**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1976**

УДК 539.3:534.1

# НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

А. И. ЛИХОДЕД

*(Москва)*

Исследуются нелинейные колебания и устойчивость ортотропных оболочек вращения с включениями типа сосредоточенных масс. Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке.

Для получения уравнений движения используется вариационный принцип Лагранжа в сочетании с методом Ритца. В качестве базисных функций для задачи о вынужденных нелинейных колебаниях используются собственные функции соответствующей линейной задачи. Построена схема расчета, позволяющая унифицировать получение блоков коэффициентов разрешающих уравнений для оболочек с сосредоточенными включениями, избегая при этом трудоемких вычислений.

Задача о собственных колебаниях оболочек с сосредоточенными включениями рассматривалась в [1]. Здесь предлагается видоизменение указанной задачи, позволяющее упростить использование собственных функций для задачи о вынужденных колебаниях.

1. Представим нормальное и тангенциальные перемещения оболочки в виде

$$u^{(k)}=\sum_{i=1}^{N} C_i Y_i^{(k)} \qquad (N=N_1+N_2+N_3) \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1}$$

$$Y_i^{(1)}=X_i^{(1)} \quad (1\leqslant i\leqslant N_2), \quad Y_i^{(2)}=X_i^{(2)} \quad (N_1+1\leqslant i\leqslant N_1+N_2)$$

$$Y_i^{(3)}=X_i^{(3)} \quad (N_1+N_2+1\leqslant i\leqslant N)$$

В остальных случаях $Y_i^{(k)}=0$. Здесь $C_i$ — обобщенные координаты задачи о собственных колебаниях; $N_1$, $N_2$ и $N_3$ — количество обобщенных координат, соответствующее меридиональному, кольцевому и нормальному перемещениям, $Y_i^{(k)}$ — базисные функции. Такое представление перемещений позволяет перестроить три подпоследовательности обобщенных координат для соответствующих компонент перемещений в одну последовательность $C_i$ и унифицировать выражения для относительных деформаций.

С учетом (1.1) относительные деформации примут вид

$$e_p=\sum_{i=1}^{N} C_i\Phi_{pi} \qquad (p=1,2,\ldots,6) \tag{1.2}$$

Здесь $\Phi_{pi}$ выражаются через базисные функции $\Phi_{pi}=\Phi_{pi}(Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}, Y_i^{(3)})$ (функции $\Phi_{pi}$ приведены в [1]).

Представим потенциальную энергию ортотропной оболочки [2] в виде

$$\Pi=\int\limits_S \sum_{p,q=1}^{6} a_{pq}e_pe_q\,dS \tag{1.3}$$

$$a_{11}={}^1/_2,\quad a_{12}=\nu_1E_2/E_1,\quad a_{22}=E_2/2E_1,\quad a_{33}=E_3/2E_1(1-\nu_1\nu_2)$$
$$a_{44}=h^2/24,\quad a_{45}={}^1/_{12}h^2a_{12},\quad a_{55}={}^1/_{12}h^2a_{22},\quad a_{66}={}^1/_3h^2a_{33}$$

Остальные коэффициенты $a_{ij}$ равны нулю ($E_1$, $E_2$, $E_3$, $\nu_1$, $\nu_2$ — механические характеристики материала оболочки, $h$ и $S$ — толщина и поверхность оболочки).

Используя метод Ритца, с учетом (1.2) и (1.3) получаем характеристическую систему для определения частот и форм колебания

$$\sum_{i=1}^{N}C_i(\varphi_{ij}-\lambda^2\psi_{ij})=0,\quad \lambda^2=\frac{\omega^2\rho R^2(1-\nu_1\nu_2)}{E}\quad (j=1,2,\ldots,N) \tag{1.4}$$

В случае гладкой ортотропной оболочки коэффициенты системы (1.4) имеют вид

$$\varphi_{ij}=\int\limits_S\sum_{p,q=1}^{6}b_{pq}\Phi_{pj}\Phi_{qi}\,dS,\quad b_{pq}=a_{pq}+a_{qp},\quad \psi_{ij}=\psi_{ij}^{(1)}=\frac{1}{R^2}\int\limits_S\sum_{k=1}^{3}Y_i^{(k)}Y_j^{(k)}\,dS \tag{1.5}$$

