

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЧАСТОТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
И СИЛУ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

А. П. СЕЙРАНЯН

(Москва)

Рассматривается задача определения формы упругой балки минимального веса (объема) при ограничениях в виде неравенств, наложенных на частоту собственных колебаний и силу потери устойчивости. Дан вывод необходимых условий оптимальности. Исследуется зависимость оптимального решения от параметров задачи. Приводятся численные результаты.

Задача максимизации величины силы, при которой происходит потеря устойчивости стержня при заданном весе, была поставлена впервые автором [1] и решена для случая шарнирного закрепления в работе [2]. Из последних работ отметим [3, 4], в которых, кстати, приводится полная библиография.

Задача максимизации частоты первого тона собственных колебаний стержня при том же ограничении для случая шарнирного закрепления решена автором [5].

1. Рассмотрим задачу проектирования шарнирно опертой упругой балки минимального объема (веса) при ограничениях на частоту поперечных собственных колебаний основного тона и минимальное значение продольной силы, при которой происходит потеря устойчивости. Уравнения колебаний и потери устойчивости запишем в виде

$$(h^3(x)w_1''(x))'' - \omega^2 h(x)w_1(x) = 0, \quad x \in (0, 1); \quad w_1(0) = w_1(1) = 0 \\ = h^3 w_1''|_{x=0} = h^3 w_1''|_{x=1} = 0 \quad (1.1)$$

$$h^3(x)w_2''(x) + pw_2(x) = 0, \quad x \in (0, 1); \quad w_2(0) = w_2(1) = 0 \quad (1.2)$$

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \Omega^2 \rho l^2 / E, \quad p = \frac{3}{2} P / Ebl \quad (1.3)$$

В этих уравнениях Ω — частота собственных колебаний; P — величина силы, при которой происходит потеря устойчивости; E , ρ , b , l — модуль упругости, плотность материала, ширина и длина балки соответственно; $2h(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ — безразмерные величины: толщина балки и функции прогибов при колебаниях и потере устойчивости, отнесенные к l .

Безразмерный объем балки равен

$$V = \int_0^1 h(x) dx \quad (1.4)$$

для получения размерной величины объема интеграл из (1.4) следует умножить на величину $2bl^2$. Наложив на величины Ω и P ограничения в виде неравенств $\Omega^2 \geq \Omega_0^2$, $P \geq P_0$ или для безразмерных величин $\omega^2 \geq \omega_0^2$, $p \geq p_0$, поставим оптимизационную задачу: определить функцию $h^0(x)$, реализующую минимальное значение функционала (1.4) при принятых ограничениях. Или более строго — требуется найти функцию $h^0(x)$, так что

$$V(h^0(x)) = \min_{h(x) \in M} V(h(x)) \quad (1.5)$$

где множество M определяется выражением

$$M = \{h(x) : h(x) \in C[0, 1]; h(x) > 0, x \in (0, 1); \omega^2 \geq \omega_0^2, p \geq p_0\}$$

2. Для самосопряженных и положительно определенных задач на собственные значения (1.1) и (1.2) справедлив принцип Рэля [6]

$$\omega^2 = \min_u \int_0^1 h^3 u''^2 dx \left(\int_0^1 h u^2 dx \right)^{-1} = \int_0^1 h^3 w_1''^2 dx \left(\int_0^1 h w_1^2 dx \right)^{-1} \quad (2.1)$$

$$p = \min_v \int_0^1 v'^2 dx \left(\int_0^1 \frac{v^2}{h^3} dx \right)^{-1} = \int_0^1 w_2'^2 dx \left(\int_0^1 \frac{w_2^2}{h^3} dx \right)^{-1} \quad (2.2)$$

В этих выражениях функции сравнения u и v удовлетворяют граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$, $v(0) = v(1) = 0$ и соответствующим условиям гладкости. Введением новых неизвестных α_1 и α_2 сведем ограничения в виде неравенств к равенствам и выпишем функционал Лагранжа: $V - \lambda_1(\omega^2 - \omega_0^2 - \alpha_1^2) - \lambda_2(p - p_0 - \alpha_2^2)$.

