

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКИ

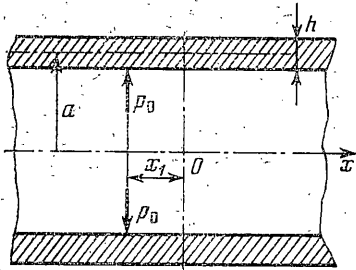
Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, В. И. СЕВРЮКОВ

(Харьков)

Исследуются установившиеся осесимметричные радиальные колебания круговой цилиндрической оболочки бесконечной длины под действием кольцевой нагрузки, движущейся вдоль ее оси по закону $x_1 = r \cos \omega t$ (фигура). В первом приближении такая схема может служить теоретической моделью для изучения колебаний, вызванных движением поршневых колец в цилиндре. Модель позволяет определить резонансные скорости движения нагрузки, а также перемещения и напряжения в оболочке.

Рассматривается оболочка радиуса a и толщины h . Материал оболочки имеет модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и плотность ρ . Радиальное перемещение; давление и осевая координата обозначаются соответственно W , p , x .

Уравнения осесимметричных радиальных колебаний оболочки имеют вид [1]:



$$D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{Eh}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где Φ — функция напряжений.

Давление, соответствующее движущейся кольцевой нагрузке, определяется выражением

$$p(x, t) = p_0 \delta(x - r \cos \omega t) \quad (2)$$

где p_0 — интенсивность нагрузки, δ — дельта-функция Дирака, ω — круговая частота, r — амплитуда колебаний точки приложения кольцевой нагрузки.

Применив к системе уравнений (1) преобразование Фурье (с учетом выражения (2))

$$w(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) e^{i\alpha x} dx, \quad \psi(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx$$

получим в пространстве изображений

$$\rho h \frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha^4 D w + \frac{1}{a} \psi = p_0 e^{i\alpha r \cos \omega t}, \quad \psi = \frac{Eh}{a} w \quad (3)$$

Используя разложение Якоби — Ангера [2], уравнения (3) приведем к виду

$$\frac{\rho h}{D} \frac{d^2 w}{dt^2} + (\alpha^4 + \beta^4) w = \frac{p_0}{D} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) i^m J_m(\alpha r) \cos m\omega t \quad (4)$$

где $J_m(\alpha r)$ — функции Бесселя первого рода, $\delta_{m,0}$ — символ Кронекера, $\beta^4 = Eh/a^2 D$.

Решение уравнения (4), соответствующее установившимся вынужденным колебаниям, ищем в форме

$$w(\alpha, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\alpha) \cos m\omega t \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), получим

$$A_m(\alpha) = [p_0(2 - \delta_{m,0}) i^m J_m(\alpha r)] [D(\alpha^4 + \beta^4) - \rho h(m\omega)^2]^{-1}$$

Переходя к оригиналу, найдем прогиб оболочки

$$W(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \cos m\omega t \quad (6)$$

$$B_{2k}(x) = \frac{p_0(2 - \delta_{k,0}) (-1)^k}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{J_{2k}(\alpha r) \cos \alpha x d\alpha}{\alpha^4 + \beta^4 - \rho h D^{-1} (2k\omega)^2} \quad \text{при } m=2k \quad (7)$$

$$B_{2k+1}(x) = \frac{2p_0(-1)^k}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{J_{2k+1}(\alpha r) \sin \alpha x d\alpha}{\alpha^4 + \beta^4 - \rho h D^{-1} (2k+1)^2 \omega^2} \quad \text{при } m=2k+1$$

В зависимости от значений x и k интегралы, входящие в (7), имеют различные аналитические выражения. Остановимся сначала на их анализе при $|x| > r$. Для значений k , удовлетворяющих неравенствам

$$a_1^4 = \beta^4 - \rho h D^{-1} (2k\omega)^2 \geq 0, \quad a_2^4 = \beta^4 - \rho h D^{-1} (2k+1)^2 \omega^2 \geq 0$$

