МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1976

УДК 539.376+532.135

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Ю. И. КАРКОВСКИЙ, С. И. МЕШКОВ

(Куйбышев)

Рассматривается одномерная задача о распространении синусоидального возбуждения в наследственно-упругой среде, для которой связь между напряжением σ и деформацией ε определяется бесконечным рядом операторов [1, 2] вольтерровского типа

$$\sigma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} \overset{n}{\cdots}\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{i=1}^{n}\varepsilon(t-t_i)\,dt_i \tag{0.1}$$

Здесь весовые функции $G_n(t_1,\ldots,t_n)$ описывают наследственные эффекты n-го порядка.

Задача решается асимптотическим методом, когда за нулевое приближение принимается линейное упругое решение, а все эффекты наследственности и нелинейности учитываются как возмущение [3–5].

1. Уравнение движения сплошной среды плотности ρ в одномерном случае записывается в виде

$$\rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

Для решения задачи вводится фиктивный малый параметр μ, и функционал напряжения в зависимости от деформации записывается следующим образом [3, 5]:

$$\sigma(\varepsilon,t,\mu)=E_\infty F(\nu_\varepsilon,\varepsilon\ t,\mu),\qquad \nu_\varepsilon\equiv(E_\infty-E_0)E_\infty^{-1} \tag{1.2}$$

В частности, определяющему уравнению (0.1) соответствует представление [3]:

$$F(\nu_\varepsilon,\varepsilon,t,\mu)=\varepsilon(t)-\mu\nu_\varepsilon\int_0^\infty R(t')\,\varepsilon(t-t')\,dt'+$$

$$+\mu E_\infty^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty} \overset{n}{\cdots}\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{i=1}^{n}\varepsilon(t-t_i)\,dt_i \tag{1.3}$$

Здесь $R(t)$ — ядро релаксации линейной теории, E_∞ и E_0 — нерелаксированное и релаксированное значение модуля упругости соответственно. При этом справедливы предельные соотношения

$$F(\nu_\varepsilon,\varepsilon,t,\mu)\to\varepsilon,\quad \mu\to0,\quad \sigma(\varepsilon,t,1)=\sigma(\varepsilon,t) \tag{1.4}$$

Граничное условие $\sigma|_{x=0}=\sigma_0\cos\omega t$ позволяет искать решение уравнения (1.1) в виде гармонического приближения [3, 5]:

$$\varepsilon=A(x)\cos\psi(x,t),\quad \psi(x,t)\equiv\omega(t-x/v)+\varphi(x),\ v^2\equiv E_\infty\rho^{-1} \tag{1.5}$$

Медленно меняющиеся функции расстояния $A(x)$ и $\varphi(x)$ определяются из уравнений

$$\frac{\omega}{v}[C(A)-A]=2C(A)\frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{\omega}{v}S(A)=2\frac{dC}{dx} \tag{1.6}$$

$$C(A)-iS(A)\equiv\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(A\cos\psi,t,\mu)\exp(-i\psi)\,d\psi \tag{1.7}$$

С учетом соотношений (1.4) из уравнений (1.6) получается

$$x=2\frac{v}{\omega}\int_{A_0}^{A}\frac{dA}{S(A)} \tag{1.8}$$

$$\varphi=\varphi_0+\int_{A_0}^{A}\frac{C(A)-A}{S(A)}\frac{dA}{A}=\varphi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{v}\right)x+\int_{A_0}\frac{C(A)}{S(A)}dA \tag{1.9}$$

В окончательных формулах параметр μ следует положить равным единице. Величины A_0 и φ_0 представляют собой значения амплитуды и фазы при $x=0$.

Из (1.5) получается

$$\varepsilon(t-t_k)=\frac{A}{2}\left(\frac{z}{z_k}+\frac{z_k}{z}\right),\qquad z\equiv\exp(i\psi),\quad z_k\equiv\exp(i\omega t_k) \tag{1.10}$$

В силу симметрии функций $G_n(t_1,\ldots,t_n)$ относительно перестановок аргументов можно записать

$$\int\overset{\infty}{\underset{0}{\overset{n}{\ldots}}}\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{k=1}^{n}\varepsilon(t-t_k)\,dt_k=$$

$$=\left(\frac{A}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\exp[i(n-2k)\psi]G(n-k,k;\omega) \tag{1.11}$$

Здесь $\binom{n}{k}$ — биномиальные коэффициенты

$$G(n-k,k;\omega)\equiv\int\overset{\infty}{\underset{0}{\overset{n}{\ldots}}}\int G_n(t_1,\ldots,t_n)\exp\left[i\omega\left(\sum_{l=1}^{k}t_l-\sum_{l=k+1}^{n}t_l\right)\right]dt_1\ldots dt_n \tag{1.12}$$