Необходимым условием минимума функционала (1.4) при принятых ограничениях является стационарность функционала Лагранжа по переменным $h(x)$, λ_1 , λ_2 , α_1 , α_2 и неотрицательность множителей λ_1 и λ_2 [7]. Приравнявая полную вариацию по $h(x)$ нулю и используя принцип Рэля (2.1), (2.2) (аналогичное см. в [8]), получим

$$1 - \mu_1(3h^2 w_1''^2 - \omega^2 w_1^2) - \mu_2 w_2^2 h^{-4} = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (2.3)$$

$$\mu_1 = \lambda_1 \left(\int_0^1 h w_1^2 dx \right)^{-1}, \quad \mu_2 = \lambda_2 p \left(\int_0^1 \frac{w_2^2}{h^3} dx \right)^{-1}$$

Приравнявая нулю частные производные по λ_1 , λ_2 , α_1 , α_2 и заменяя λ_1 , λ_2 на μ_1 , μ_2 , получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha_1^2, \quad \mu_1 \alpha_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$p = p_0 + \alpha_2^2, \quad \mu_2 \alpha_2 = 0 \quad (2.5)$$

К этим уравнениям следует добавить условие неотрицательности множителей λ_1 , λ_2 , что эквивалентно

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0 \quad (2.6)$$

а также уравнения и граничные условия (1.1) и (1.2).

Полученная таким образом система уравнений и граничных условий (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6) является полной системой необходимых условий минимума функционала (1.4) на множестве M .

3. Исследуем систему уравнений (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6). Сначала рассмотрим случай $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$. Комбинируя условие оптимальности (2.3) с граничными условиями уравнения (1.1), получим

$$\lim (3h^2 w_1''^2 - \omega^2 w_1^2) = \lim 3h^2 w_1''^2 = 4/\mu_1$$

В то же время $h^3 w_1'' = 0$ при $x=0$. Следовательно, $\lim h(x) = 0$ при $x \rightarrow 0$. Вследствие симметрии задачи то же справедливо и для границы $x=1$. Исследуем поведение решения $w_1(x)$ уравнения (1.1) в окрестности границы $x=0$, положив $h(x) = cx^\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда для того, чтобы точка $x=0$ была слабо особой, т. е. существовало решение вида $w_1(x) = x^\beta f(x)$, где $f(x)$ — функция, разложимая в окрестности $x=0$ в ряд Тейлора, причем $f(0) \neq 0$ [9], до-

статочно потребовать $\alpha < 2$; при этом существуют четыре решения, соответствующие различным значениям β : $\beta_1=0$, $\beta_2=1$, $\beta_3=-3\alpha+2$, $\beta_4=-3\alpha+3$.

Из этих решений граничным условиям способны удовлетворить лишь решения с показателями $\beta=1$ и $\beta=-3\alpha+3$. Если дополнительно потребовать, чтобы функция $h(x)$ удовлетворяла условию оптимальности (2.3), то отсюда получим $\alpha=1/2$.

Таким образом, для случая $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ функция $h_1^\circ(x)$, удовлетворяющая необходимым условиям оптимизационной задачи, в окрестности границы $x=0$ имеет представление $c\sqrt{x}$, при этом поведение функции $w_1^\circ(x)$ описывается выражением $w_1^\circ(x) = x f_1(x) + x^{3/2} f_2(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — регулярные в окрестности $x=0$ функции, причем $f_1(0) \neq 0$, $f_2(0) \neq 0$.

Для случая $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$, как нетрудно проверить, функции $h_2^\circ(x)$, $w_2^\circ(x)$ описываются аналогичными выражениями $h_2^\circ(x) = d\sqrt{x}$, $w_2^\circ(x) = x g_1(x) + x^{3/2} g_2(x)$, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — регулярные в окрестности границы $x=0$ функции, $g_1(0) \neq 0$, $g_2(0) \neq 0$.

Отсюда следует, что и для случая $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ функция $h^\circ(x)$, удовлетворяющая системе (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6), в окрестности границы $x=0$ описывается выражением $h^\circ(x) = e\sqrt{x}$. Вследствие симметрии задачи аналогичные рассуждения справедливы и для границы $x=1$.

