МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1976

УДК 531.36

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ «ТИПА МАЯТНИКА» ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Л. Д. АКУЛЕНКО, Ю. Р. РОЩИН

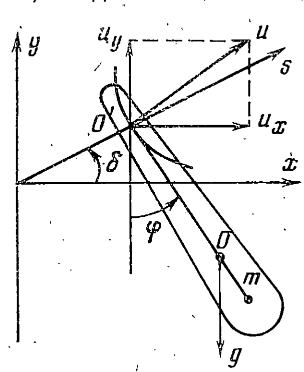
(Москва)

Проводится асимптотическое исследование задачи оптимального управления колебаниями и вращениями плоского маятника. В качестве управляющего воздействия берется ускорение точки подвеса. В частности, рассмотрен случай, когда ускорение направлено вдоль прямой, наклоненной под произвольным углом к горизонту. При этом предполагается, что управление мало по сравнению с ускорением сил тяжести, а временной интервал так велик, что энергия колебаний или вращений успевает измениться существенно.

1. Постановка задачи. Исследуется вначале управляемое движение системы, изображенной на фиг. 1, для случая, когда точка подвеса перемещается вдоль прямой $O's$. Уравнение движения математического маятника имеет вид

$$\varphi^{\cdot\cdot}+gl^{-1}\sin\varphi=-s^{\cdot\cdot}l^{-1}\cos(\varphi-\delta),\qquad \varphi(t_0)=\varphi_0,\qquad \varphi^{\cdot}(t_0)=\varphi_0^{\cdot}\qquad(1.1)$$

Здесь φ — угловое отклонение от вертикали, t_0, φ_0, $\varphi_0^{\cdot}$ — начальные данные, l — длина маятника, предполагаемая постоянной, g — ускорение сил тяжести, $s^{\cdot\cdot}$ — ускорение точки подвеса вдоль направляющей, наклоненной под углом δ к горизонту. Предполагается, что величина задаваемого ускорения удовлетворяет условию $|s^{\cdot\cdot}|\leqslant w\ll g$.



Фиг. 1

Введением безразмерной независимой переменной $\theta=(g/l)^{1/2}t$ уравнение (1.1) приводится к виду

$$\varphi''+\sin\varphi=-\varepsilon u\cos(\varphi-\delta),\qquad \varphi(\theta_0)=\varphi_0$$
$$\varphi'(\theta_0)=(l/g)^{1/2}\varphi_0^{\cdot}\qquad(1.2)$$

Здесь введено обозначение $\varepsilon u=s^{\cdot\cdot}/g=s''/l$, где ε — малый параметр, а $u\sim1$. Из уравнения следует, что если в качестве управления берется ускорение точки подвеса, то движение системы от массы маятника m не зависит.

Для удобства дальнейшего исследования совершается переход к переменным «энергия — фаза» при помощи замены $\varphi=\varphi_{(0)}(\psi, E)$, $\varphi'=\varphi_{(0)}'(\psi, E)$, где $\varphi_{(0)}$, $\varphi_{(0)}'$ — известное общее решение порождающего уравнения. Здесь E — энергия колебаний или вращений, деленная на mgl, $\psi=\omega(E)(\theta-\theta_0)+\psi_0$ — фаза, ω — частота. Указанное общее решение может быть записано при помощи эллиптических функций [1-3].

Для новых переменных E, ψ можно получить искомые уравнения на основе известных [1,2] интегралов невозмущенного движения

$$E'=-\varepsilon u\varphi'\cos(\varphi-\delta),\qquad E(\theta_0)=E_0={}^1/{}_2\varphi_0'^2-\cos\varphi_0$$

$$\psi'=\omega(E)-\varepsilon u\varphi'\cos(\varphi-\delta)\int\left(\frac{\omega'}{\varphi'}-\frac{\omega}{\varphi'^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial E}\right)d\varphi,\qquad \psi(\theta_0)=\psi_0$$

$$\Pi(E)=\oint\frac{d\varphi}{\varphi'},\quad \varphi'(E,\varphi)=\pm[2(E+\cos\varphi)]^{1/2}\tag{1.3}$$

Здесь $\varphi'=d\varphi/d\theta$, $\omega'=d\omega/dE$; функция φ' знакопостоянна в случае вращений, т. е. при $E>1$ и меняет знак в точках $\pm\varphi_1=\pm\arccos(-E)$ в режиме колебаний, т. е. при $-1\leqslant E<1$.

