МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 539.374

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Н. А. ЕСЕНИНА

(Ленинград)

Методом конечных разностей решается задача о нелинейном взаимодействии одномерных упругопластических волн в средах, описываемых диаграммой $\sigma-\varepsilon$ произвольного вида. Исследуется влияние свойств среды и форм взаимодействующих волн на суммарные движения точек среды. В частном случае столкновения волн одинаковой формы и интенсивности рассмотрено влияние свойств среды на коэффициенты отражения упругопластических волн от жесткой стенки.

1. Рассмотрим однородный упругопластический стержень конечной длины L. Исследование проводим в безразмерных переменных x, t, σ, v, которые вводим по формулам

$$\sigma=\frac{\sigma_x}{\rho_0 a_0^2},\qquad v=\frac{v_x}{a_0},\qquad x=\frac{X}{a_0\tau},\qquad t=\frac{T}{\tau},\qquad l=\frac{L}{a_0\tau},\qquad a_0=\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon}}$$

где τ — характерное время действия нагрузки, ρ_0 — начальная плотность материала, a_0 — скорость распространения возмущений. Считаем, что напряжения при сжатии положительны.

В этих переменных уравнения движения и неразрывности стержня имеют вид

$$v_t+\sigma_x=0,\qquad v_x+\varepsilon'(\sigma)\sigma_t=0 \tag{1.1}$$

В начальный момент времени стержень находится в состоянии покоя

$$\sigma(x,0)=v(x,0)=0 \tag{1.2}$$

На концах его заданы напряжения как функции времени

$$\sigma(0,t)=\beta_0(t),\qquad \sigma(l,t)=\beta_1(t) \tag{1.3}$$

Уравнение состояния стержня задаем в виде

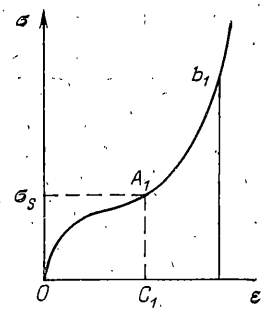
$$\varepsilon=\begin{cases} k^{-1}\sigma+(k-1)k^{-1}\sigma^{k+1} & (\sigma_m\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s)\\ \sigma^n+c_1 & (\sigma_s\leqslant\sigma_m\leqslant\sigma)\\ \sigma_m{}^n+c_1+\varepsilon_p{}'(\sigma-\sigma_m) & (\sigma<\sigma_m)\end{cases} \tag{1.4}$$

$$c_1=k^{-1}\sigma_s+(k-1)k^{-1}\sigma_s{}^{k+1}-\sigma_s{}^n,\quad \sigma_m=\sup\ \{\max\sigma(t')\}\qquad (0\leqslant t'\leqslant t)$$

Эта диаграмма σ-ε представлена на фиг. 1. Здесь точка A_1 является точкой излома нагрузочной ветви, нелинейность выпуклого OA_1 и вогнутого A_1B_1 участков характеризуют параметры k и n соответственно.

При $\sigma_s=0$ нагрузочная ветвь задается либо в виде $\varepsilon=k^{-1}\sigma+(k-1)k^{-1}\sigma^{k+1}$ (при $k>1$ это будут диаграммы, выпуклые к оси σ), либо в виде $\varepsilon=\sigma^n$ (при $0<n<1$ это будут диаграммы σ-ε, выпуклые к оси ε). Параметр ε_p' характеризует наклон разгрузочной ветви. При $\varepsilon_p'=0$ разгружение материала происходит при постоянной плотности.

Систему уравнений с начальными и граничными условиями (1.1)—(1.4) решаем методом конечных разностей по неявной схеме [1]. Исследуем влияние свойств среды и форм взаимодействующих волн на суммарные движения точек среды. В дальнейшем на графиках нижний индекс у зависимостей $\sigma(t)$, $v(t)$ будет обозначать сечение, для которого они построены.