Исследуем задачи (1.1) и (1.2). Для этого сведем их к интегральным уравнениям [6]. Функция Грина для оператора $L_1 u = (h^3(x) u''(x))''$ с граничными условиями из (1.4) имеет вид

$$K(x, \xi) = \int_0^1 \frac{G(x, s) G(s, \xi)}{h^3(s)} ds, \quad G(\xi, \eta) = \begin{cases} (1-\xi)\eta & (\eta < \xi) \\ (1-\eta)\xi & (\eta > \xi) \end{cases}$$

— функция Грина для оператора $L_2 u = u''(x)$ с граничными условиями из (1.2). Сделав замену переменных $v_1(x) = w_1(x) \sqrt{h(x)}$ и $v_2(x) = w_2(x) / \sqrt{h^3(x)}$, сведем краевые задачи (1.1) и (1.2) к интегральным уравнениям с симметричными ядрами

$$v_1(x) = \omega^2 \int_0^1 M(x, \xi) v_1(\xi) d\xi, \quad v_2(x) = p \int_0^1 B(x, \xi) v_2(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

$$M(x, \xi) = K(x, \xi) \sqrt{h(x) h(\xi)}, \quad B(x, \xi) = G(x, \xi) / \sqrt{h^3(x) h^3(\xi)}$$

Нетрудно убедиться, что для непрерывных функций $h(x)$, положительных в интервале $(0, 1)$ и обращающихся в ноль на границах этого интервала, например в окрестности $x=0$ по закону cx^α с показателем $0 < \alpha < 2/3$, ядра $M(x, \xi)$, $B(x, \xi)$ будут непрерывны на квадрате $(0 < x < 1, 0 < \xi < 1)$ и интегрируемы на нем с квадратом. В таком случае, согласно известным результатам теории интегральных уравнений с симметричным ядром, интегральные операторы из (3.1) имеют дискретный спектр [6, 10]. Как было показано выше, функция $h^\circ(x)$, удовлетворяющая системе (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6) в окрестности границы $x=0$, описывается выражением $e\sqrt{x}$ и, таким образом, интегральные операторы из (3.1), построенные для этой функции, имеют дискретный спектр.

В дальнейшем потребуются решать краевые задачи на собственные значения (1.1) и (1.2) по заданным функциям $h(x)$. Для их решения применим метод последовательных приближений [6]. Пусть $Lu = \lambda gu$, $U_u u = 0$ — самосопряженная и положительно определенная задача на собственные значения, а $T(\sqrt{gu}) = \lambda^{-1}(\sqrt{gu})$ — соответствующее ей интегральное уравнение. Итерации начнем с некоторой функции f_0 $L f_1 = g f_0$, $U_u f_1 = 0$

Для интегрального оператора T итерационная формула примет вид $T(\sqrt{g}f_0) = f_1\sqrt{g}$, при этом невозрастающая последовательность $v_n = \int f_n L f_n dx / \int g f_n^2 dx$ сходится к первому собственному числу λ_1 , а последовательность f_n стремится к u_1 — собственной функции оператора L .

4. Исследуем зависимость решения оптимизационной задачи (1.5) от параметров ω_0, p_0 . Для этого рассмотрим сначала случай $\omega = \omega_0, p > p_0$.

Тогда из уравнений (2.3) — (2.6) следует $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$. С привлечением (2.1) нетрудно убедиться, что решение системы (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6) в этом случае можно представить в виде

$$h_1^\circ(x) = \omega_0 h_1^*(x) \quad (4.1)$$

где функция $h_1^*(x)$ есть решение системы необходимых условий для значения $\omega_0 = 1$. Решив для функции $h_1^\circ(x)$ задачу (1.2) и определив $w_2(x), p$, потребуем $p \geq p_0$. Отсюда получим неравенство для параметра q

$$q = \frac{\omega_0^3}{p_0} \geq A, \quad A = \int_0^1 \frac{w_2^2}{h_1^{*3}} dx \left(\int_0^1 w_2'^2 dx \right)^{-1} \quad (4.2)$$

Таким образом для значений параметра $q \geq A$ решение оптимизационной задачи (1.5) записывается в виде $h_1^\circ(x) = \omega_0 h_1^*(x)$.

Рассмотрим теперь случай $\omega^2 > \omega_0^2, p = p_0$. Из (2.3) — (2.6) получим $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$. С привлечением (2.2) из вида системы (1.1), (1.2), (2.3) — (2.6) можно заключить, что решение этой системы представимо выражением

$$h_2^\circ(x) = p_0^{1/2} h_2^*(x) \quad (4.3)$$

где h_2^* есть решение той же задачи для значения $p_0 = 1$. Решив задачу (1.1) для функции $h_2^\circ(x)$ и определив $w_1(x), \omega$, потребуем $\omega^2 \geq \omega_0^2$. Отсюда получим неравенство $B p_0^{2/3} / \omega_0^2 \geq 1$ или для введенного в (4.2) параметра q

$$q \leq B^{3/2}, \quad B = \int_0^1 h_2^{*3} w_1'^2 dx \left(\int_0^1 h_2^* w_1^2 dx \right)^{-1} \quad (4.4)$$