Для системы (1.3) ставятся следующие задачи оптимального управления:

1. Задача [3] с фиксированным моментом Θ

$$\pm E(\Theta)\to\min,\qquad |u|\leqslant 1,\qquad \Theta\sim\varepsilon^{-1}\qquad (E\geqslant-1)\tag{1.4}$$

2. Задача типа оптимального быстродействия

$$E(\theta_1)=E_1,\qquad \varepsilon\theta_1\to\min,\qquad |u|\leqslant 1\qquad (E_1\geqslant-1)\tag{1.5}$$

Далее предполагается, что при любом $\varepsilon>0$ поставленные задачи имеют решения. Тогда для них справедлив принцип максимума [4]. Если особые управления отсутствуют, то функция

$$u^*=V(E,\psi,p,q)=$$
$$=\operatorname{sign}\left\{\varphi'\cos(\varphi-\delta)\left[p+q\int\left(\frac{\omega'}{\varphi'}-\frac{\omega}{\varphi'^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial E}\right)d\varphi\right]\right\}=-\operatorname{sign}H^*\tag{1.6}$$

есть оптимальное управление. Здесь p и q — сопряженные E и ψ переменные, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dp}{d\theta}=-\varepsilon\frac{\partial H}{\partial E}\Big|_V-\omega'q=-\varepsilon\frac{\partial H^*}{\partial E}-\omega'q$$
$$\frac{dq}{d\theta}=-\varepsilon\frac{\partial H}{\partial\psi}\Big|_V=-\varepsilon\frac{\partial H^*}{\partial\psi}\tag{1.7}$$

и условиям трансверсальности на правом конце для задач 1 и 2 соответственно

$$1)\ p(\Theta)=\mp1,\qquad q(\Theta)=0$$
$$2)\ p(\theta_1)=-\lambda,\qquad q(\theta_1)=0,\qquad H^*(\theta_1)=1\tag{1.8}$$

Если решения краевых задач, соответствующих 1 и 2, единственны, то они дают решения поставленных задач оптимального управления. Однако в рассматриваемых случаях малых управляющих воздействий на большом $\sim\varepsilon^{-1}$ интервале времени процесса управления имеет место существенная неединственность [3], т. е. краевые задачи принципа максимума допускают много решений, число которых $\sim[\varepsilon^{-1}]$.

2. Приближенное решение задач оптимального управления. Для решения краевых задач в первом приближении по малому параметру ε применяется методика усреднения, развитая в [3]. Нужно отметить, что система (1.3), (1.7) не является стандартной системой с вращающейся фазой [1]. Однако из того факта, что переменная E на всем интервале ограничена, т. е. изменяется со скоростью $\sim\varepsilon$, из второго уравнения (1.7) и из нулевых краевых условий для q (1.8) следует, что $q\sim\varepsilon$, так как среднее значение правой части по ψ указанного уравнения равно нулю. Следовательно, сопряженная переменная p — медленная и к системе (1.3), (1.7) применима методика усреднения по фазе ψ. Так как величина $p\sim1$ и коэффициент при q в (1.6) также порядка единицы, то в первом приближении

$$u^*=-\operatorname{sign}[p\varphi'\cos(\varphi-\delta)] \tag{2.1}$$

т. е. имеет место локальная оптимальность управления. Среднее значение q можно положить равным нулю. В этом случае переменная p сохраняет знак.

В результате для среднего значения энергии ξ получается уравнение первого приближения

$$d\xi/d\tau=\operatorname{sign}\eta\langle|\varphi'\cos(\varphi-\delta)|\rangle,\qquad \xi(\tau_0)=E_0 \tag{2.2}$$

Здесь $\tau=\varepsilon\theta$, η — среднее значение p, а угловые скобки означают усреднение по ψ при фиксированных других аргументах.