При наличии связанных с оболочкой $N_0$ сосредоточенных масс $M^{(n)}$ с координатами $z^{(n)}$ коэффициенты системы $\varphi_{ij}$ не изменяются, а к коэффициентам системы $\psi_{ij}$ добавляются слагаемые $\psi_{ij}=\psi_{ij}^{(1)}+\psi_{ij}^{(2)}$, где

$$\psi_{ij}^{(2)}=\sum_{n=1}^{N_0}\frac{M^{(n)}}{\rho hR^2}\sum_{k=1}^{3}Y_i^{(k)}(z^{(n)})Y_j^{(k)}(z^{(n)})$$

$\rho$ — плотность материала оболочки, $R$ — характерный размер.

Введение унифицированных представлений для перемещений (1.1) и деформаций (1.2), а также использование потенциальной энергии в виде (1.3) позволило получить коэффициенты характеристической системы (1.4) в компактной форме, удобной для численной реализации на ЭВМ. Следует отметить, что при указанном здесь подходе введение в оболочечную конструкцию дополнительных элементов (подкреплений, осцилляторов и т. п.) не приводит к существенному усложнению расчета коэффициентов характеристической системы.

2. Рассмотрим нелинейные колебания ортотропной оболочки вращения с сосредоточенными массами. Оболочка может обладать начальной погибью. Для получения уравнений движения воспользуемся вариационным принципом Лагранжа.

$$\delta\Pi=\delta\Pi_1+\delta\Pi_2+\delta\Pi_3 \tag{2.1}$$

где $\Pi$ — потенциальная энергия системы, $\Pi_1$, $\Pi_2$ и $\Pi_3$ — работа инерционных, диссипативных и внешних сил соответственно.

Будем искать полные перемещения оболочки (включающие начальную погибь) в виде разложения по собственным формам колебания соответствующей линейной задачи (п. 1)

$$v^{(k)}=\sum_{i=1}^{N}T_iu_i^{(k)}\quad (k=1,2,3) \tag{2.2}$$

Здесь $T_i$ — обобщенные координаты; $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $u_i^{(3)}$ — меридиональное, окружное и нормальное перемещения $i$-го тона колебаний оболочки.

Представим относительные деформации с учетом нелинейных членов нормального перемещения [3] и начальной погиби в нормальном направлении $w_0$ в следующем унифицированном виде:

$$e_p{}^* = \sum_{i=1}^{N} T_i e_{pi} + \sum_{i_1 i_2=1}^{N} T_{i_1} T_{i_2} \Pi_{i_1 i_2}^{(p)} + f_p \quad {\scriptstyle (p=1,2,3\ldots6)} \tag{2.3}$$

где $e_{pi}=e_{pi}(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)})$ линейные деформации $i$-го тона колебаний, получаемые из формул для относительных деформаций [2] путем подстановки в них перемещений $i$-го тона колебаний.

Коэффициенты $\Pi_{i_1 i_2}^{(p)}$ порождаются нелинейными членами и представимы в следующей форме:

$$\Pi_{i_1 i_2}^{(1)} = \frac{1}{2A_1^2}\frac{\partial u_{i_1}^{(3)}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial u_{i_2}^{(3)}}{\partial \alpha_1}, \qquad \Pi_{i_1 i_2}^{(2)} = \frac{1}{2A_2^2}\frac{\partial u_{i_1}^{(3)}}{\partial \alpha_2}\frac{\partial u_{i_2}^{(3)}}{\partial \alpha_2}$$

$$\Pi_{i_1 i_2}^{(3)} = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial u_{i_1}^{(3)}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial u_{i_2}^{(3)}}{\partial \alpha_2}, \qquad \Pi_{i_1 i_2}^{(p)} = 0 \quad {\scriptstyle (p=4,5,6)} \tag{2.4}$$

Функции $f_p$, определяемые начальной погибью $w_0$, имеют вид

$$f_1 = \frac{w_0}{R_1} - \frac{1}{2A_1^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}\right)^2, \qquad f_2 = \frac{w_0}{R_2} - \frac{1}{2A_2^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}\right)^2$$

$$f_3 = -\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}, \qquad f_p = 0 \quad {\scriptstyle (p=4,5,6)} \tag{2.5}$$

В (2.4) и (2.5) $A_1$, $A_2$, $R_1$, $R_2$ — параметры Ляме и радиусы кривизны оболочки.