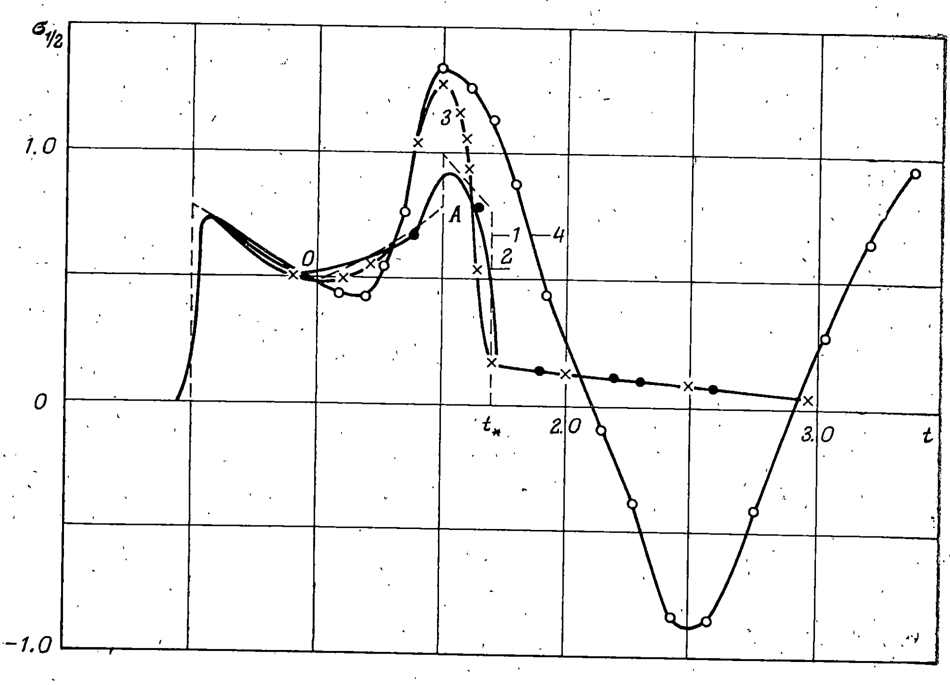
Фиг. 1

2. Пусть $\beta_0(t)=\beta_1(t)$. В этом случае в стержне произойдет столкновение двух волн одинаковой формы и интенсивности, которое можно рассматривать как отражение одной из волн от жесткой стенки, расположенной в месте их столкновения.

Точность получаемого решения проверим на следующей модельной задаче об отражении упругопластической волны от жесткой стенки. Полагаем $\beta_0(t)=\beta_1(t)=e^{-t}$, $\sigma_s=0$, $n=1$, $\varepsilon_p'=0$. Согласно [2] решение этой задачи сводится к уравнению

$$\frac{dv_-^2}{dt}=\frac{e^{-t}}{2-t}-\frac{1}{(2-t)^2}+\frac{e^{-(2-t)}}{(2-t)^2}\qquad (1\leqslant t<2)$$

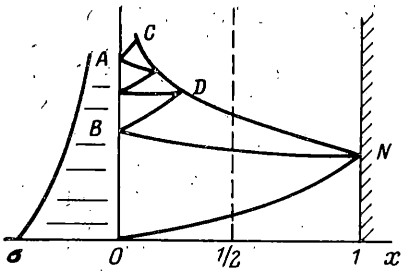
где v_- — скорость перед фронтом отраженной ударной волны.



Фиг. 2

Сравнение аналитического решения с численным приведено на фиг. 2, кривые *1* и *2* соответственно. Отсюда видим, что численное решение достаточно точно воспроизводит сложную волновую картину отражения упругопластических волн от жесткой стенки. Например, такие детали поля, как предвестник OA, на котором происходит догружение среды, и момент истощения отраженной волны t_* [2]. Погрешность в определении максимальных напряжений составляет при этом $\sim 5\%$.

Исследуем влияние параметров σ_s, n, k, ε_p' на результаты отражения волн. Пусть $\sigma_s=0$, $n=1/2$, $\varepsilon_p'=0.2$. Волновая картина отражения в этом случае по сравнению со случаем $\varepsilon_p'=0$ весьма усложнится за счет области $ABDC$ (фиг. 3), в которой происходит многократное взаимодействие предвестника NB со свободной поверхностью и ударной волной ND. Как показывают расчеты, качественные изменения, вызванные наличием этой области, заключаются в том, что здесь уже не происходит истощения отраженной волны ND до момента выхода ее на свободную поверхность. Взаимодействие волны ND с поверхностью $x=0$ приводит к образованию волны, распространяющейся по стержню со скоростью $a_p=(\varepsilon_p')^{-0.5}$. Эти отличия довольно четко видны при сравнении кривых *3* и *4* (фиг. 2), построенных соответственно для $\varepsilon_p'=0$, 0.2. Дальнейшие расчеты проводим в предположении, что материал не может выдерживать растягивающих напряжений, т. е.