Если ставится задача 1, то $\operatorname{sign}\eta=\mp1$; для задачи быстродействия 2 $\operatorname{sign}\eta=\operatorname{sign}(E_1-E_0)$. Второй сомножитель в правой части уравнения (2.2) в режиме вращений, т. е. при $\xi>1$ ($\varphi'\geqslant\mathrm{const}>0$), определяется соотношением

$$I_r(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi'\cos(\varphi-\delta)|\,d\psi=\frac{1}{\Pi_r(\xi)}\int\limits_0^{\Pi_r}|\cos(\varphi-\delta)|\varphi'\,d\theta=$$

$$=\frac{\omega_r(\xi)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\delta)|\,d(\varphi-\delta)=\frac{2}{\pi}\omega_r(\xi)=\frac{2}{rK(r)} \tag{2.3}$$

Здесь $r=[2/(\xi+1)]^{1/2}<1$ — модуль эллиптического интеграла первого рода K, $\Pi_r(\xi)=2\pi/\omega_r$ — период вращательного движения. Важно отметить, что функция I_r не зависит от параметра задачи δ.

В режиме колебаний, т. е. при $-1\leqslant\xi<1$, скорость φ' изменяет знак в точках $\pm\varphi_1=\pm\arccos(-\xi)$. Функция $I_v(\xi,\delta)$ определяется соотношением

$$I_v(\xi,\delta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\delta)||\varphi'|\,d\psi=$$

$$=\frac{2}{\Pi_v(\xi)}\int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1}|\cos(\varphi-\delta)|\,d\varphi=\frac{2}{\Pi_v(\xi)}\int\limits_{-\varphi_1-\delta}^{\varphi_1-\delta}|\cos x|\,dx \tag{2.4}$$

Здесь $\Pi_v(\xi)$ — период колебаний, $\Pi_v=4K(v)$, $v=[(\xi+1)/2]^{1/2}<1$ — модуль. В общем случае выражение для функции I_v имеет довольно громоздкий вид; разложением $|\cos x|$ в ряд Фурье для нее можно получить выражение

$$I_v(\xi,\delta)=\frac{8}{\pi\Pi_v(\xi)}\left[\varphi_1(\xi)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j(4j^2-1)}\sin 2j\varphi_1(\xi)\cos 2j\delta\right] \tag{2.5}$$

Следует отметить, что функции $I_{r,v}$ строго положительны для $\xi\in(-1,1)$ и $\xi>1$ при любых δ; I_v периодична по δ с постоянным периодом, равным π.

При помощи выражений (2.3) — (2.5) может быть построено искомое решение, так как уравнение (2.2) допускает разделение переменных

$$\int\limits_{E_0}\frac{d\xi'}{I(\xi',\delta)}=(\tau-\tau_0)\operatorname{sign}\eta,\qquad \xi\in[E_0,\xi^*],\qquad \tau\in[\tau_0,\tau^*] \tag{2.6}$$

Здесь для задачи 1 с функционалом (1.4) $\xi^*=E_{\max}+O(\varepsilon)$ или $\xi^*=E_{\min}+O(\varepsilon)$, $\tau^*=\varepsilon\Theta$, согласно (1.8). Для задачи быстродействия (1.5) $\xi^*=E_1$, $\tau^*=\varepsilon\theta_{1\min}+O(\varepsilon)$. Формула (2.6) связывает конечные значения ξ и τ: $\Phi(\xi^*, \tau^*, \delta)=0$. Таким образом, приближенные решения поставленных задач можно считать построенными.

Представляет интерес исследовать зависимость $\xi^*(\delta)$ для задачи с фиксированным временем и $\tau^*(\delta)$ для задачи быстродействия. Во-первых. эти функции периодичны по δ с периодом, равным π, и непрерывно дифференцируемы в рассматриваемых областях. Далее, в режиме вращения при E_0, $\xi^*>1$ на основании (2.3) функция I_r от δ не зависит. Поэтому величины ξ^* и τ^* для задач (1.4) и (1.5) соответственно от δ также не зависят.

