МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 539.3 : 543.231.1

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

У. К. НИГУЛ

(Таллин)

Рассматриваются одномерные нестационарные волновые процессы, которые описаны квазилинейным волновым уравнением и при нулевых начальных условиях возбуждены краевым воздействием типа конечного импульса произвольной формы, удовлетворяющей условиям гладкости, обеспечивающим существование хотя бы некоторого начального этапа волнового процесса, на котором ударных волн (бесконечных разрывов вторых производных) не возникает. Используя обнаруженный в [1] факт существования одного семейства прямых характеристик, вдоль которых первые производные сохраняют постоянные значения, построены точные решения, обобщающие результаты работ [2–6]. Из этих точных решений выведены асимптотические представления решения вдоль характеристик квазилинейного и соответствующего линейного волнового уравнения. Установлено, что асимптотическое представление решения вдоль характеристик линейного волнового уравнения совпадает с приближенным решением, полученным в [7] методом последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений, предложенным в [8] для реализации идеи итерационного приближения, широко используемого в нелинейной акустике и механике [9–11], применительно к задачам о распространении импульса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерные волновые процессы, зависящие от времени t и от координаты X. Пусть точка обозначает производную по t, а штрих — производную по X.

Будем описывать волновые процессы при помощи функции $U(X, t)$, являющейся решением квазилинейного волнового уравнения

$$c^{-2}U^{\cdot\cdot}(X, t)-q(U')U''(X, t)=0 \tag{1.1}$$

где $c=\text{const}$, $q(U')$ — заданная однозначная непрерывная функция от U', которая имеет непрерывные первые производные по U' и удовлетворяет следующим условиям:

$$q(0)=1, \quad q(U')>0 \quad \text{при } |U'|<K, \quad K=\text{const}>0 \tag{1.2}$$

Рассмотрим при $t\geqslant 0$, $X\geqslant 0$ интегрирование уравнения (1.1) при следующих условиях.

а) Заданы начальные условия

$$U(X, 0)=0, \qquad U^{\cdot}(X, 0)=0 \tag{1.3}$$

б) задано одно из следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} &U'(0, t)=\varepsilon\psi(t)[H(t)-H(t-t_0)] \\ &U^{\cdot}(0, t)=-\varepsilon\psi(t)[H(t)-H(t-t_0)] \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varepsilon=\text{const}$, $t_0=\text{const}>0$, $\psi(t)$ — произвольная непрерывная функция, которая при $0\leqslant t\leqslant t_0$ имеет конечную первую производную и удовлетворяет условиям

$$\psi(0)=0, \qquad \psi(t_0)=0, \qquad \max|\psi(t)|=1 \tag{1.5}$$

При сформулированных условиях решение уравнения (1.1) представляет собой импульс (волну), который с ростом t распространяется в направлении роста X. Ниже представлены точные и асимптотические формулы, которые описывают распространение этого импульса до возникновения бесконечного разрыва вторых производных (ударной волны). Эти формулы, в частности, показывают как по мере роста времени в случае условий (1.3), (1.4) решение квазилинейного волнового уравнения (1.1) отклоняется от решения соответствующего линейного волнового уравнения (при обоих краевых условиях (1.4) решение линейного волнового уравнения одинаково).

Отметим, что задачи интегрирования частных видов уравнения типа (1.1) возникают при описании одномерных волновых процессов в лагранжевой системе декартовых координат на основе нелинейной теории упругости [2, 4, 5, 10, 12, 13] и простейших вариантов нелинейной теории продольной деформации упругих стержней и пластин [14–16] или же нелинейной теории идеальной сжимаемой жидкости [1, 3, 4, 7, 9]. Свойства реальных веществ таковы, что применение этих теорий, как правило, может себя оправдать только при математическом моделировании таких волновых процессов., при которых выполняется условие $|U'|\ll 1$. Поэтому в рамках упомянутых теорий функция $q(U')$ в уравнении (1.1) часто используется в виде разложения (k_1, k_2, ... — постоянные коэффициенты)

$$q(U')=1+k_1U'+k_2(U')^2+\ldots,\quad 1\gg|k_1U'|\gg|k_2|(U')^2\gg\ldots \tag{1.6}$$

В нелинейной теории упругости, например, функция $q(U')$ приобретает вид (1.6), если использовать традиционное представление функции энергии в виде разложения по степеням компонентов тензора деформации. При этом постоянные так называемой пятиконстантной теории упругости определяют численное значение k_1, а для вычисления следующих коэффициентов разложения (1.6) необходимо ввести в рассмотрение более точные модели упругой среды.