Фиг. 3

$$\sigma(x,t)=0 \quad \text{если} \quad \sigma(x,t)<0 \tag{2.1}$$

Для среды, характеризующейся жесткой разгрузкой $\varepsilon_p'=0$, варьируем основные параметры ветви нагружения σ_s, n, k. Зависимости $\sigma_{1/2}(t)$ для разных параметров представлены на фиг. 4, где кривые *1*–*5* соответствуют значениям: $\sigma_s=0$, $k=8$ (кривая *1*); $\sigma_s=0$, $k=2$ (кривая *2*); $\sigma_s=0$, $n=1$ (кривая *3*); $\sigma_s=0$, $n=1/2$ (кривая *4*); $\sigma_s=0.3$, $k=4$, $n=1/2$ (кривая *5*).

Как видно, при отражении от жесткой стенки центрированных волн Римана (кривые *1*, *2*) отраженные волны дойдут до свободной поверхности. В результате взаимодействия с нею и в силу выполнения условия (2.1) напряжение в стержне в моменты времени t_1 и t_2 становится равным нулю. Затем, наличие начального участка кривой $\sigma(\varepsilon)$ $(\sigma_s\neq 0)$ приводит к значительному снижению максимальных напряжений в отраженной волне по сравнению со случаем $\sigma_s=0$ (кривые *5* и *4* фиг. 4).

Рассмотрим влияние параметров σ_s, k, n на коэффициенты отражения упругопластических волн от жесткой стенки, которые определим как отношение $K^\circ=\sigma_r\sigma_p^{-1}$, где σ_r — максимальное напряжение в отраженной волне, σ_p — максимальное напряжение в падающей волне.

Ниже приведены результаты расчетов K° для разных значений σ_s, k и n

$K^\circ=2.6$	2.5	2.2	2.6	2.1	$(n=0.5)$
$K^\circ=3.6$	2.9	2.4	3.4	2.4	$(n=0.25)$
$\sigma_s=0$	0.3	0.3	0.6	0.6	
$k=-$	1	4	1	4	

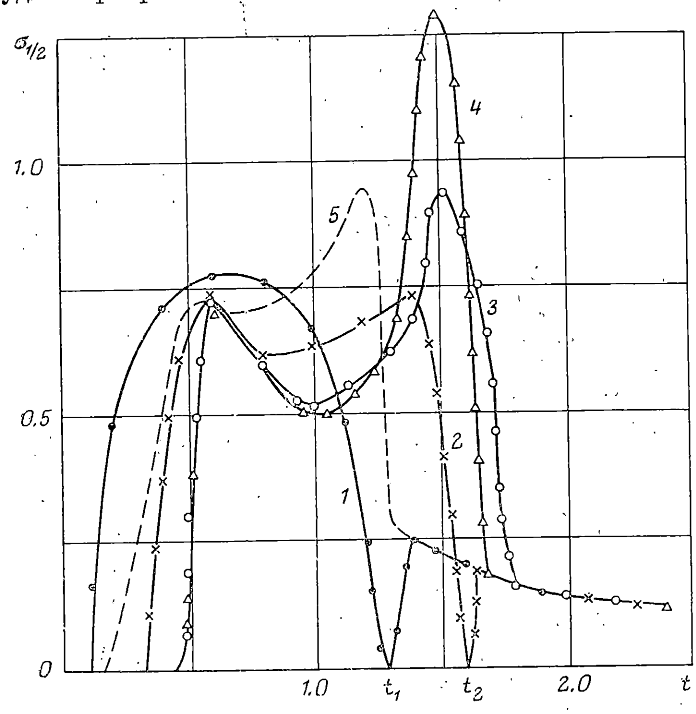
Как видно, наличие начального участка $\sigma_s\neq 0$ диаграммы σ-ε, особенно его нелинейности $k\neq 1$, приводит к уменьшению K° по сравнению со случаем вогнутых диаграмм. Причем для некоторых соотношений между $\max\sigma(0, t)$, σ_s, k и n это уменьшение может быть весьма существенным.

3. Рассмотрим далее наиболее типичные случаи несимметричного сжатия упругопластического стержня, когда $\beta_0(t)\neq\beta_1(t)$.