воспользовавшись интегральным представлением функций Бесселя [2] и теорией вычетов, получим

$$B_{2k}(x) = \frac{p_0(2 - \delta_{k,0}) (-1)^k}{2\sqrt{2} D a_1^3} \left\{ [\text{ber}_{2k}(a_1 r) - \text{bei}_{2k}(a_1 r)] \cos \frac{a_1 x}{\sqrt{2}} + [\text{bei}_{2k}(a_1 r) + \text{ber}_{2k}(a_1 r)] \sin \frac{a_1 x}{\sqrt{2}} \right\} \exp\left(-\frac{a_1 x}{\sqrt{2}}\right) \quad (8)$$

$$B_{2k+1}(x) = \frac{p_0(-1)^k}{\sqrt{2} D a_2^3} \left\{ [\text{ber}_{2k+1}(a_2 r) + \text{bei}_{2k+1}(a_2 r)] \cos \frac{a_2 x}{\sqrt{2}} + [\text{bei}_{2k+1}(a_2 r) - \text{ber}_{2k+1}(a_2 r)] \sin \frac{a_2 x}{\sqrt{2}} \right\} \exp\left(-\frac{a_2 x}{\sqrt{2}}\right)$$

где $\text{ber}_\nu(z)$, $\text{bei}_\nu(z)$ — функции Томсона [2].

При $x \rightarrow \infty$ амплитуды колебаний стремятся к нулю, т. е. происходит их убывание по мере удаления от области приложения кольцевой нагрузки.

Указанным выше путем для значений k , удовлетворяющих неравенствам

$$b_1^4 = \rho h D^{-1} (2k\omega)^2 - \beta^4 \geq 0, \quad b_2^4 = \rho h D^{-1} (2k+1)^2 \omega^2 - \beta^4 \geq 0$$

будем иметь

$$B_{2k}(x) = \frac{p_0(-1)^k}{2Db_1^3} [(-1)^k I_{2k}(b_1 r) \exp(-b_1 x) + J_{2k}(b_1 r) \sin(b_1 x)] \quad (9)$$

$$B_{2k+1}(x) = \frac{p_0(-1)^k}{2Db_2^3} [(-1)^{k+1} I_{2k+1}(b_2 r) \exp(-b_2 x) + J_{2k+1}(b_2 r) \cos(b_2 x)]$$

Здесь $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка ν . В отличие от случая (8) амплитуды высокочастотных колебаний (9) содержат периодические функции, которые, оставаясь ограниченными, не убывают при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, компоненты высокочастотного процесса распространяются дальше по длине оболочки, нежели компоненты низкочастотных колебаний, хотя уровень амплитуд убывает с ростом k . Следовательно, в зоне, близкой к области приложения нагрузки, прогибы оболочки определяются главным образом низкочастотными составляющими, тогда как при значительном удалении от этой области определяющим становится высокочастотный процесс.

Перейдем к анализу амплитуд колебаний оболочки в зоне приложения нагрузки, т. е. при $|x| < r$. Выразив тригонометрические функции через функции Бесселя с помощью формулы Неймана [3] и известных табличных интегралов [2, 4], получим ($a_1^k \geq 0, a_2^k \geq 0$)

$$B_{2k}(x) = \frac{p_0(2-\delta_{k,0})}{2Da_1^3} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{a_0^{2m+2k} \cos(1+2k+2m)\pi/4}{m! \Gamma(m+2k+1)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-m, -2k-m; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{(-1)^m a_0^{3+4m}}{\Gamma(2m+k+5/2) \Gamma(2m-k+5/2)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(k-2m-\frac{3}{2}, -k-2m-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) \right] \quad (10)$$

$$B_{2k+1}(x) = \frac{p_0 x}{Da_2^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{b_0^{2m+2k+1} \sin(1+2k+2m)\pi/4}{m! \Gamma(2k+m+2)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-m, -2k-m-1; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) - \frac{(-1)^m b_0^{4m+2}}{\Gamma(-k+2m+3/2) \Gamma(5/2+2m+k)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-2m+k-\frac{1}{2}, -2m-k-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) \right]$$

где ${}_sF_r$ — гипергеометрические функции, Γ — гамма-функция, $a_0 = 1/2 a_1 r$, $b_0 = 1/2 a_2 r$.

Значениям $b_1^k \geq 0, b_2^k \geq 0$ соответствует

$$B_{2k}(x) = \frac{p_0}{Db_1^3} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{({}^{1/2}b_1 r)^{3+4m}}{\Gamma(-k+2m+5/2) \Gamma(k+2m+5/2)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(k-2m-\frac{3}{2}, -k-2m-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{({}^{1/2}b_1 r)^{2m+2k}}{m! \Gamma(m+2k+1)} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-m, -m-2k; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{r^2}\right) \right]$$

$$B_{2k+1}(x) = \frac{p_0 x}{D b_2^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(1/2 b_2 r)^{2m+2k+1}}{m! \Gamma(m+2k+2)} {}_2F_1 \left(-m, -2k-m-1; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(1/2 b_2 r)^{4m+2}}{\Gamma(3/2-k+2m) \Gamma(5/2+k+2m)} {}_2F_1 \left(-2m+k-\frac{1}{2}, -2m-k-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{r^2} \right) \right] \quad (11)$$