Таким образом, для значений параметра $q \leq B^{3/2}$ решением задачи (1.5) является функция $h_2^\circ(x) = p_0^{1/2} h_2^*(x)$. Если $A > B^{3/2}$, то при условии $A > q > B^{3/2}$ функции h_1°, h_2° не являются решениями задачи (1.5), так как ограничения $\omega \geq \omega_0, p \geq p_0$ не могут быть выполнены. Для этого интервала значений q следует $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. Параметр q является, таким образом, основным параметром, определяющим решение оптимизационной задачи (1.5). С учетом (1.3) его можно представить в виде: $q = (3/2)^{1/2} \Omega_0^3 \rho^{3/2} b l^4 / E^{1/2} P_0$.

5. Изложим алгоритм решения задачи (1.5) для ограничений вида $\omega = \omega_0, p > p_0$ и $\omega > \omega_0, p = p_0$, т. е. определения функций $h_1^\circ(x), h_2^\circ(x)$.

Рассмотрим первый случай: $\omega = \omega_0, p > p_0$. Так как при этом $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$, то условие оптимальности (2.3) для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\psi(x) = 3h^2(x)w_1'^2(x) - \omega^2 w_1^2(x) = 1 / \mu_1 > 0$$

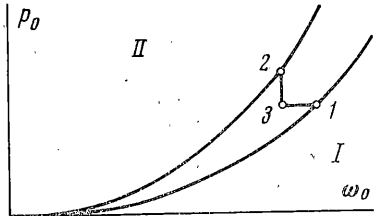
Выпишем итерационную формулу (N — достаточно большое число)

$$h^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x) \left[\left(\frac{\psi^{(n)}(x)}{\langle \psi^{(n)} \rangle} - 1 \right) \frac{1}{N} + 1 \right], \quad \langle \psi^{(n)} \rangle = \int_0^1 \psi^{(n)}(x) dx \quad (5.1)$$

Допустим, что последовательность $h^{(n)}(x)$, получаемая с помощью (5.1), сходится к некоторой функции $h_1(x)$ и этой функции соответствует значение ω . Тогда функцию $h_1^*(x)$ из (4.1) определим из выражения $h_1^*(x) = h_1(x) / \omega$. Действительно, непосредственно из (2.1) следует, что h_1^* соответствует значению $\omega = 1$, кроме того, выполнено условие оптимальности (2.3). Определим для функции $h_1^*(x)$ число A из (4.2). Из результатов п. 4 следует, что при выполнении соотношения $q \geq A$ функция $h_1^\circ(x) = \omega_0 h_1^*(x)$ будет решением оптимизационной задачи (4.5).

Аналогичным путем можно получить и функцию $h_2^\circ(x)$. Условие оптимальности (2.3) для ограничений $\omega^2 > \omega_0^2, p = p_0$ предстанет в виде

$$\psi(x) = w_2^2(x) / h^4(x) = 1 / \mu_2 > 0, \quad x \in (0,1) \quad (5.2)$$



Обозначим предел последовательности $h^{(n)}(x)$, получаемой из (5.1) с использованием (5.2), через $h_2(x)$. Тогда если $q \leq B^{3/2}$, то функция $h_2^\circ(x) = (p_0 / p)^{1/2} h_2(x)$ явится решением задачи (4.5). При построении итерационных процедур по (5.1) на каждом шаге для нахождения функций $\psi^{(n)}(x)$ необходимо решать задачи (4.1) либо (4.2). Один из возможных методов решения был описан в п. 3. Функция $\psi(x)$, фигурирующая в (5.1), является не чем иным, как градиентом соответствующего функционала $\omega^2(h(x))$ либо $p(h(x))$, поэтому изложенный метод является, по сути дела, градиентным методом первого порядка.

6. Численные результаты. Основой для численного алгоритма решения оптимизационной задачи на ЭВМ послужил метод последовательных приближений, описанный в п. 5, с использованием метода решения интегральных уравнений, изложенного в п. 3. При этом алгоритм решения интегральных уравнений был реализован в виде стандартных процедур, которые по заданным функциям $h(x)$ определяли собственные значения и собственные функции краевых задач (4.1) и (4.2).

