

РАСПРОСТРАНЕНИЕ В СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ  
УПРУГИХ ВОЛН, ВЫЗВАННЫХ ПОВЕРХНОСТНОЙ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

С. С. ГРИГОРЯН, Р. А. ЧЕРЕДНИЧЕНКО

(Москва)

Проведено численное исследование волнового процесса в упругой среде, состоящей из слоя и находящегося с ним в жестком контакте полупространства при воздействии на поверхность слоя подвижной динамической нагрузки.

В цилиндрических координатах  $r, z, \theta$  слой занимает область  $0 \leq z \leq h$ , полупространство —  $z \geq h$ . Свойства слоя и полупространства характеризуются (соответственно индексы 1 и 2) плотностями  $\rho_1, \rho_2$ , скоростями продольных волн  $a_1, a_2$ ; скоростями поперечных волн  $b_1, b_2$ . Для определения волнового поля, вызванного динамическим воздействием на поверхность  $z=0$ , необходимо проинтегрировать в областях 1 и 2 при  $t > 0$  систему уравнений пространственной осесимметричной задачи динамической теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} = \rho_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^i}{r} = \rho_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^i = \lambda_i \theta^i + 2\mu_i \frac{\partial u^i}{\partial r}, \quad \sigma_{zz}^i = \lambda_i \theta^i + 2\mu_i \frac{\partial v^i}{\partial z}, \quad \sigma_{\theta\theta}^i = \lambda_i \theta^i + 2\mu_i \frac{u^i}{r}$$

$$\tau_{rz}^i = \mu_i \left( \frac{\partial u^i}{\partial z} + \frac{\partial v^i}{\partial r} \right), \quad \theta^i = \frac{\partial u^i}{\partial r} + \frac{u^i}{r} + \frac{\partial v^i}{\partial z}$$

с учетом соответствующих начальных и граничных условий. Здесь  $u^i, v^i$  — смещения,  $\sigma_{rr}^i, \sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{rz}^i$  — компоненты тензора напряжений.

Переходя к безразмерным величинам по формулам

$$r^\circ = \frac{r}{r_*}, \quad z^\circ = \frac{z}{r_*}, \quad t^\circ = \frac{t}{t_*} = \frac{a_1 t}{r_*}, \quad u_0^i(r^\circ, z^\circ, t^\circ) = a_i^{-1} \frac{\partial u^i}{\partial t}$$

$$v_0^i(r^\circ, z^\circ, t^\circ) = a_i^{-1} \frac{\partial v^i}{\partial t}, \quad p^i = \frac{\sigma_{rr}^i + \sigma_{zz}^i}{2\rho_i a_i^2}, \quad q^i = \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{zz}^i}{2\rho_i a_i^2} \quad (2)$$

$$\tau^i = \frac{\tau_{rz}^i}{\rho_i a_i^2}, \quad \sigma^i = \frac{\sigma_{\theta\theta}^i}{\rho_i a_i^2}, \quad a_i = \sqrt{\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}}, \quad b_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}, \quad \gamma_i = \frac{a_i}{b_i}$$

получим эквивалентную (1) систему уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа

$$u_i^i - p_r^i - q_r^i - \tau_z^i = (p^i + q^i - \sigma^i) r^{-1}, \quad v_i^i - p_z^i + q_z^i - \tau_r^i = \tau^i r^{-1}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^4 (3\gamma_i^2 - 4)^{-1} p_i^i - u_r^i - v_z^i + \gamma_i^2 (2 - \gamma_i^2) (3\gamma_i^2 - 4)^{-1} \sigma_i = 0 \\ \gamma_i^2 q_i^i - \ddot{u}_r^i + v_z^i = 0, \quad \gamma_i^2 \tau_i^i - u_z^i - v_r^i = 0 \\ \gamma_i^2 (2 - \gamma_i^2) (3\gamma_i^2 - 4)^{-1} p_i^i + \gamma_i^2 (\gamma_i^2 - 1) (3\gamma_i^2 - 4)^{-1} \sigma_i = u_r^i \end{aligned} \quad (3)$$

где нижний индекс означает частное дифференцирование по соответствующей переменной (значок градуса у зависимых и независимых переменных опущен); масштаб  $r_*$  будет уточнен позже. Система (3) в каждой из областей зависит от одного материального параметра  $\gamma_i$ ; который выражается через коэффициент Пуассона  $\nu_i$ .