Представляя потенциальную энергию, как и в случае задачи о собственных колебаниях, в виде квадратичной формы (1.3) и выполняя варьирование, будем иметь

$$\delta\Pi = \gamma \sum_{j=1}^{N} \left[ \frac{\omega_j^2}{\gamma} m_j T_j + W_j(T_1, \ldots, T_N) + L_j^{(1)} + \sum_{i=1} L_{ji}^{(2)} T_i \right] \delta T_j \tag{2.6}$$

Здесь $\gamma = E_1 h/(1-\nu_1\nu_2)$, $\omega_j$ и $m_j$ — частота и приведенная масса $j$-го тона колебаний оболочки с массой. Через $W_j$ обозначены нелинейные члены

$$W_j(T_1, \ldots, T_N) = \sum_{i_1 i_2=1}^{N} \Omega_{j,i_1,i_2}^{(1)} T_{i_1} T_{i_2} + \sum_{i_1 i_2 i_3=1}^{N} \Omega_{j i_1 i_2 i_3}^{(2)} T_{i_1} T_{i_2} T_{i_3} \tag{2.7}$$

Коэффициенты в (2.7) имеют структуру, аналогичную (1.5)

$$\Omega_{j i_1 i_2}^{(1)} = \int_S \sum_{p,q=1}^{6} b_{pq} \left( e_{qj} \Pi_{i_1 i_2}^{(p)} + e_{p i_1} \Pi_{i_2 j}^{*(q)} \right) dS \tag{2.8}$$

$$\Omega_{j i_1 i_2 i_3}^{(2)} = \int_S \sum_{p,q=1}^{6} b_{pq} \Pi_{i_1 i_2}^{(p)} \Pi_{i_3 j}^{*(q)} dS, \qquad \Pi_{ij}^{*(k)} = \Pi_{ij}^{(k)} + \Pi_{ji}^{(k)}$$

Два последних слагаемых в (2.6) обусловлены начальными неправильностями, причем коэффициенты также имеют структуру, аналогичную (1.5)

$$L_j^{(1)}=\int\limits_S\sum_{p,q=1}^{6}b_{pq}f_pe_{qj}\,dS,\qquad L_{ji}^{(2)}=\int\limits_S\sum_{p,q=1}^{6}b_{pq}f_p\Pi_{ij}^{*(q)}\,dS \tag{2.9}$$

В (2.8) и (2.9) $b_{pq}$ — коэффициенты потенциальной энергии оболочки (1.5). Вариация работы инерционных и диссипативных сил такова:

$$\delta\Pi_1+\delta\Pi_2=-\sum_{j=1}(T_j^{\cdot\cdot}+\varepsilon_jT_j^{\cdot})m_j\delta T_j \tag{2.10}$$

где $\varepsilon_j$ — коэффициент вязкости. При получении вариации потенциальной энергии и работы инерционных сил учитывалась ортогональность собственных форм колебаний.

Вариация работы внешних сил и проекций на нормаль усилий безмоментного докритического состояния имеет вид

$$\delta\Pi_3=\sum_{j=1}^{N}F_j^{(1)}\delta T_j+\sum_{i,j=1}^{N}F_{ji}^{(2)}T_i\delta T_j,\qquad F_j^{(1)}=\sum_{n=1}^{3}\int\limits_S P^{(n)}u_j^{(n)}\,dS \tag{2.11}$$

$$F_{ji}^{(2)}=-\int\limits_S\Bigg[\left(\frac{N_1^{(0)}}{A_1}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_1}+\frac{N_{12}^{(0)}}{A_2}\frac{\partial u_i^{(3)}}{\partial\alpha_2}\right)\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_i^{(3)}}{\partial\alpha_1}+$$

$$+\left(\frac{N_2^{(0)}}{A_2}\frac{\partial u_i^{(3)}}{\partial\alpha_2}+\frac{N_{12}^{(0)}}{A_1}\frac{\partial u_i^{(3)}}{\partial\alpha_1}\right)\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_j^{(3)}}{\partial\alpha_2}\Bigg]dS$$