Зададим внешнюю нагрузку в виде

$$\beta_1(t)=e^{-t},\quad \beta_0(t)=\begin{cases} ct/t_n & (t\leqslant t_n)\\ ce^{-(t-t_n)} & (t>t_n,\ t_n\neq 0)\end{cases} \tag{3.1}$$

При $t_n=0$, $\beta_0(t)=ce^{-t}$, когда $c=1$, имеем случай, рассмотренный в п. 2. Состояние среды описываем уравнением (1.4). Параметры k и n в процессе счета будем варьировать.

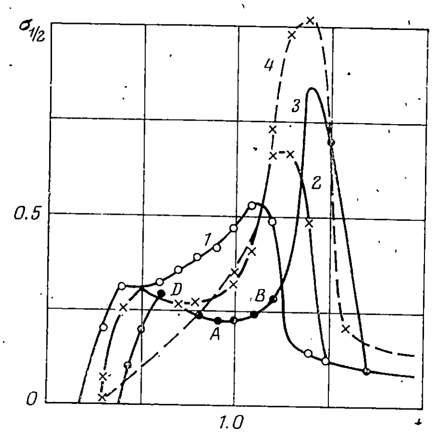


Фиг. 4

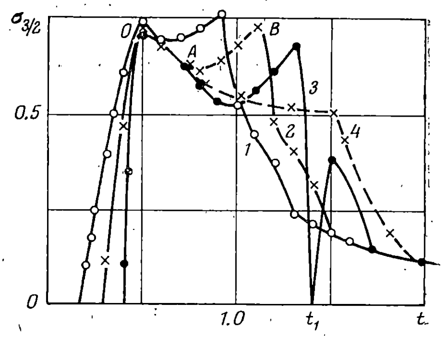
Пусть теперь $c=0.4$. В этом случае произойдет столкновение ударной волны, распространяющейся от поверхности $x=2$ в направлении, противоположном оси x с центрированной волной Римана, если $t_n=0$, или с расходящейся волной Римана, когда $t_n\neq 0$.

Фиксируя $n=0.5$, будем варьировать параметры k и t_n, которые характеризуют соответственно нелинейность начального участка диаграммы и время нарастания внешней нагрузки до максимума. Результаты расчетов для значений $k=4$, 2, 1 (кривые *1—3*) при $t_n=0$ приведены на фиг. 5, 6, где представлены зависимости $\sigma_{1/2}(t)$, $\sigma_{3/2}(t)$. Первый максимум на этих кривых соответствует максимальному напряжению в падающих волнах, а второй — максимальному напряжению в отраженных волнах, которые образуются при столкновении.

Отметим, что увеличение нелинейности приводит к значительному уменьшению напряжения в отраженной волне в сечении $x={}^1/_2$. Поэтому при $k\neq 1$ максимальные напряжения наблюдаются в сечении $x={}^3/_2$, а при



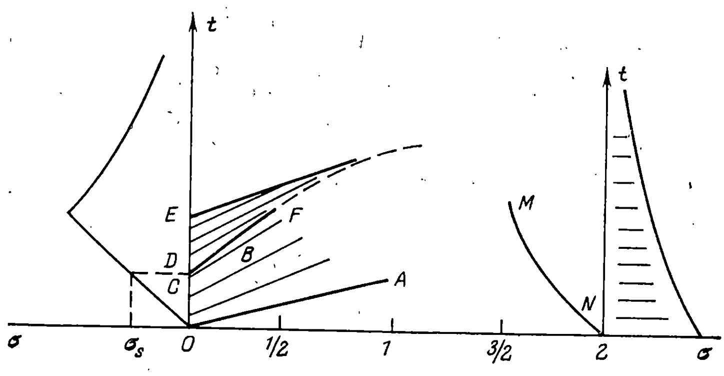
Фиг. 5



Фиг. 6

$k=1$ — в сечении $x={}^1/_2$. Отметим также, что с увеличением нелинейности уменьшается время, в течение которого происходит разгружение и вторичное догружение материала, т. е. уменьшается область OAB на фиг. 5, 6. Например, при $k=4$ в сечении $x={}^1/_2$ (фиг. 5) эта область практически отсутствует. После прохождения падающей волны в этом сечении не происходит разгружения материала. Кроме того, при $k\neq1$ отраженная волна в сечении $x={}^3/_2$ истощается до момента выхода на поверхность $x=2$. В случае же $k=1$ отраженная волна в момент времени $t=t_1$ доходит до поверхности $x=2$ и взаимодействует с нею.