С точностью нелинейной теории идеальной сжимаемой жидкости в уравнении (1.1)

$$q(U')=(1+U')^{-(1+\gamma)} \tag{1.7}$$

где γ — показатель адиабаты. Поскольку эта теория, как правило, применима только в случае $|U'|\ll 1$, то формула (1.7) может быть заменена разложением вида (1.6).

Легко убедиться в том, что в случае задач, сформулированных выше, решение уравнения (1.1) удовлетворяет условию $|U'|\ll 1$, если в краевых условиях (1.4) ε удовлетворяет условию $|\varepsilon|\ll 1$. Говоря об асимптотических представлениях точных решений, будем иметь в виду именно этот случай и интерпретируем ε как малый параметр.

2. Точное решение и асимптотика общего вида для случая первого краевого условия (1.4). Покажем, что до появления бесконечных разрывов вторых производных при произвольной функции $q(U')$, удовлетворяющей условиям (1.2), точное решение уравнения (1.1) для начальных условий (1.3) и первого из краевых условий (1.4) может быть записано в виде

$$U(X,t)=-H(y)\varepsilon c\int_0\int_0\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau\,dz- \tag{2.1}$$

$$-H(y)\varepsilon X\lambda(y)\int_0\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau+H(y)\varepsilon X\psi(y)+$$

$$+H(y-t_0)\varepsilon c\int\limits_{t_0}^{y}\int\limits_{t_0}^{z}\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau\, dz+$$

$$+H(y-t_0)\varepsilon X\lambda(y)\int\limits_{t_0}^{y}\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau-H(y-t_0)\varepsilon X\psi(y)$$

$$y(X,t)=t-c^{-1}X\lambda(y),\qquad \lambda(y)=+[q(U')]^{-1/2} \tag{2.2}$$

Из (2.2) вытекают соотношения

$$\frac{\partial y}{\partial X}=-c^{-1}\lambda(y)[\Phi(X,y)]^{-1},\qquad \frac{\partial y}{\partial X}=[\Phi(X,y)]^{-1} \tag{2.3}$$

$$\Phi(X,y)=1+c^{-1}X\frac{d\lambda(y)}{dy}$$

С применением (2.3) нетрудно из (2.1) вывести следующие формулы:

$$U'(X,t)=[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon\psi(y) \tag{2.4}$$

$$U^{\bullet}(X,t)=-H(y)\varepsilon c\int\limits_{0}^{y}\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau+H(y-t_0)\varepsilon c\int\limits_{t_0}^{y}\frac{1}{\lambda(\tau)}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau$$

$$U''(X,\ t)=-[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon c^{-1}\lambda(y)[\Phi(X,\ y)]^{-1}\psi^{\bullet}(y)$$

$$U^{\bullet\bullet}(X,\ t)=-[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon c[\lambda(y)\Phi(X,\ y)]^{-1}\psi^{\bullet}(y)$$

Используя (2.4), легко проверить, что (2.1) действительно представляет собой точное решение уравнения (1.1) для начальных условий (1.3) и первого из краевых условий (1.4). Это решение относится к той области изменения X и t, где $\Phi(X,\ y)\geqslant 0$, т. е. сохраняет силу до возникновения ударных волн, что имеет место при $\Phi(X,y)=0$.

Используя (2.2), несложно исключить $\lambda(y)$ из формул (2.1), (2.4) и записать их в следующем виде:

$$U(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\Big\{-\varepsilon c\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{0}^{z}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau\, dz- \tag{2.5}$$

$$-\varepsilon X[q(\varepsilon\psi(y))]^{-1/2}\int\limits_{0}^{y}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau+\varepsilon X\psi(y)\Big\}-$$

$$-H(t_1-t_0)\Big\{\varepsilon c\int\limits_{0}^{t_0}\int\limits_{0}^{z}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau\, dz+$$

$$+\varepsilon c(t-t_0)\int\limits_{0}^{t_0}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau\Big\}$$

$$U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon\psi(y)$$

$$U^{\bullet}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c\int\limits_{0}^{y}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau-$$

$$-H(t_1-t_0)\varepsilon c\int\limits_{0}^{t_0}[q(\varepsilon\psi(\tau))]^{1/2}\psi^{\bullet}(\tau)d\tau$$

$$U''(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c^{-1}[q(\varepsilon\psi(y))]^{-1/2}[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y),$$
$$U^{\cdot\cdot}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c[q(\varepsilon\psi(y))]^{1/2}[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$t_1=t-c^{-1}X,\qquad \Phi(X,y)=1-\frac{1}{2}\varepsilon c^{-1}X[q(\varepsilon\psi(y))]^{-3/2}\frac{dq(\varepsilon\psi(y))}{d(\varepsilon\psi(y))}\psi^{\cdot}(y),$$