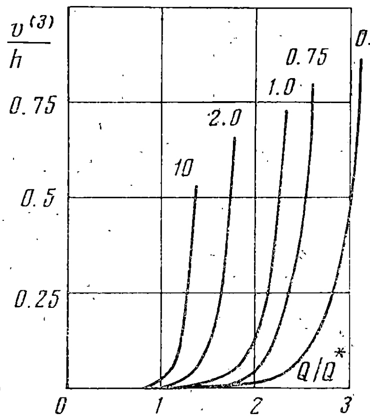
где $P_1$, $P_2$, $P_3$ — внешние поверхностные силы, $N_1^{(0)}$, $N_2^{(0)}$, $N_{12}^{(0)}$ — усилия докритического безмоментного состояния в нейтральной поверхности.

Подставляя (2.6), (2.10), (2.11) в вариационное уравнение (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, получаем уравнения движения для обобщенных координат

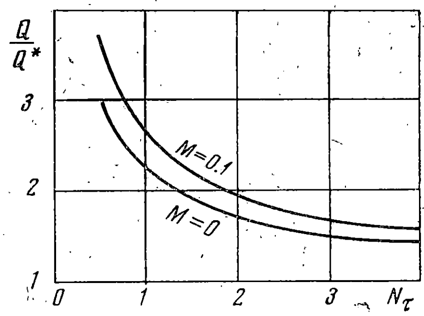
$$T_j^{\cdot\cdot}+\varepsilon_jT_j^{\cdot}+\omega_j^2T_j-\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{N}(F_{ji}^{(2)}-\gamma L_{ji})T_i+$$

$$+\frac{\gamma}{m_j}W_j(T_1,\ldots,T_N)=\frac{1}{m_j}(F_j^{(1)}-\gamma L_j^{(1)})\qquad (j=1,2,\ldots,N) \tag{2.12}$$

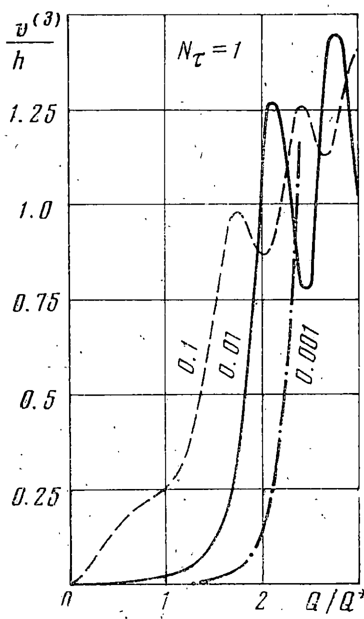
Отметим некоторые особенности системы (2.12). Использование в качестве базисных функций собственных функций линейной задачи позволило получить систему уравнений, разрешенную относительно вторых производных $T_j^{\cdot\cdot}$, что облегчает применение к ее решению численных методов. При этом решение задачи о вынужденных колебаниях удовлетворяет граничным условиям с той степенью точности, что и собственные функции линейной задачи. Коэффициенты системы (2.12) имеют однотипную структуру и легко поддаются алгоритмизации. При выводе уравнений (2.12) учитывались нормальные и тангенциальные силы инерции.



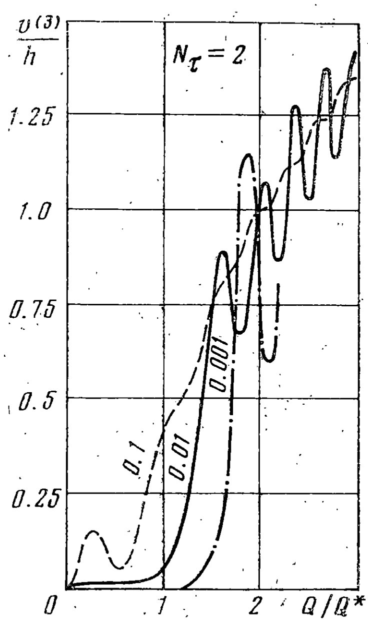

Фиг. 1




Фиг. 4




Фиг. 2




Фиг. 3

3. В качестве примера рассматривалось движение гладкой цилиндрической оболочки с шарнирно подвижными краями и оболочки с сосредоточенной массой, находящихся под действием осевой сжимающей силы, меняющейся во времени. Система уравнений для определения обобщенных координат (2.12) решалась численно методом Кутта – Мерсона. Для удобства выбора скорости нагружения вводилось безразмерное время $t^*=t/\tau$, где $t$ – физическое время, $\tau$ – период низшего тона колебаний оболочки.