Влияние времени нарастания на столкновение волн видно при сравнении кривых *4* и *2* (фиг. 5, 6). Кривая *4* здесь соответствует случаю $k=2$,

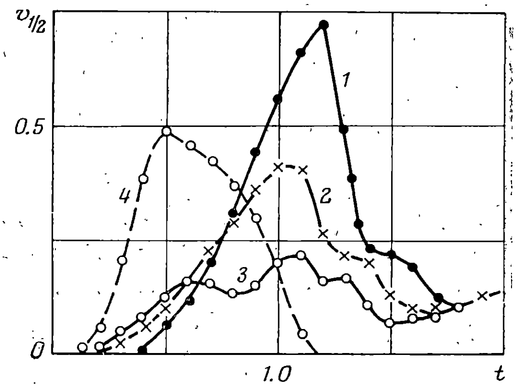


Фиг. 7

$t_n=1$. Как видно, столкновение с расходящейся волной Римана приводит к исчезновению отраженной волны в сечении $x={}^3/_2$. В этом сечении после прохождения падающей волны частицы будут постоянно находиться в стадии разгрузки.

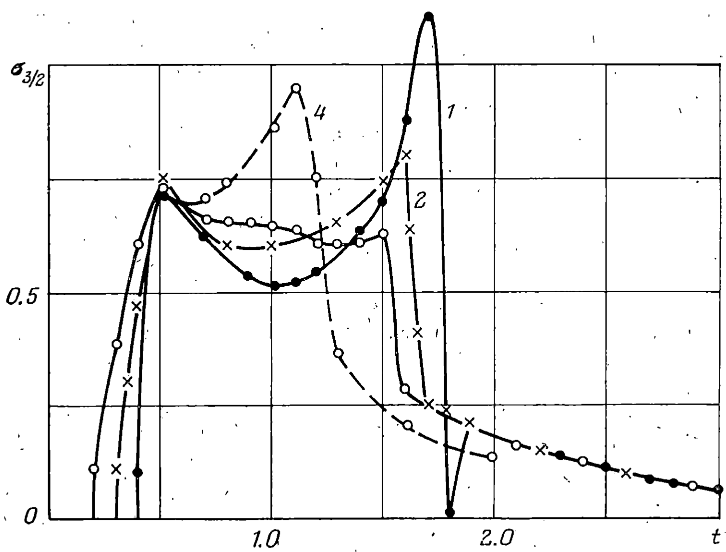
4. Положим теперь $t_n=c=1$. В этом случае ударная волна NM (фиг. 7) сталкивается со сложной системой характеристик. Система характеристик состоит из расходящейся волны Римана $OABC$ и следующей за ней системы сходящихся характеристик DEF, пересечение которых приводит к образованию сильного разрыва.

Исследуем влияние нелинейности начального участка диаграммы на столкновение волн. Результаты расчетов для значений $k=1$, 2, 4 (кривые 1—3) представлены в виде зависимостей $v_{1/2}(t)$ и $\sigma_{3/2}(t)$ на фиг. 8, 9. Увеличение нелинейности приводит к значительному уменьшению смещений и максимальных скоростей в сечении $x={}^1/_2$. В сечении $x={}^3/_2$ с ростом k уменьшается максимальное значение напряжения в отраженной волне. В частности, при $k=4$ отраженная волна в этом сечении отсутствует.



Фиг. 8

Кривая 4 здесь соответствует случаю $t_n=0$, $k=4$. Сравнение кривых 3 и 4 показывает, что увеличение времени нарастания внешней нагрузки до максимума здесь аналогично по своему действию нелинейности начального



Фиг. 9

участка диаграммы, т. е. уменьшает максимальную скорость в сечении $x={}^1/_2$ и приводит к исчезновению отраженной волны в сечении $x={}^3/_2$. Кроме того, при $t_n\neq0$ движение частицы в сечении $x={}^1/_2$ имеет более резко выраженный колебательный характер, чем при $t_n=0$.

Поступила 3 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Есенина Н. А.* Конечно-разностные методы для решения одномерных упругопластических задач. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 1.
2. *Зволинский Н. В.* Отражение и преломление плоской пластической волны при наличии граничной плоскости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.