Получим граничные условия на поверхности  $z=0$ : пусть в точке  $r=0$ ,  $z=0$  в момент  $t=0$  возникает большое давление, которое затем со скоростью, превышающей скорость распространения малых возмущений в слое, распространяется вдоль поверхности  $z=0$  симметрично относительно этой точки, теряя со временем свою интенсивность и скорость распространения. В качестве такой нагрузки используем распределение давлений из решения автомодельной задачи о сильном взрыве в воздухе со сферической симметрией [1].

На основании этого решения радиус ударной волны меняется со временем по закону  $L = At^{2/5}$ ,  $A = (E/\rho_a)^{1/5}$ , где  $\rho_a$  — плотность воздуха перед фронтом,  $E = E_0/\alpha$ ,  $E_0$  — энергия взрыва,  $\alpha = \alpha(\nu, \gamma)$  и для  $\nu=3$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $\alpha=0.851$ . Скорость ударного фронта  $D = \frac{2}{5}At^{-3/5}$ , а давление на фронте меняется во времени по закону  $p_f(t) = \frac{2}{15}\rho_a A^2 t^{-9/5}$ . Распределение давления за фронтом дается соотношением  $p(r, t) = p_f(t)\varphi(r/L)$ , где  $\varphi$  — известная функция своего аргумента. Эту функцию аппроксимируем зависимостью

$$\varphi(r/L) = \frac{1}{11} [4 + 7(r/L)^{19/2}]$$

В безразмерных переменных в качестве характерного размера удобно принять величину  $r_* = (E/\rho_a a_1^2)^{1/5}$ . При этом получим

$$\begin{aligned} L^0 = \frac{L(t)}{r_*} = \frac{At^{2/5}}{r_*} = \frac{At_*^{2/5}(t^0)^{2/5}}{r_*} = \frac{A(t^0)^{2/5}}{(r_*)^{2/5} a_1^{2/5}} = (t^0)^{2/5} \\ \frac{r}{L} = \frac{r}{r_*} \frac{r_*}{L} = r^0 (t^0)^{-2/5} \end{aligned}$$

Давление на фронте запишется в виде

$$p_f(t^0) = \frac{2}{15} \rho_a a_1^2 (t^0)^{-9/5} \quad (4)$$

а распределение давления за фронтом будет

$$p(r^0, t^0) = \frac{2}{165} (t^0)^{-9/5} \{4 + 7[r^0 (t^0)^{-2/5}]^{19/2}\} \rho_a a_1^2 \quad (5)$$

Чтобы устранить особенность в граничном условии при  $t=0$ , соотношение (4) будем использовать лишь при  $L^0 > r_1^0$ , где  $r_1^0$  — достаточно малое число. При  $r^0 < r_1^0$  принимаем, что  $p_f = p_f(r_1^0)$ . Значок градуса в дальнейшем опускаем.

Окончательно граничные условия на плоскости  $z=0$  можно записать в форме

$$\begin{aligned} p^1 - q^1 = \frac{\rho_a}{\rho_1} \begin{cases} -\frac{2}{165} \Phi(t) [4 + 7(rt^{-2/5})^{19/2}], & r \leq t^{2/5} \\ 0 & r > t^{2/5} \end{cases} \\ \tau^1 = 0, \quad r \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} t_1^{-9/5} = \text{const}, & 0 < t \leq t_1 = r_1^{5/2} \\ t^{-9/5} & t > t_1 \end{cases}$$

Граничные условия на линии жесткого контакта слоя и полупространства выражают непрерывность смещений (скоростей) и равенство нормальных и касательных напряжений. В безразмерных переменных эти условия имеют вид

$$u^1(r, z, t) = u^2(r, z, t) a_2 a_1^{-1}, \quad v^1(r, z, t) = v^2(r, z, t) a_2 a_1^{-1} \quad (7)$$

$$p^1 - q^1 = (p^2 - q^2) \rho_2 a_2^2 (\rho_1 a_1^2)^{-1}, \quad \tau^1 = \tau^2 \rho_2 a_2^2 (\rho_1 a_1^2)^{-1}, \quad z = h r_*^{-1}, \quad r \geq 0$$

При задании граничных условий на плоскости контакта можно учесть возможность скольжения, если контакт не жесткий. При этом скольжение будет наступать при достижении предельного условия вида  $\tau_{rz} = f(\sigma_{zz})$  (сухое трение).