Остановимся на колебательном процессе оболочки в сечении $x=0$, относительно которого происходит движение нагрузки. При $x=0$ $B_{2k+1}(x)=0$. Гипергеометрические ряды принимают единичные значения, и суммы (10), (11) сводятся к функциям Ломмеля [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \operatorname{ler}_{\mu, \nu}(z) \\ 2i \operatorname{lei}_{\mu, \nu}(z) \end{array} \right\} = s_{\mu, \nu}(ze^{i3/4\pi}) \pm s_{\mu, \nu}(ze^{-i3/4\pi})$$

В результате будем иметь

$$B_{2k}(0) = \frac{p_0(2-\delta_{k,0})(-1)^k}{\pi D 2 \sqrt{2} a_1^3} [\pi \operatorname{ber}_{2k}(a_1 r) - \pi \operatorname{bei}_{2k}(a_1 r) - \\ - 2 \operatorname{ler}_{0, 2k}(a_1 r) - 2 \operatorname{lei}_{0, 2k}(a_1 r)] \\ [B_{2k+1}(0)]_x' = \frac{p_0(-1)^{k+1}}{\pi D a_2^2} [\pi \operatorname{ber}_{2k+1}(a_2 r) - 2(2k+1) \operatorname{bei}_{-1, 2k+1}(a_2 r)] \\ \text{при } a_1^4 \geq 0, a_2^4 \geq 0$$

$$B_{2k}(0) = \frac{p_0(-1)^k}{2\pi D b_1^3} [\pi(-1)^{k+1} I_{2k}(b_1 r) - 2i s_{0, 2k}(i b_1 r) - 2s_{0, 2k}(b_1 r)] \\ [B_{2k+1}(0)]_x' = \frac{p_0(-1)^{k+1}}{2\pi D b_2^2} \{ \pi(-1)^{k+1} I_{2k+1}(b_2 r) + \\ + 2(2k+1) [s_{-1, 2k+1}(b_2 r) - s_{-1, 2k+1}(i b_2 r)] \} \text{ при } b_1^4 \geq 0, b_2^4 \geq 0$$

Здесь штрихом обозначена производная по x .

Решения (10), (11) показывают, что установившиеся радиальные колебания бесконечно длинной оболочки от действия гармонически движущейся кольцевой нагрузки происходят по формам, симметричным и антисимметричным относительно сечения $x=0$. Перемещения оболочки в указанном сечении разлагаются в ряд только по гармоникам, четное число раз кратным ω . Устремляя величины a_1, a_2, b_1, b_2 к нулю, после анализа рядов (10), (11) приходим к выводу, что в рассматриваемой системе возможно два резонансных состояния

$$\omega = \omega_1 = (1/2a) \sqrt{E/\rho}, \quad \omega = \omega_2 = (1/a) \sqrt{E/\rho}$$

Частоте ω_1 соответствует бесконечное значение амплитуды колебаний при $\cos 2\omega t$, а частоте ω_2 — поворот образующей оболочки в сечении $x=0$ на угол $\pi/2$. Остальные амплитуды колебаний остаются конечными при любых значениях ω . Таким образом, в отличие от равномерного движения кольцевой нагрузки, для которого установлена одна критическая скорость [4], возвратно-поступательное имеет две критические частоты.

Проанализируем поведение полученных решений при $r \rightarrow 0$. В этом предельном случае распределение прогибов по длине оболочки описывается выражениями (8).

Учитывая, что функции Томсона в нуле, кроме $\text{ber}_0(0)=1$, принимают нулевые значения, получим

$$W(x) = B_0(x) = \frac{p_0}{2\sqrt{2}D\beta^3} \left[\cos \frac{\beta x}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\beta x}{\sqrt{2}} \right] \exp \left(-\frac{\beta x}{\sqrt{2}} \right)$$

Это выражение совпадает с решением, приведенным в [5] для цилиндрической оболочки, статически нагруженной кольцевой нагрузкой.

Поступила 8 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Присекин В. Л. Устойчивость цилиндрической оболочки под действием движущейся нагрузки. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
3. Корнев В. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., Физматгиз, 1971.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1973.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.