Пусть теперь $-1<E_0$, $\xi^*<1$, т. е. рассматривается режим колебаний; тогда для непрерывных производных $d\xi^*/d\delta$ и $d\tau^*/d\delta$ можно получить выражения

$$\frac{d\xi^*}{d\delta}=I(\xi^*,\delta)\int\limits_{E_0}^{\xi^*}\frac{\partial I}{\partial\delta}I^{-2}(\xi,\delta)\,d\xi$$

$$\frac{d\tau^*}{d\delta}=-\operatorname{sign}(E_1-E_0)\int\limits_{E_0}^{E_1}\frac{\partial I}{\partial\delta}I^{-2}(\xi,\delta)\,d\xi \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что при $\delta=0$, $\pi/2$ указанные производные обращаются в нуль, так как

$$\frac{\partial I}{\partial\delta}=\frac{2}{\Pi_v(\xi)}\left[|\cos(\varphi_1+\delta)|-|\cos(\varphi_1-\delta)|\right] \tag{2.8}$$

Таким образом, точки $\delta=0$, $\pi/2$ являются подозрительными на экстремум. Дифференцируя полученные кусочно-гладкие функции еще раз по δ, находим, что знак второй производной

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\delta^2}=-\frac{2}{\Pi_v(\xi)}\left[\sin(\varphi_1+\delta)\operatorname{sign}\cos(\varphi_1+\delta)+\sin(\varphi_1-\delta)\operatorname{sign}\cos(\varphi_1-\delta)\right] \tag{2.9}$$

определяется величиной в квадратных скобках.

Для подозрительной точки $\delta=0$ на основании (2.9) получается выражение

$$I_{\delta^2}''(\xi,0)=-4\Pi_v^{-1}(\xi)\sin\varphi_1\operatorname{sign}\cos\varphi_1$$

из которого следует, что $I_{\delta^2}''(\xi,0)<0$ для $0<\varphi_1<\pi/2$ $(-1<E_0,\ \xi^*<0)$ и $I_{\delta^2}''(\xi,0)>0$ для $\pi/2<\varphi_1<\pi$ $(0<E_0,\ \xi^*<1)$. Таким образом, функции $\xi^*(\delta)$ и $\tau^*(\delta)$ минимальны или максимальны по δ при $\delta=0$, если ξ изменяется в указанных пределах, а максимальное и минимальное значения функции $I(\xi,\delta)$ равны

$$\max_\delta I(\xi,\delta)=I(\xi,0)=4\Pi_v^{-1}(\xi)\sin\varphi_1(\xi)=4\Pi_v^{-1}(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\qquad(-1<\xi<0)$$

$$\min_\delta I(\xi,\delta)=I(\xi,0)=4\Pi_v^{-1}(\xi)(2-\sin\varphi_1(\xi))=4\Pi_v^{-1}(\xi)(2-\sqrt{1-\xi^2})$$
$$(0<\xi<1) \tag{2.10}$$

Аналогично для подозрительной точки $\delta=\pi/2$ на основании (2.9) получается выражение

$$I_{\delta^2}''(\xi,\pi/2)=4\Pi_v^{-1}(\xi)\cos\varphi_1\operatorname{sign}\sin\varphi_1$$

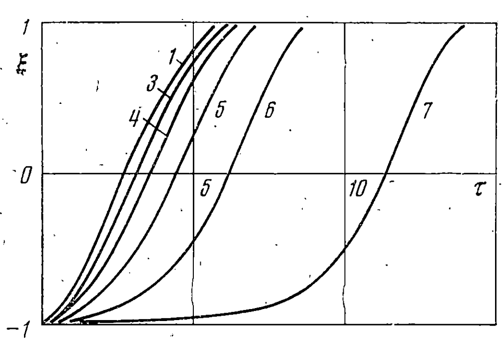
из которого следует, что $I_{\delta^2}''(\xi,\pi/2)<0$ для $\pi/2<\varphi_1<\pi$ $(0<E_0,\ \xi^*<1)$ и $I_{\delta^2}''(\xi,\pi/2)>0$ для $0<\varphi_1<\pi/2$ $(-1<E_0,\ \xi^*<0)$. Таким образом, функции ξ^* и τ^* минимальны или максимальны по δ при $\delta=\pi/2$, если переменная ξ изменяется в указанных (дополнительных к предыдущим) областях, а максимальное и минимальное значения функции $I(\xi,\delta)$ равны соотвественно

$$\max_{\delta} I(\xi,\delta)=I(\xi,\pi/2)=4\Pi_v^{-1}(\xi)(1-\cos\varphi_1)=4\Pi_v^{-1}(\xi)(1+\xi)\quad(0<\xi<1)$$

