\varepsilon^{npi}\psi_{ik,p}$$

$$\gamma_{(ik)'}=\gamma_{(ik)}-{}^1/_3\gamma_{ss}\delta^{ik}, \qquad 2\chi^r=\varepsilon^{rks}\varphi_{s,k}, \qquad 4n^r=\psi_{rs,s}-\psi_{ss,r}, \qquad 3\psi_r=2\psi_{sr,s}+\psi_{ss,r} \tag{2.5}$$

Явное разложение тензора третьего ранга на неприводимые слагаемые приведено в работе [4]. Для удобства дальнейшего изложения переобозначим упругие модули из (2.5): $b_{\langle\gamma,\gamma\rangle1}=\mu_2$, $b_{\langle\gamma,\psi\rangle1}=2\mu_3$, $\rho_0b_{\langle\gamma,\theta\rangle}=\tau_{13}$, $\rho_0b_{\langle\psi,\theta\rangle}=\tau_{12}$, $b_{\langle\gamma,\gamma\rangle2}=\mu_5$, $b_{\langle\gamma,\psi\rangle2}=\mu_7$, $2b_{\langle\gamma,\gamma\rangle3}=\mu_6$, $b_{\langle\psi,\psi\rangle1}=\mu_1$, $b_{\langle\psi,\psi\rangle2}=\mu_4$, $b_{\langle\varphi,\varphi\rangle1}=\tau_1$, $b_{\langle\varphi,\varphi\rangle2}=\tau_2$, $2b_{\langle\varphi,\varphi\rangle3}=\tau_3$, $4a_{\langle\varphi,\mu\rangle7}=\tau_{10}$, $8a_{\langle\varphi,\mu\rangle8}=\tau_{11}$, $12a_{\langle\mu,\mu\rangle5}=\tau_9$, $3a_{\langle\varphi,\mu\rangle6}=\tau_8$, $3a_{\langle\mu,\mu\rangle1}=\tau_4$, $9a_{\langle\mu,\mu\rangle2}=\tau_5$, $32a_{\langle\mu,\mu\rangle3}=\tau_6$, $64a_{\langle\mu,\mu\rangle4}=\tau_7$.

Отметим, что величины $\mu_1, \mu_2, \ldots, \tau_{13}$ представляют собой скалярные феноменологические коэффициенты, характеризующие изотропные упругие и тепловые свойства материала. Наличие членов с коэффициентами τ_8, τ_{10}, τ_{11} в уравнениях состояния для моментных и двойных безмоментных напряжений устанавливает связь между скоростью изменения угловой скорости и скоростью изменения микродеформации среды. В случае, когда они равны нулю, моментные напряжения определяются только градиентом вектора поворота, а двойные безмоментные напряжения выражаются только через градиенты микродеформации среды.

Таким образом, рассмотрение в качестве независимых искомых величин u^k, φ^s и ψ_{ij} вместо u^k и Φ_{kl} позволяет выделить в уравнениях состояний члены, учитывающие взаимосвязь моментных и двойных безмоментных напряжений. Из полученной модели легко получить модель среды с внутренними поворотами частиц [6, 7]. Для этого в уравнениях (2.5) следует положить $\mu^{p(ik)}=0$, $s^{ik}=0$, $\tau_8=\tau_{10}=\tau_{11}=0$, $\psi_{ik}=0$. С другой стороны, из системы уравнений (2.5) можно получить модель среды, в которой существенную роль играют двойные безмоментные напряжения и микронапряжения, а величина моментных напряжений незначительна. Для этого в соотношениях (2.5) следует положить $M^{ij}=0$, $\tau_8=\tau_{10}=\tau_{11}=0$.

Заметим, что в предлагаемой теории микроупругой среды в уравнении состояния для тензора силовых напряжений (2.5) отсутствуют члены, аналогичные членам классической теории упругости с упругим модулем всестороннего сжатия и модулем сдвига. Последнее обусловлено характером кинематических переменных, используемых при построении теории, а именно, мера макродеформации не входит в число независимых кинематических переменных (1.1).