Подстановка (1.11) в (1.7) для $\mu=1$ приводит к выражению

$$C(A)-iS(A)=A\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2m+1}{m}E_\infty^{-1}G(m+1,m;\omega)\frac{A^{2m}}{2^{2m}} \tag{1.13}$$

$$G(1,\ 0;\ \omega)\equiv G(\omega)=E_\infty[1-\nu_\varepsilon R(\omega)] \tag{1.14}$$

$$R(\omega)\equiv\int_0^{\infty}R(t)\exp(-i\omega t)\,dt=R'(\omega)-iR''(\omega)$$

Подстановка выражений для $C(A)$ и $S(A)$, вычисленных по формуле (1.13) в (1.8) и (1.9), приводит к уравнениям для амплитуды и фазы. Из формулы (1.8) амплитуда определяется как функция расстояния x. Зависимость фазы φ от расстояния x получается после подстановки найденного выражения $A(x)$ в уравнение (1.9).

Для весовых функций вида

$$G_n(t_1,\ldots,t_n)=b_n\prod_{i=1}^{n}G(t_i),\quad b_1=1,\quad G(t)=E_\infty[\delta(t)-\nu_\varepsilon R(t)] \tag{1.15}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, согласно определению (1.12) можно записать

$$G(m+1,m;\ \omega)=G(\omega)\,|G(\omega)|^{2m} \tag{1.16}$$

Формулы (1.14) и (1.16) позволяют переписать выражение (1.13) в виде

$$C(A)-iS(A)=A[1-\nu_\varepsilon R(\omega)]\Phi(a),\qquad a\equiv A^2|G(\omega)|^2 \tag{1.17}$$

$$\Phi(a)\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{2m+1}}{2^{2m}}\binom{2m+1}{m}a^m$$

Учитывая выражения (1.17) и (1.14), из (1.9) можно получить

$$\varphi=\varphi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{v}\right)x-\frac{1-\nu_\varepsilon R'(\omega)}{\nu_\varepsilon R''(\omega)}\ln\frac{A}{A_0}=$$

$$=\varphi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{v}\right)\left[x+\frac{1-\nu_\varepsilon R'(\omega)}{\beta}\ln\frac{A^2}{A_0^2}\right],\qquad \beta\equiv\frac{\nu_\varepsilon\omega}{v}R''(\omega) \tag{1.18}$$

Подстановка (1.17) в (1.8) дает

$$-\beta x=\int_{a_0}^{a}\frac{d\xi}{\xi\Phi(\xi)},\qquad a_0\equiv A_0^2|G(\omega)|^2 \tag{1.19}$$

Так как амплитуда распространяющейся волны является однозначной монотонно убывающей функцией расстояния, из последней формулы следует, что $\Phi(\xi)>0$ при всех допустимых значениях ξ, определяемых областью сходимости ряда (1.17), т. е. коэффициентами b_n в формуле (1.15). Поэтому зависимость расстояния от амплитуды $x(a,a_0)$, определяемая выражением (1.19), имеет обратную функцию $a(x,a_0)$. Полагая

$$f(a)\equiv ay(a),\quad \ln y(a)\equiv-\int_0^a\frac{\Phi(\xi)-1}{\xi\Phi(\xi)}d\xi+\mathrm{const} \tag{1.20}$$

формулу (1.19) можно представить в виде

$$f(a)=f(a_0)\exp(-\beta x) \tag{1.21}$$

Так как $f(a)$ является монотонно возрастающей функцией, то можно записать

$$A\equiv A(\omega)=|G(\omega)|^{-1}\{f^{-1}[f(A_0^2|G(\omega)|^2)\exp(-\beta x)]\}^{1/2}$$

где f^{-1} — обратная функция f.

2. В качестве примера можно рассмотреть дробно-экспоненциальное [6] ядро релаксации, для которого

$$R(\omega)=[1+(i\omega\tau_\varepsilon)^\gamma]^{-1} \qquad (0<\gamma\leqslant 1) \tag{2.1}$$

Тогда

$$R'(\omega)=\frac{\varkappa^{-\gamma}+c}{\varkappa^\gamma+\varkappa^{-\gamma}+2c}, \qquad R''(\omega)=\frac{s}{\varkappa^\gamma+\varkappa^{-\gamma}+2c} \tag{2.2}$$

$$\varkappa\equiv\omega\tau_\varepsilon, \qquad c\equiv\cos{}^1/_2\pi\gamma, \qquad s\equiv\sin{}^1/_2\pi\gamma$$