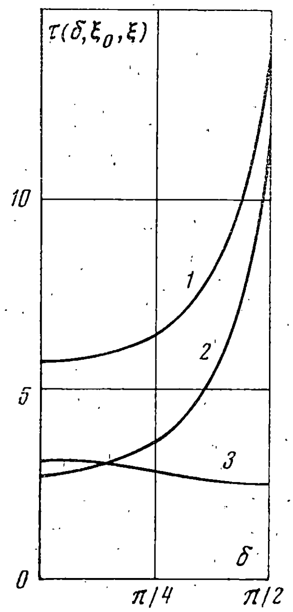
$$\min_{\delta} I(\xi,\delta)=I(\xi,\pi/2)=4\Pi_v^{-1}(\xi)(1-\cos\varphi_1)=4\Pi_v^{-1}(\xi)(1+\xi)\quad(-1<\xi<0)\tag{2.11}$$

Можно убедиться, что $I(\xi,0)>I(\xi,\pi/2)$ для $-1<\xi<0$ и $I(\xi,\pi/2)>I(\xi,0)$ для $0<\xi<1$.

На фиг. 2, 3 приведены графические зависимости для режима колебаний $(-1<\xi<1)$, полученные путем численного счета по формуле (2.6). На фиг. 2 приведена зависимость «энергии» ξ от «медленного времени» τ для различных значений угла δ с интервалом $\Delta\delta=\pi/12$. Кривая *1* соответствует $\delta=0$, а кривая *7* – значению $\delta=\pi/2$. Кривая с $\delta=\pi/12$ практически сливается с первой и поэтому не изображена. Началу кривых $(\tau=0)$ соответствует значение $\xi_0=-0.999$, т. е. «нижнее положение равновесия». Концу кривых отвечает значение $\xi=0.999$ и значение времени τ^*, равное времени быстродействия из состояния покоя в режим вращения. Приведенные графики на фиг. 2 обращением времени дают также решение задачи оптимального быстродействия торможения колебаний. На фиг. 3 приводятся зависимости $\tau^*(\delta,\xi_0,\xi)$ времен оптимального быстродействия из точки ξ_0 в точку ξ как функции угла δ. Так, кривая *1* описывает зависимость от δ времени оптимального быстродействия из «нижнего в верхнее» положения равновесия, т. е. функцию $\tau(\delta,-0.999,0.999)$. Далее, кривые *2* и *3* определяют зависимости времен быстродействия из «нижнего» положения равновесия в состояние с $\xi=0$ и из состояния $\xi_0=0$ в «верхнее» неустойчивое положение равновесия, т. е. функции $\tau(\delta,-0.999,0)$ и $\tau(\delta,0,0.999)$ соответственно. Кривая *1* получается сложением кривых *2* и *3*.



Фиг. 2

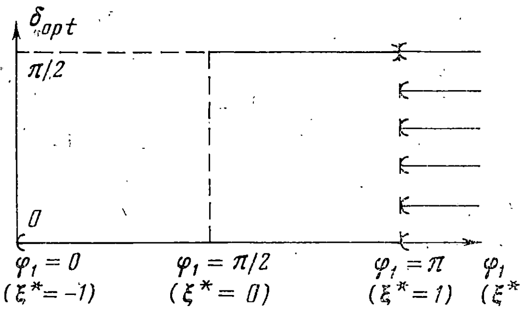


Фиг. 3

Для режима вращений графические зависимости с точностью до линейного преобразования медленного времени τ совпадают с полученными в [3] для системы: $\ddot{x}+\sin x=\varepsilon u,\ |u|\leqslant 1$.