Начальные условия в задаче нулевые. Отметим также, что в силу линейности задачи ее решение пропорционально величине  $\rho_a / \rho_1$ , поэтому в дальнейшем этот множитель опущен.

Алгоритм численного решения осесимметричной задачи отдельно для слоя и для полупространства аналогичен изложенному в работе [2]. Здесь был использован тот же алгоритм с дополнительной состыковкой в узловых точках линии контакта при  $z = h r_*^{-1}$ .

Сстыковка состоит в следующем. Произвольная точка линии контакта двух областей по отношению к слою принадлежит границе и поэтому интегрирование вдоль бихарактеристик, проходящих вне области 1, необходимо исключить. Это приводит к уменьшению числа независимых уравнений с шести до четырех. С другой стороны, рассматривая ту же точку как граничную по отношению к области 2, аналогичным образом получаем еще четыре независимых уравнения. Таким образом, для произвольной точки плоскости контакта с учетом граничных условий (7) (еще четыре соотношения) получаем систему из двенадцати уравнений для определения двенадцати величин. Отметим, что в точках границы контакта напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  будут разрывны.

Описанная система из восьми уравнений имеет форму

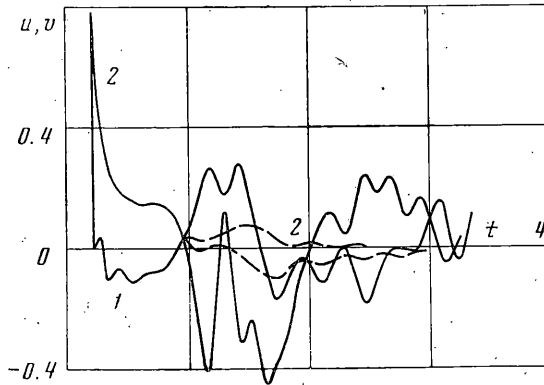
$$\begin{aligned} \delta u^1 - \frac{k_1}{2r} (\delta p^1 + \delta q^1 - \delta \sigma^1) - \gamma_1 \delta \tau^1 &= \frac{k_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \right) v_{rz}^1 + \\ &+ \frac{k_1^2}{2} \left( u_{rr}^1 - \frac{2}{\gamma_1} p_{rz}^1 - \frac{1}{\gamma_1} \tau_{rz}^1 \right) + k_1 (p_r^1 + q_r^1 + \tau_r^1) - \frac{k_1}{\gamma_1} (u_z^1 + v_r^1) + \\ &+ \frac{k_1^2}{2r} \left[ \left( 1 - \frac{2}{\gamma_1^2} \right) u_r^1 - \frac{1}{\gamma_1} (\tau_r^1 + p_z^1 + q_z^1 - \sigma_z^1) \right] + \frac{k_1}{r} (p^1 + q^1 - \sigma^1) + \\ &+ \frac{k_1^3}{4r} (p_{rr}^1 + q_{rr}^1 - \sigma_{rr}^1), \quad \delta v^1 - \frac{k_1}{2r} \delta \tau^1 + \gamma_1^2 \delta q^1 = \frac{k_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \right) u_{rz}^1 + \\ &+ \frac{k_1^2}{2} \left( p_{rr}^1 + q_{rr}^1 + \frac{1}{\gamma_1^2} v_{rr}^1 \right) + k_1 (p_z^1 - q_z^1 + \tau_r^1) + k_1 (u_r^1 - v_z^1) + \\ &+ \frac{k_1^2}{2r} \left[ \left( 1 - \frac{2}{\gamma_1^2} \right) u_z^1 + p_r^1 + q_r^1 - \sigma_r^1 - \tau_z^1 \right] + \\ &+ \frac{k_1}{r} \tau^1 + \frac{k_1^3}{4r} \left[ \frac{1}{\gamma_1^2} \tau_{rr}^1 + \left( 1 - \frac{2}{\gamma_1^2} \right) u_{rr}^1 \right] \\ \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 - 1} \delta p^1 - \frac{\gamma_1^2 - 2}{\gamma_1^2 - 1} \frac{k_1}{2r} \delta u^1 + \gamma_1^2 \delta q^1 &= k_1^2 (\tau_{rz}^1 + p_{rr}^1 + q_{rr}^1) + 2k_1 u_r^1 + \\ &+ \frac{k_1}{r} \frac{\gamma_1^2 - 2}{\gamma_1^2 - 1} u^1 + \frac{k_1^2}{r} (p_r^1 + q_r^1 - \sigma_r^1) + \frac{k_1^3}{2r} \left( 1 - \frac{2}{\gamma_1^2} \right) u_{rr}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta\sigma^1 - \frac{\gamma_1^2 - 2}{\gamma_1^2 - 1} \delta p^1 - \frac{k_1}{2r} \frac{3\gamma_1^2 - 4}{\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1)} \delta u^1 = \frac{k_1}{r} \frac{3\gamma_1^2 - 4}{\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1)} u^1 \\
& \delta u^2 + \gamma_2 \delta \tau^2 - \frac{k_2}{2r} (\gamma_2^2 - 1)^{-1} \delta p^2 - \frac{k_2}{2r} \delta q^2 = \frac{k_2^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2^2}\right) v_{rz}^2 + \\
& + \frac{k_2^2}{2} \left( u_{rr}^2 + \frac{2}{\gamma_2} p_{rz}^2 + \frac{1}{\gamma_2} \tau_{rz}^2 \right) + k_2 (p_r^2 + q_r^2 + \tau_z^2) + \frac{k_2}{\gamma_2} (v_r^2 + u_z^2) + \\
& + \frac{k_2^2}{2r} \left[ \left(1 - \frac{2}{\gamma_2^2}\right) u_r^2 + \frac{1}{\gamma_2} (\tau_r^2 + p_z^2 + q_z^2 - \sigma_z^2) \right] + \frac{k_2}{r} (p^2 + q^2 - \sigma^2) + \\
& \quad + \frac{k_2^3}{4r} (p_{rr}^2 + q_{rr}^2 - \sigma_{rr}^2) \\
& \delta v^2 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - 1} \delta p^2 - \frac{k_2}{2r} \delta \tau^2 - \frac{k_2}{2r} \frac{\gamma_2^2 - 2}{\gamma_2^2 - 1} \delta u^2 = \frac{k_2^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2^2}\right) u_{rz}^2 + \\
& \quad + \frac{k_2^2}{2r} \left(1 - \frac{2}{\gamma_2^2}\right) u_z^2 + \frac{k_2^2}{2} \left(2\tau_{rz}^2 + p_{rr}^2 + q_{rr}^2 + \frac{1}{\gamma_2^2} v_{rr}^2\right) + \\
& + k_2 (p_z^2 - q_z^2 + \tau_r^2 + u_r^2 + v_z^2) + \frac{k_2^3}{4r} \left(1 - \frac{2}{\gamma_2^2}\right) u_{rr}^2 + \frac{k_2^2}{2r} (p_r^2 + q_r^2 - \sigma_r^2 + \tau_z^2) + \\
& \quad + \frac{k_2^3}{4r\gamma_2^2} \tau_{rr}^2 + \frac{k_2}{r} \frac{\gamma_2^2 - 2}{\gamma_2^2 - 1} u^2 + \frac{k_2}{r\tau_2} \\
& \quad - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - 1} \delta p^2 + \gamma_2^2 \delta q^2 - \frac{\gamma_2^2 - 2}{\gamma_2^2 - 1} \frac{k_2}{2r} \delta u^2 = k_2^2 (\tau_{rz}^2 + p_{rr}^2 + q_{rr}^2) + \\
& + \frac{k_2^2}{r} (p_r^2 + q_r^2 - \sigma_r^2) + 2k_2 u_r^2 + \frac{k_2^3}{2r} \left(1 - \frac{2}{\gamma_2^2}\right) u_{rr}^2 + \frac{k_2}{r} \frac{\gamma_2^2 - 2}{\gamma_2^2 - 1} u^2 \\
& \delta\sigma^2 - \frac{\gamma_2^2 - 2}{\gamma_2^2 - 1} \delta p^2 - \frac{k_2}{2r} \frac{3\gamma_2^2 - 4}{\gamma_2^2(\gamma_2^2 - 1)} \delta u^2 = \frac{k_2}{r} \frac{3\gamma_2^2 - 4}{\gamma_2^2(\gamma_2^2 - 1)} u^2
\end{aligned}$$