Отсюда получается

$$\beta=\frac{\nu_\varepsilon}{v}\frac{\omega s}{\varkappa^\gamma+\varkappa^{-\gamma}+2c}, \qquad a=A^2E_\infty{}^2\left[1-\nu_\varepsilon\frac{(2-\nu_\varepsilon)\varkappa^{-\gamma}+2c}{\varkappa^\gamma+\varkappa^{-\gamma}+2c}\right] \tag{2.3}$$

Интересно проследить поведение амплитуды A и фазы φ при больших частотах, так как в линейном случае при $\omega\to\infty$ коэффициент поглощения β ведет себя принципиально различным образом для $\gamma=1$ и $\gamma\neq1$, а именно, в первом случае β стремится к постоянному значению, а во втором — неограниченно возрастает [7].

В силу равенства $f^{-1}(0)=0$ и соотношения

$$\lim_{\omega\to\infty} a=(\lim_{\omega\to\infty} A^2)E_\infty{}^2\equiv A^2(\infty)E_\infty{}^2 \tag{2.4}$$

из формул (1.21) и (2.3) для любых $x>0$ следует, что при неограниченном возрастании частоты амплитуда стремится к следующим предельным значениям:

$$A(\infty)=0, \quad \gamma\neq1, \quad A(\infty)=E_\infty{}^{-1}\left\{f^{-1}\left[f(A_0{}^2E_\infty{}^2)\exp\left(-\frac{x\nu_\varepsilon}{v\tau_\varepsilon}\right)\right]\right\}^{1/2}, \quad \gamma=1 \tag{2.5}$$

Таким образом, как и в линейном случае, амплитуда A при $\gamma=1$ с увеличением частоты стремится к постоянному значению, а при $\gamma\neq1$ асимптотически приближается к нулю. Из формулы (1.18), переписанной с учетом (1.20) в виде

$$\varphi=\varphi_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{v}\right)\left[\nu_\varepsilon R'(\omega)x+\frac{1-\nu_\varepsilon R'(\omega)}{\beta}\ln\frac{y(a_0)}{y(a)}\right]$$

следует, что при $\gamma=1$ асимптотой графика функции $\varphi(\omega)$ является прямая

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2\nu_\varepsilon}\ln\frac{y(A^2(\infty)E_\infty{}^2)}{y(A_0{}^2E_\infty{}^2)}\omega\tau_\varepsilon$$

При $\gamma\neq1$ асимптотическое поведение фазы определяется выражениями

$$\varphi-\varphi_0\approx-\frac{x\nu_\varepsilon c}{2v\tau_\varepsilon}(\omega\tau_\varepsilon)^{1-\gamma} \qquad \left(0<\gamma<\frac{1}{2}\right)$$

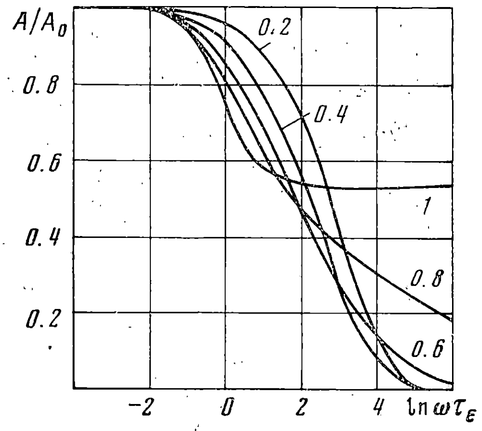
$$\varphi-\varphi_0\approx\frac{1}{2\nu_\varepsilon}\ln\frac{y(0)}{y(A_0{}^2E_\infty{}^2)}(\omega\tau_\varepsilon)^\gamma \qquad \left(\frac{1}{2}<\gamma<1\right)$$

$$\varphi-\varphi_0\approx\left[-\frac{x\nu_\varepsilon}{2v\tau_\varepsilon}+\frac{1}{\nu_\varepsilon}\ln\frac{y(0)}{y(A_0{}^2E_\infty{}^2)}\right]\sqrt{\frac{\omega\tau_\varepsilon}{2}} \qquad \left(\gamma=\frac{1}{2}\right)$$

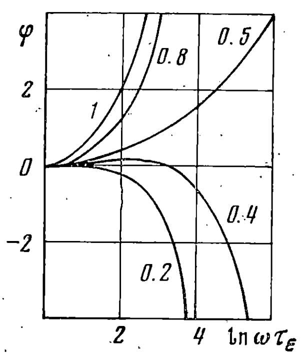
Из уравнения (1.21) можно непосредственно проследить поведение амплитуды при больших и малых значениях x для каждой фиксированной частоты. С учетом (1.17) и (1.20) имеют место выражения

$$\ln (A/A_0) \approx -{}^1/_2\beta x + {}^1/_2 \ln y (A_0^2 |G(\omega)|^2) \qquad (x \gg 1)$$
$$\ln (A/A_0) \approx -{}^1/_2\beta x \Phi (A_0^2 |G(\omega)|^2) \qquad (x \ll 1)$$