Из изложенного выше можно сделать следующий качественный вывод. В режиме вращений $(\xi>1)$ в первом приближении эффективность управления (2.1) не зависит от $\delta=\mathrm{const}$. В режиме колебаний $(-1<\xi<1)$, когда амплитуда колебаний велика ($0<\xi<1$, т. е. $\pi/2<\varphi_1<\pi$), управляющее воздействие должно быть направлено вертикально ($\delta_{opt}=\pi/2$). Наоборот, если амплитуда колебаний невелика ($-1<\xi<0$, т. е. $0<\varphi_1<\pi/2$), то эффективность оптимального управления наибольшая, если точка подвеса движется горизонтально ($\delta_{opt}=0$) (см. фиг. 4). Случай переменного параметра δ не исследовался.

Отметим, что к аналогичной задаче приводится задача оптимального управления движением физического маятника, ось качания и вращения которого может перемещаться параллельно самой себе вдоль направляющей $O's$, наклоненной под углом δ к горизонту, как это изображено на фиг. 1.



Фиг. 4

Действительно, уравнение движения системы имеет вид

$$(J+ml^2)\varphi^{\cdot\cdot}+mgl\sin\varphi=-mls^{\cdot\cdot}\cos(\varphi-\delta) \quad (2.12)$$

Здесь J — момент инерции тела относительно оси O, проходящей через центр масс, параллельно оси O', m — масса маятника, $l>0$ — плечо. В (2.12) может быть введена безразмерная независимая переменная $\theta=[g/(l+J/ml)]^{1/2}t$ и малое управляющее воздействие $\varepsilon u=s^{\cdot\cdot}g^{-1}=s''(l+J/ml)^{-1}$, где $|u|\leqslant 1$. В результате получается уравнение (1.2), для которого можно поставить и решить в первом приближении аналогичные задачи оптимального управления.

3. Обобщение задачи управления. Пусть теперь точка подвеса плоского физического маятника может перемещаться в плоскости качания произвольно: $x_0=x_0(t)$, $y_0=y_0(t)$ (см. фиг. 1). Тогда уравнение движения имеет вид

$$(J+ml^2)\varphi^{\cdot\cdot}+mgl\sin\varphi=-ml(y_0^{\cdot\cdot}\sin\varphi+x_0^{\cdot\cdot}\cos\varphi)$$

При помощи использовавшихся выше замен можно получить

$$\varphi''+\sin\varphi=-\varepsilon(u_y\sin\varphi+u_x\cos\varphi) \quad (3.1)$$

Здесь $l>0$, а $\varepsilon u_y=y_0^{\cdot\cdot}g^{-1}=y_0''(l+J/ml)$, $\varepsilon u_x=x_0^{\cdot\cdot}g^{-1}=x_0''/(l+J/ml)$ — малые управляющие воздействия по осям y и x соответственно.

Уравнение для энергии $E=\varphi'^2/2-\cos\varphi$ имеет вид

$$E'=-\varepsilon\varphi'(u_y\sin\varphi+u_x\cos\varphi), \qquad E(\theta_0)=E_0 \qquad (E_0\geqslant-1) \quad (3.2)$$

Ставятся задачи оптимального управления типа (1.4), (1.5)

$$\pm E(\Theta)\to\min, \qquad \Theta\sim1/\varepsilon; \qquad E(\theta_1)=E_1, \qquad \varepsilon\theta_1\to\min \quad (3.3)$$

с геометрическими ограничениями на вектор управления $\{u_x, u_y\}$ двух типов

$$|u_x|\leqslant u_{x0}, \qquad |u_y|\leqslant u_{y0} \quad (3.4)$$

$$a^2u_x^2+b^2u_y^2\leqslant u_0^2, \qquad a, b\neq0$$

$$u_x=(\rho/a)\cos\alpha, \qquad u_y=(\rho/b)\sin\alpha \qquad (0\leqslant\rho\leqslant u_0, \ 0\leqslant\alpha\leqslant2\pi) \quad (3.5)$$

Соответствующие усредненные уравнения в медленном времени могут быть записаны при помощи построенной в п. 2 функции I.