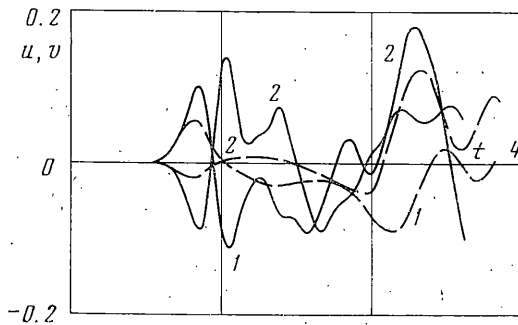
Поскольку фактический счет можно проводить лишь для конечных интервалов изменения  $r$  и  $z$ , необходимо задаться граничными условиями для поверхностей  $r = \max r$ ,  $z = \max z$ . Условия были приняты такими, чтобы отсутствовал эффект отражения возмущений от этих границ. Значения функций на последних трех линиях принимались одинаковыми. Хотя такие граничные условия (полное поглощение) не вполне отвечают действительному развитию решения после достижения фронтом возмущений этих границ, они кажутся приемлемыми, если расчетная область достаточно велика.

Разностная расчетная схема поставленной задачи была реализована на ЭВМ (сетка 170 на 96) при следующих значениях исходных данных:  $\Delta r = \Delta z = 0.025$ ,  $\Delta t^1 = 0.5\Delta t^2 = 0.00625$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.87$ ,  $hr_*^{-1} = 0.5$ ,  $\rho_2 a_2^2 (\rho_1 a_1^2)^{-1} = 8$ ,  $a_2 = 2a_1$ ,  $b_2 = 2b_1$ ,  $r_1 = 0.003$ ,  $k_1 = \Delta t^1 \Delta r^{-1}$ ,  $k_2 = \Delta t^2 \Delta r^{-1}$ . На отрезке времени до  $t = 0.3$  интегрирование проводилось с более мелким шагом  $\Delta t^1 = 0.5\Delta t^2 = 0.0025$  для увеличения точности расчета начального участка процесса формирования волновых полей.

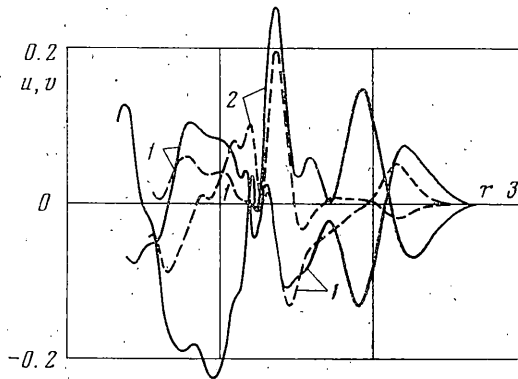
Результаты расчетов представлены изменением различных функций в зависимости от времени в фиксированных точках и распределением этих же функций по координате на определенные моменты времени. Расчет был проведен и при другой толщине слоя  $hr_*^{-1} = 0.6$ , а также для случая однородного полупространства и для случая, когда слой опирался на жесткое полупространство.