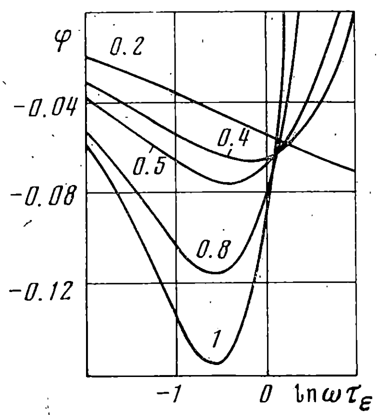
на основании которых можно также записать соответствующие асимптотические формулы для фазы.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В случае $b_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ $\Phi(a)$ можно выразить через гипергеометрическую функцию [8]:

$$\Phi(\xi) = F(1, {}^3/_2; 2; \xi) = 2(1 - \xi + \sqrt{1-\xi})^{-1} \qquad (2.6)$$

Из формулы (1.20) следует выражение

$$y(a) = (1 + \sqrt{1-a})^{-1} \exp [{}^1/_2 (1 + \sqrt{1-a})^2] \qquad (2.7)$$

при помощи которого уравнение (1.21) удобно переписать в виде

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = \frac{y(a_0)}{y(a)} \exp(-\beta x) \qquad (2.8)$$

Отсюда методом итерации [9] определяются значения $(A / A_0)^2$.

Если в разложении гипергеометрической функции (2.6) в ряд по степеням ξ удержать два члена $\Phi(\xi)=F(1, {}^3/_2; 2; \xi)\approx 1+{}^3/_4\xi$, то из формул (1.20) и (1.21) следуют выражения амплитуды и фазы, полученные в работе [3].

На фиг. 1 приведена частотная зависимость безразмерной амплитуды A/A_0 в полулогарифмическом масштабе при различных значениях параметра γ. Квадрат амплитуды $(A/A_0)^2$ вычислялся методом итерации по формуле (2.8) при следующих численных значениях: $(A_0E_\infty)^2={}^1/_2=\nu_\varepsilon$, $x/v\tau_\varepsilon=2$.

Хорошо видно различие в асимптотическом поведении амплитуды при $\gamma=1$ и $\gamma\neq 1$.

На фиг. 2, где у кривых также указаны значения γ, представлена зависимость фазы от $\ln \omega\tau_\varepsilon$ при $\varphi_0=0$.

На фиг. 3 в увеличенном масштабе показан начальный участок зависимостей, приведенных на фиг. 2.

Ввиду сложности выражения (2.7), используемого в уравнении (2.8), аналитическое сравнение результатов работы [3] с полученными в данной работе представляется затруднительным. Однако численные расчеты по формулам, приведенным в работе [3] для принятых здесь значений параметров, приводят к результатам, практически совпадающим с результатами данной работы.

Поступила 23 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations. N. Y., 1959.
2. *Nakada O.* Theory of nonlinear responses. J. Phys. Soc. Japan, 1960, vol. 2, No. 15, p. 2280—2288.
3. *Астафьев В. И., Мешков С. И.* Вынужденные колебания полубесконечного стержня из нелинейного наследственно-упругого материала. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
4. *Карнаухов В. Г.* Приближенный метод решения задач о распространении волн в вязкоупругих материалах. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 9.
5. *Caughey T. K.* Forced-oscillations of semi-infinite rod exhibiting weak bilinear hysteresis. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 4, p. 644—648.
6. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
7. *Мешков С. И., Россихин Ю. А.* О распространении звуковых волн в наследственно-упругой среде. ПМТФ, 1968, № 5.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
9. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.

Замечание к статье Ю. М. Блитштейна, С. И. Мешкова «Ударные волны в нелинейной упругой и вязкоупругой среде»

(Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 4)

1. Сдвиговые волны, рассмотренные в работе, имеют место только при условии

$$2(f_1^v+f_2^v)+f_3^v(1+2I_1^v)=0$$

Поэтому все вычисления для сдвиговых волн следует считать выполненными при этом условии.

2. Полученные в статье соотношения, связывающие интенсивности сильных разрывов и волн ускорений, позволяют по заданной интенсивности сильного разрыва определить интенсивность волны ускорений, а не наоборот.

Таким образом, определение интенсивности сильного разрыва в общем случае возможно только из решения соответствующих краевых задач.