Подставляя (2.5) в (1.2), получаем в результате уравнения движения упругой среды в перемещениях в виде

$$\rho_0\frac{\partial^2u^k}{\partial t^2}=\left(2\mu_3-\frac{2}{3}\mu_7+\frac{2}{3}\mu_5-\mu_2\right)\psi_{ll,k}+\left(\mu_2+\frac{1}{3}\mu_5-\frac{1}{2}\mu_6\right)u_{l,lk}-\tau_{13}T_{,k}+$$
$$+\left(\mu_5+\frac{1}{2}\mu_6\right)u_{k,ii}+\mu_6\varepsilon^{kil}\varphi_{l,i}-2(\mu_5-\mu_7)\psi_{ik,i}+\rho_0f^k \tag{2.6}$$

$$\rho_0I_0\frac{\partial^2\varphi^r}{\partial t^2}=\mu_6(\varepsilon^{rps}u_{s,p}-2\varphi^r)+\left(\tau_1+\frac{1}{3}\tau_2-\frac{1}{2}\tau_3\right)\varphi_{l,lr}+$$
$$+\left(\tau_2+\frac{1}{3}\tau_3\right)\varphi_{r,pp}-2c_1\varepsilon^{rni}\psi_{ip,np}+\rho_0l^r \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{2}\rho_0I_0\frac{\partial^2\psi_{ik}}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{3}\tau_4+\frac{1}{4}\tau_6\right)\psi_{ik,pp}+2\left(\frac{1}{5}\tau_4-\frac{3}{16}\tau_6+\frac{2}{9}\tau_5+\frac{1}{3}\tau_9+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{32}\tau_7\right)\psi_{p(k,i)p}+c_2(\psi_{ss,ik}+\psi_{sp,sp}\delta^{ik})+\left(\frac{1}{9}\tau_5-\frac{1}{3}\tau_9-\frac{1}{15}\tau_4+\frac{1}{16}\tau_7-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\tau_6\right)\psi_{ss,rr}\delta^{ik}+(\mu_5-\mu_7)2u_{(k,i)}+\left[\left(\mu_2-\frac{2}{3}\mu_5-2\mu_3+\frac{2}{3}\mu_7\right)u_{l,l}+\right.$$
$$\left.+\left(4\mu_3-\frac{4}{3}\mu_7+\frac{2}{3}\mu_5-\mu_2-\mu_1+\frac{2}{3}\mu_4\right)\psi_{ll}-(\tau_{13}-\tau_{12})\theta\right]\delta^{ik}+$$
$$+c_1(\varepsilon^{ins}\varphi_{s,nk}+\varepsilon^{kns}\varphi_{s,ni})-2(\mu_5-2\mu_7+\mu_4)\psi_{ik}+\rho_0B^{(ik)}$$
$$c_1={}^1/_3\tau_8+{}^1/_8\tau_{11}-{}^1/_4\tau_{10},\qquad c_2={}^2/_9\tau_5-{}^1/_6\tau_9-{}^2/_{15}\tau_4-{}^1/_{16}\tau_7+{}^1/_8\tau_6 \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.6) – (2.8) представляет собой связанную систему. В случае, если $\tau_8=\tau_{10}=\tau_{11}=0$, уравнения для определения поворотов частиц и уравнения для микродеформации разделяются. Заметим, что для замыкания системы уравнений (2.6) – (2.8) необходимо привлечь уравнение энергии или баланс энтропии (1.3) и закон Фурье. Тогда при $\rho_0r=0$ будем иметь замкнутую систему, состоящую из тринадцати уравнений относительно тринадцати неизвестных u^k, φ^k, ψ_{ik}, T.

3. Из системы уравнений (2.6) – (2.8) следует, что для ее решения (при $T=T_0$) требуется двенадцать граничных условий. Это – три условия для макроперемещения и девять условий для поворотов и микродеформации среды. Для поворотов частиц можно использовать условие вида

$$\varphi^ks_1{}^1/_2\varepsilon^{kij}u_{j,i}=(1-s_1)\varphi_*{}^k\qquad(0\leqslant s_1\leqslant1) \tag{3.1}$$

представляющее условие смешанного типа и включающее в себя два предельных условия. Если $s_1=0$, (3.1) переходит в условия неуничтожаемости поворотов частиц на границе, если $s_1=1$, имеем условие отсутствия относительных поворотов частиц [6].

Для компонент микродеформации граничное условие можно задать в виде

$$\psi_{ik}-s_2 u_{(k,i)}=(1-s_2)\psi_{ik}^* \qquad (0\leqslant s_2\leqslant 1) \tag{3.2}$$

При $s_2=1$ имеем условие тождественности тензора микродеформации и тензора макродеформации. Случай $s_2=0$ соответствует условию неуничтожаемости микродеформации на границе. Использование граничного условия типа (3.2) при $s_2=1$ для скоростей деформаций в рамках модели жидкости с деформируемой микроструктурой позволяет в некоторых случаях описать эффект снижения силового напряжения на границе [5]. Кроме этих условий, возможно также использование условия уничтожаемости моментных напряжений [8] и условия неуничтожаемости двойных безмоментных напряжений [4].