Фиг. 1



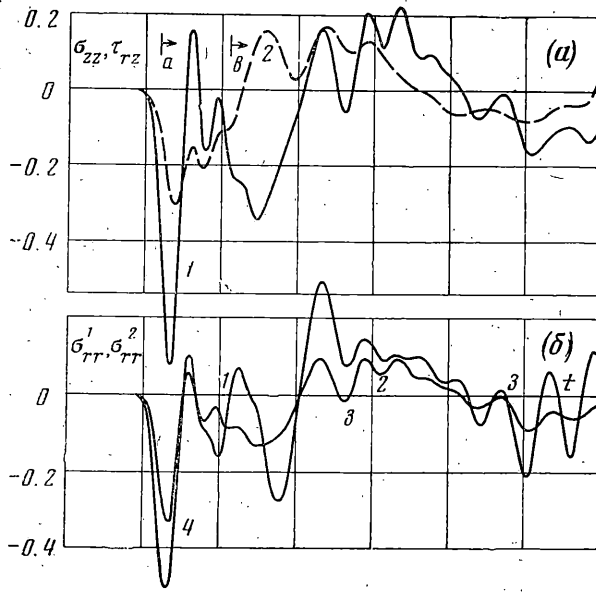
Фиг. 2



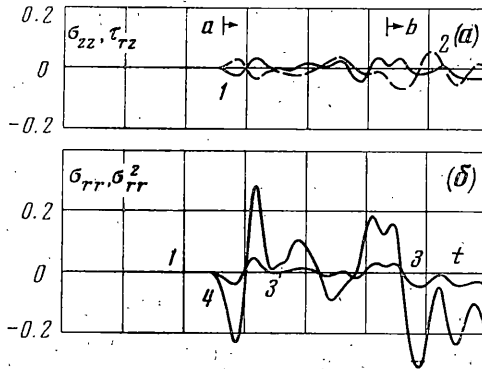
Фиг. 3

Анализ полученной информации выявляет некоторые особенности в процессе распространения возмущений в среде. На всех фигурах напряжения и скорости в слое и полупространстве даны в едином масштабе, т. е. пересчет величин напряжений и скоростей, показанных на фигурах, нужно делать умножением соответственно на  $\rho_1 a_1^2$  и  $a_1$ .

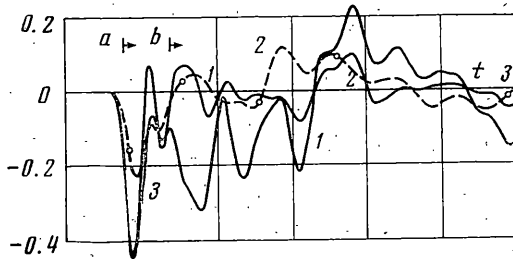
1. Изменение скоростей в точках поверхности  $z=0$ . Зависимость скоростей  $u, v$  (кривые 1,2) от времени представлена на фиг. 1, 2 для точек поверхности  $r=0.55$  и  $r=2.0$ . Сплошные линии соответствуют слоистому полупространству  $hr_*^{-1}=0.5$ , а пунктирные — однородному полупространству. Отметим, что в точке  $r=0.55$  про-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

исходит отрыв фронта возмущений, идущих в слое со скоростью  $a_1$ , от фронта внешней нагрузки. В том и другом случае скорости совпадают до момента прихода первых отраженных фронтов в рассматриваемые точки. В точке  $r=0.55$  в момент  $t=1.0$  приходит отраженная от границы раздела двух сред волна сжатия, возбуждающая дополнительные колебания, превышающие почти на порядок колебания, наблюдаемые в однородном случае в соответствующем интервале времени.

В точке  $r=2.0$  различие в зависимостях скоростей от времени в двух случаях отмечается с самого начала. Это связано с тем, что в рассматриваемую точку одновременно приходит оторвавшаяся от фронта внешней нагрузки продольная волна, идущая по слою со скоростью  $a_1$ , и коническая волна, распространяющаяся от поверхности раздела. В начальные моменты времени влияние конической волны приводит к усилению скоростей колебаний в два — четыре раза, которое в дальнейшем увеличивается и достигает одного порядка. Максимальные амплитуды колебаний в обоих случаях соответствуют прохождению на этом расстоянии хорошо сформированной поверхностной группы волн. Амплитуды в поверхностной волне для двух случаев различаются не столь значительно. В более удаленных точках поверхности вначале появляется фронт конической волны, и первое колебание происходит по нормали к фронту в направлении его распространения.

Распределение скоростей при  $t=2.0$  по  $r$  для точек поверхности показано на фиг. 3 (кривые обозначены так же, как и на фиг. 1, 2). Фронты поверхностной волны совпадают, а величины скоростей на этих фронтах примерно одинаковы.

По распределению скоростей вдоль  $r$  для различных уровней  $z$  можно построить поле вектора скоростей для фиксированных моментов времени, позволяющее проследить закономерности формирования и распространения возмущений. Проведенное исследование волновых полей показывает, что интенсивность движения в полупространстве значительно меньше, чем в слое.

## 2. Концентрация напряжений на границе раздела.

Изменение напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{rz}$  во времени для двух точек поверхности контакта ( $hr_*^{-1}=0.5$ ) представлено на фиг. 4, 5. В первую точку  $r_1=0.55$  вначале приходит фронт волны сжатия и создает сжимающие напряжения  $\sigma_{zz}$  (кривая 1 на фиг. 4, а; максимум равен 0.72),  $\sigma_{rr}^1$  и  $\sigma_{rr}^2$  и  $\tau_{rz}$  (кривые 3 и 4 на фиг. 4, б). После нескольких затухающих колебаний в волне сжатия в эту точку приходит и волна сдвига, которая вначале увеличивает сжимающее напряжение  $\sigma_{zz}$ , а касательное напряжение  $\tau_{rz}$  (кривая 2 на фиг. 4, а) делает положительным. Затем с момента  $t=1.25$  напряжение  $\sigma_{zz}$  уменьшается и меняет знак (растяжение).