Для реализации численных алгоритмов сегмент $[0, 1]$ разбивался на k равных частей, производные функций $w_1(x), w_2(x)$ заменялись конечно-разностными соотношениями. Число N из формулы (5.1) бралось в виде $2^m, m \sim 2-3$. Если при каком-то n последовательность $\max |\psi^{(n)}(x) / \langle \psi^{(n)} \rangle - 1|$ при $x \in (0, 1)$ переставала убывать, то число m увеличивалось на единицу и т. д. до выполнения соотношения $\max |\psi^{(n)}(x) / \langle \psi^{(n)} \rangle - 1| < \epsilon$ при $x \in (0, 1)$, где ϵ — точность вычислений.

Число разбиений k при расчетах бралось равным 80, 300, 600, а точность вычислений ϵ — соответственно $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$.

Расчеты показали, что числа A и $B^{3/2}$ из (4.2) и (4.4) весьма близки: $A = 97.61, B^{3/2} = 97.29$. На фигуре римскими цифрами указаны области, в которых реализуются оптимальные решения $h_1^\circ(x) = \omega_0 h_1^*(x)$ и $h_2^\circ(x) = p_0^{1/2} h_2^*(x)$. Границами областей I и II служат кубические параболы с коэффициентами $q_1 = 1/A$ и $q_2 = 1/B^{3/2}$ (см. (4.2), (4.4)). Функции $h_1^*(x), h_2^*(x), w_1^\circ(x), w_2^\circ(x)$ приведены ниже

$x = 0$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$h_1^* = 0$	0.07028	0.09304	0.1052	0.1115	0.1135
$w_1^\circ = 0$	0.3807	0.6547	0.8469	0.9617	1
$w_2^\circ = 0$	0.4058	0.6759	0.8683	0.9648	1
$h_2^* = 0$	0.3274	0.4257	0.4811	0.5106	0.5200
$w_1^\circ = 0$	0.3754	0.6515	0.8457	0.9615	1
$w_2^\circ = 0$	0.3966	0.6703	0.8560	0.9643	1

Вследствие симметрии этих функций относительно точки $x=0.5$, переменная x изменяется от 0 до 0.5, функции $w_1^\circ(x)$, $w_2^\circ(x)$ нормированы: $w_i^\circ(0.5)=1$, $i=1, 2$. Функциям $h_1^\circ(x)$ и $h_2^\circ(x)$ соответствуют объемы $V_1^\circ=2\omega_0$ 0.045198, $V_2^\circ=2p_0^{1/2}$

0.207973. Если вычислить величины V_1° и V_2° в точках пересечения прямой $\omega_0=\text{const}$ с границами областей I и II на фигуре, либо прямой $p_0=\text{const}$ с этими кривыми, иначе говоря, привести величины V_1° , V_2° к одному масштабу, то оказывается, что различие между ними составляет менее 0.3%.

Отсюда следует, что если требуется найти решение оптимизационной задачи (1.5) для параметров ω_0 , p_0 , причем таких, что параметр q удовлетворяет неравенству $B^{1/2} < q < A$ (на фигуре точка (ω_0, p_0) обозначена цифрой 3), то решения $h_1^\circ(x)$, $h_2^\circ(x)$, соответствующие точкам 1 и 2, являются допустимыми, поскольку удовлетворяются ограничения $\omega \geq \omega_0$, $p \geq p_0$. При этом оказывается, что минимальная из величин V_1° , V_2° , вычисленных в точках 1 и 2, превышает минимальный объем V_3° , соответствующий точке 3 менее чем на 0.04%.

Если сравнить оптимальную балку с балкой минимально постоянной толщины, удовлетворяющей условиям $\omega^2 \geq \omega_0^2$, $p \geq p_0$, то выигрыш в весе составит $\sim 10-11\%$.

Автор благодарит Н. В. Баничука и Ф. Л. Черноушко за постановку задачи, ценные указания и обсуждение результатов.

Поступила 30 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurensia, 1770-1773, t. 5.
2. Clausen T. Über die Form architektonischer Säulen. Bull. phys-math. et astron. de l'Acad. de St.-Peterbourg, 1854, t. 1.
3. Tadjbakhsh I., Keller J. B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1.
4. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
5. Nordson F. I. On the optimal design of a vibrating beam. Quart. Appl. Math., 1965, vol. 23, No. 1.
6. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969.
7. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.
8. Сейранян А. П. Упругие пластины и балки минимального веса при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
10. Миллин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.