Для задач (3.2) — (3.4) приближенное оптимальное управление равно

$$u_x^*=-u_{x0}\,\mathrm{sign}\,(p\varphi'\cos\varphi),\qquad u_y^*=-u_{y0}\,\mathrm{sign}\,(p\varphi'\,\mathrm{sign}\,\varphi) \tag{3.6}$$

Здесь $\mathrm{sign}\,p$ определяется так же, как и в уравнении (2.2). В режиме вращения получается следующее усредненное уравнение (см. (2.3)):

$$\xi'=\mathrm{sign}\,\eta 2\pi^{-1}\omega_r(\xi)\,(u_{y0}+u_{x0})=2(u_{y0}+u_{x0})r^{-1}K^{-1}(r)\,\mathrm{sign}\,\eta,\quad \xi(\tau_0)=E_0 \tag{3.7}$$

В режиме колебаний усредненное уравнение имеет вид (см. (2.10), (2.11))

$$\xi'=[I(\xi,\pi/2)u_{y0}+I(\xi,0)u_{x0}]\,\mathrm{sign}\,\eta\qquad(-1<\xi,\ E_0<1) \tag{3.8}$$

Из построенных уравнений следует, что при $u_{x0}=u_{y0}=1$ рассматриваемое управление более эффективно, чем в случае (2.12).

Для задачи с ограничениями (3.5) усредненное уравнение имеет вид

$$\xi'=L(\xi)\,\mathrm{sign}\,\eta,\quad L(\xi)=u_0\langle|\varphi'|\,(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\rangle \tag{3.9}$$

Приближенное оптимальное управление находится также в виде синтеза

$$\begin{aligned} u_x^* &= -u_0(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\cos\varphi\,\mathrm{sign}\,\eta\\ u_y^* &= -u_0(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\sin\varphi\,\mathrm{sign}\,\eta \end{aligned} \tag{3.10}$$

В режиме вращений величина правой части (3.9) равна

$$L_r(\xi)=\frac{4u_0}{a\Pi_r}K\left(\frac{(a^2-b^2)^{1/2}}{a}\right)\quad(b<a),\qquad L_r=\frac{4u_0}{b\Pi_r}K\left(\frac{(b^2-a^2)^{1/2}}{b}\right)\quad(b>a)$$

При $a=b$ (ограничение «по кругу») $L_r(\xi)=2\pi u_0/a\Pi_r(\xi)$. Управление (3.10) при $u_0=1$ также более эффективно, чем управление вдоль прямой (2.1).

В режиме колебаний при $0<\varphi_1(\xi)<\pi/2$

$$L_v(\xi)\equiv\frac{4}{\Pi_v}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi)^{1/2}}=4\Pi_v^{-1}a^{-1}F(\varphi_1,(a^2-b^2)^{1/2}a^{-1})\quad(a>b)$$

$$L_v(\xi)=4\Pi_v^{-1}b^{-1}[K((b^2-a^2)^{1/2}b^{-1})-F(\pi/2-\varphi_1,\ (b^2-a^2)b^{-1})]\quad(b>a)$$

если $\pi/2<\varphi_1(\xi)<\pi$, то

$$L_v(\xi)=4\Pi_v^{-1}a^{-1}[2K((a^2-b^2)^{1/2}a^{-1})-F(\pi-\varphi_1,(a^2-b^2)^{1/2}a^{-1})]\quad(a>b)$$

$$L_v(\xi)=4\Pi_v^{-1}b^{-1}[K((b^2-a^2)^{1/2}b^{-1})+F(\varphi_1-\pi/2,(b^2-a^2)^{1/2}b^{-1})]\quad(b>a)$$

Здесь F — эллиптический интеграл первого рода. При $a=b$ выражения упрощаются: $L_v(\xi)=4\varphi_1(\xi)\,/\,a\Pi_v(\xi)$ (см. п. 2).

Так как уравнения (3.7) — (3.9) допускают разделение переменных, то окончательное решение задачи оптимального управления сводится к квадратурам и конечным уравнениям.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 17 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
2. *Акуленко Л. Д.* О резонансных колебательных и вращательных движениях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. *Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л.* Метод осреднения в задачах оптимального управления. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 4.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.