Нормальные напряжения  $\sigma_{rr}$  в точке  $r_1$  различны при подходе к ней со стороны областей 1 и 2; в волне сжатия они изменяются в фазе, а после прихода фронта волны сдвига  $\sigma_{rr}^2$  становится растягивающим. В дальнейшем напряжения  $\sigma_{rr}$  переходят в растягивающие одновременно, а с момента  $t=2.6$  снова имеют разный знак. На фиг. 5 приводятся аналогичные кривые для точки  $r_2=2.0$ .

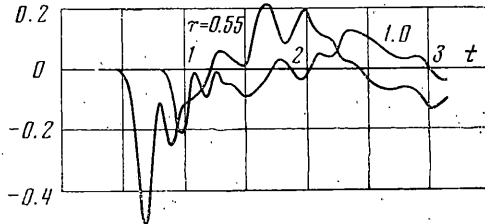
Общий характер изменения напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  и  $\tau_{rz}$  при прохождении волновых фронтов сохраняется и в точке  $r=0.55$  на глубине  $z=0.25$  (фиг. 6,  $hr_*^{-1}=0.5$ ). Однако здесь максимальные напряжения  $\sigma_{zz}$  (кривая 1) достигают лишь 60% того, что наблюдалось в точке  $r_1$  плоскости контакта, хотя в однородном полупространстве амплитуды напряжений на фронтах волн монотонно затухают при удалении от места воздействия. Напряжения  $\sigma_{rr}$  (кривая 3) и  $\tau_{rz}$  (кривая 2) в этой точке также на 10–20% ниже, чем  $\sigma_{rr}^2$  и  $\tau_{rz}$  в точке  $r_1$ .

Для случая  $hr_*^{-1}=0.6$  изменение напряжений в точке  $r=0.55$  поверхности контакта почти такое же, что и для случая  $hr_*^{-1}=0.5$ . С увеличением относительной глубины на 0.1 уменьшение максимальных амплитуд на фронте волны сжатия достигает 3–5%, а на фронте волны сдвига — 5–10%.

Анализ полученной информации позволил обнаружить еще одну закономерность. При волновом процессе в однородном полупространстве на фронте волны сжатия подтверждается пропорциональность между  $\sigma_{zz}$  и  $v$ , а также между  $\sigma_{rr}$  и  $u$ , как это было бы в одномерной задаче. Сравнение скоростей и напряжений в точке  $r=0.55$ ,  $z=0.25$  показывает, что в волне сжатия  $\sigma_{zz} \sim v$  с коэффициентом, близким к -1. Однако после прихода волны сдвига эта пропорциональность нарушается. Аналогичное сравнение скоростей и напряжений в точках контакта двух сред не дает пропорциональности даже на фронте волны сжатия. Таким образом, для слоистой модели полупространства «одномерное приближение» оказывается не удовлетворительным.

На фиг. 7 представлена зависимость комбинации  $\tau_{rz} + k\sigma_{zz}$  от времени в точках контакта  $z=hr_*^{-1}=0.5$ . Значение коэффициента трения  $k$  принято равным 0.3. Видно, что в первой точке возможно скольжение слоя по полупространству при  $t > 1.22$ , а во второй — после  $t=1.72$ .

Если предположить, что слой лежит на жестком полупространстве, то, как показывает расчет, получается увеличение амплитуд скорости точек границы  $z=0$  в области «возможного выброса» примерно на 30% по сравнению с рассмотренным



Фиг. 7

основным случаем. На 20–25% увеличиваются напряжения на фронте волны сжатия в точках контакта. Вместе с тем наблюдается и более быстрое затухание колебаний и к моменту  $t=1.5$  максимальные скорости в районе возможного выброса на поверхности  $z=0$  становятся равными. Таким образом случай, когда  $\rho_2 a_2^2 / \rho_1 a_1^2 = 8$ , практически мало отличается от случая, когда это отношение акустических жесткостей бесконечно.

Поступила 2 VIII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. Сабодаш П. Ф., Чердниченко Р. А. Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн. ЦМТФ, 1971, № 4.