На фиг. 1 показано изменение нормального прогиба гладкой оболочки $v^{(3)}/h$ в зависимости от отношения $Q/Q^*$, где $Q$ – сжимающая сила, меняющаяся во времени от нуля по линейному закону, $Q^*$ – верхняя критическая сила для статического нагружения. Числами на графиках показано количество периодов колебания $N_\tau$, за которое осевая сжимающая сила возрастает до $Q^*$. Расчет гладкой оболочки проводился для начальной неправильности $w_1=w_0/h$

$$w_1=0.001 \sin(\pi\alpha_1/l) \cos 4\alpha_2 \tag{3.1}$$

соответствующей по форме низшему тону колебаний оболочки. Задача решалась с нулевыми начальными данными относительно полных перемещений и скоростей. Параметры оболочки: $l/R=5.6$, $R/h=380$.

Из фиг. 1 видно, что с увеличением скорости нарастания нагрузки момент наступления бурного роста прогиба наступает позже; кроме того, при более быстром нагружении наблюдается более глубокое прощелкивание оболочки. При времени нарастания нагрузки $N_\tau=10$ величина нагрузки, соответствующей прощелкиванию оболочки, близка к верхней критической $Q^*$.

Исследовалось влияние различных по форме неправильностей и числа тонов колебания, используемых в решении, на характер развития прогибов гладкой оболочки. Начальная неправильность задавалась в виде суммы косинусоид, соответствующих трем низшим тонам колебаний

$$w_1=0.001 \sin (\pi\alpha_1/l) (\cos 4\alpha_2+\cos 5\alpha_2+\cos 6\alpha_2) \tag{3.2}$$

При этом в решении использовались один, три и пять тонов колебания.

Отметим, что для рассмотренных случаев $N_\tau=1\div10$ разница в величине нагрузки, при которой начинается бурное развитие прогиба, слабо зависит от числа тонов колебаний, используемых в решении, и формы неправильности (3.1) или (3.2) (разница лежит в пределах $3\div7\%$). Определяющим здесь является наличие в решении и в форме начальной погиби члена, соответствующего форме низшего тона колебаний. Существенное различие в перемещениях наблюдается только в закритической области.

На фиг. 2,3 показано сравнительное развитие прогибов гладкой оболочки для начальной погиби типа (3.1) с различными максимальными амплитудами 0.1, 0.01, 0.001 при одинаковой скорости нарастания сжимающей силы (амплитуды указаны на графиках). Фиг. 2 соответствуют скорости нарастания $N_\tau=1$, фиг. 3 – $N_\tau=2$. Следует отметить, что при большой начальной погиби, равной 0.1, даже с учетом динамичности при $N_\tau=2$ бурное развитие прогиба наступает ниже верхней критической нагрузки $Q^*$.

Исследовалось движение оболочки с сосредоточенной массой. На фиг. 4 для сравнения даны зависимости условной критической силы $Q/Q^*$ от скорости нагружения для гладкой оболочки $M=0$ и оболочки с сосредоточенной массой (в обоих случаях $N_\tau$ – количество периодов низшего тона колебаний гладкой оболочки, за которое нагрузка возрастает до $Q^*$). Масса $M=0.1\ M_1$ располагалась посреди образующей оболочки ($M_1$ – масса оболочки). В качестве условной критической нагрузки $Q/Q^*$ принята нагрузка, при которой достигается половина стрелы прощелкивания оболочки. Начальная неправильность задавалась в форме (3.1).

Из фиг. 4 видно, что наличие связанной с оболочкой массы при достаточно быстром нагружении $N_\tau=0.5\div4$ оказывает стабилизирующее действие на несущую способность оболочки. При сравнительно медленном нагружении ($N_\tau$ выше десяти) эффект наличия массы практически не сказывается, и величина критической нагрузки приближается к критической нагрузке $Q^*$ оболочки без массы для статического случая.

Поступила 22 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лиходед А. И., Малинин А. А.* Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.