4. Рассмотрим термодинамические ограничения на упругие модули. С этой целью выражение для свободной энергии (2.2) с учетом (2.3), (2.4) преобразуем к виду

$$\rho_0 F=\rho_0 F_D+\rho_0 F_T, \qquad -\rho_0 F_T=\tau_{12}\psi_{ll}\theta+\tau_{13}\gamma_{ll}\theta+\frac{\rho_0 c}{2T_0}\theta^2$$

$$\rho_0 F_D={}^1/_2\mu_1\psi_{ll}{}^2+{}^1/_2\mu_2\gamma_{ll}{}^2+{}^1/_2\tau_1\varphi_{l,l}{}^2+2\mu_3\psi_{ll}\gamma_{ll}+\mu_6\gamma^j\gamma_j+\tau_3\chi^r\chi_r+{}^1/_2\tau_5\psi_r\psi^r+$$
$$+2\tau_8\chi^r\psi_r+2\tau_9\psi_r n^r+2\tau_{11}n^r\chi_r+{}^1/_2\tau_7 n^r n_r+\mu_4\psi_{ik'}\psi_{ik'}+\mu_5\gamma_{(ik)'}\gamma_{(ik)'}+2\mu_7\psi_{ik'}\gamma_{(ik)'}+$$
$$+\tau_2\varphi_{(s,p)'}\varphi_{(s,p)'}+{}^1/_2\tau_6 n_{(nk)}n_{(nk)}+2\tau_{10}\varphi_{(k,n)'}n_{(nk)}+{}^1/_2\tau_4\psi_{(ik,p)^\circ}\psi_{(ik,p)^\circ} \tag{4.1}$$

Из условия положительности квадратичной формы (4.1) следуют ограничения на упругие модули

$$\tau_4,\ \tau_1,\ \mu_6,\ \mu_1,\ \tau_5,\ \mu_4,\ \mu_5,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \mu_2,\ \tau_6>0 \tag{4.2}$$

$${}^1/_4\mu_1\mu_2-\mu_3{}^2, \quad \mu_4\mu_5-\mu_7{}^2, \quad {}^1/_2\tau_2\tau_6-\tau_{10}{}^2, \quad {}^1/_2\tau_5\tau_3-\tau_8{}^2>0$$

$$\tau_9(\tau_8\tau_{11}-\tau_9\tau_3)-\tau_{11}({}^1/_2\tau_5\tau_{11}-\tau_9\tau_8)+{}^1/_2\tau_7({}^1/_2\tau_5\tau_3-\tau_8{}^2)>0$$

Кроме условий (4.2), имеют место также ограничения вида: τ_7, ${}^1/_4\tau_7\tau_5-\tau_{11}{}^2$, ${}^1/_2\tau_7\tau_3-\tau_{11}{}^2>0$, представляющие собой условия положительности непоследовательных главных миноров квадратичной формы (4.1). Допуская в этих соотношениях, а также в соотношениях (4.2) знак равенства, получаем необходимые и достаточные условия неотрицательности квадратичной формы (4.1). В работе [9] получены термодинамические ограничения на упругие модули, используемые в теории микроупругой среды в [1].

Поступила 23 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Non-linear theory of simple micro-elastic solids. Internat. J. Engng Sci., 1964, vol. 2, No. 2, p. 189.
2. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity. Archive Rational. Mech. Analysis, 1964, vol. 16, No. 1, p. 51. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4, стр 129).
3. *Koh S. L.* A special theory of microelasticity. Internat. J. Engng Sci., 1970, vol. 8, No. 7, p. 583.
4. *Суязов В. М.* О структурно-континуальном подходе в магнито- и электрореологии дисперсных систем. Магнитная гидродинамика, 1972, № 2.
5. *Суязов В. М.* К гидродинамической теории пристеночного приосевого эффектов и эффекта Фареуса — Линдквиста. Механика полимеров, 1973, № 2.
6. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Физика твердого тела, 1964, т. 6, вып. 9.
7. *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar elasticity. J. Math. Mech., 1966, vol. 15, No. 6, p. 909.
8. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидродинамика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
9. *Smith A. C.* Inequalities between the constants of a linear micro-elastic solid. Internat. J. Engng Sci., 1968, vol. 6, No. 2, p. 65.