и прямые характеристики уравнения (1.1) определены уравнениями

$$y(X,t)=t-c^{-1}X[q(\varepsilon\psi(y))]^{-1/2}\ \text{при}\ 0\leqslant t_1\leqslant t_0 \tag{2.6}$$
$$y(X,t)=t_1\ \text{при}\ t_1\geqslant t_0$$

При конкретно заданных функциях $\psi(t)$ и $q(U')$ по формулам (2.5) можно непосредственно получить точное решение $U(X,t)$, а также его первые и вторые производные. Для этого следует задавать различные значения $y=\text{const}$. Каждое фиксированное значение $y=\text{const}$ определяет на X, t-плоскости конкретную прямую характеристику (2.6) уравнения (1.1), вдоль которой решение и его производные вычисляются по формулам (2.5).

Из формул (2.5) следует, что существуют фронты $t=c^{-1}X$ и $t=c^{-1}X+t_0$. Перед первым фронтом, т. е. при $t<c^{-1}X$, решение $U(X,t)$ тождественно равно нулю, а за вторым фронтом, т. е. при $t>c^{-1}X+t_0$, оно представляет собой линейную функцию от t и соответственно $U'(X,t)\equiv 0$ и $U^{\cdot}(X,t)=$ $=\text{const}$.

Из (2.6) следует, что в области $X\geqslant 0$, $t_1\geqslant t_0$, где $y\geqslant t_0$, характеристики (2.2) уравнения (1.1) параллельны, а в области $X\geqslant 0$, $0\leqslant t_1\leqslant t_0$, где $0\leqslant y\leqslant t_0$, возможно пересечение двух бесконечно близких характеристик. Пусть заданием численного значения y в области $X\geqslant 0$, $0\leqslant t_1\leqslant t_0$ введена в рассмотрение конкретная характеристика (2.2). Эта характеристика пересекается с бесконечно близкой характеристикой в точке $X=X_*$ в момент времени $t=t_*$, если формулы

$$X_*=-c\left[\frac{d\lambda(y)}{dy}\right]^{-1},\qquad t_*=y-\lambda(y)\left[\frac{d\lambda(y)}{dy}\right]^{-1} \tag{2.7}$$

определяют положительные значения X_* и t_*. В соответствии с (2.2) и (2.4) в формулах (2.7) $\lambda(y)=+[q(\varepsilon\psi(y))]^{-1/2}$.

Легко проверить, что указанное условие пересечения характеристик совпадает с критерием $\Phi(X,y)=0$, т. е. при пересечении характеристик возникает бесконечный разрыв вторых производных.

Частный случай (1.6). Рассмотрим случай, когда $|\varepsilon|\ll 1$ и функция $q(U')$ задана в виде разложения (1.6). Подставляя $q(U')$ в форме (1.6) в точные формулы (2.5), имеем следующие асимптотические (при $\varepsilon\to 0$) представления:

$$U(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\Bigg[-\varepsilon c\int_0^y\{\psi(\tau)+{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(\tau)- \tag{2.8}$$
$$-{}^1/_{24}\varepsilon^2(k_1^2-4k_2)\psi^3(\tau)+O(\varepsilon^3)\}d\tau+\varepsilon X\{{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(y)+$$
$$+\varepsilon^2(-{}^5/_{24}k_1^2+{}^1/_2k_2)\psi^3(y)+O(\varepsilon^3)\}\Bigg]-$$
$$-H(t_1-t_0)\varepsilon c\int_0^{t_0}\{\psi(\tau)+{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(\tau)-{}^1/_{24}\varepsilon^2(k_1^2-4k_2)\psi^3(\tau)+O(\varepsilon^3)\}d\tau$$

$$U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon\psi(y)$$
$$U^{\cdot}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c\{\psi(y)+{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(y)-{}^1/_{24}\varepsilon^2(k_1^2-4k_2)\psi^3(y)+O(\varepsilon^3)\},$$

$$U''(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c^{-1}\{1-{}^1/_2\varepsilon k_1\psi(y)+$$
$$+{}^1/_8\varepsilon^2(3k_1^2-4k_2)\psi^2(y)+O(\varepsilon^3)\}[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$U^{\cdot\cdot}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c\{1+{}^1/_2\varepsilon k_1\psi(y)-$$
$$-{}^1/_8\varepsilon^2(k_1^2-4k_2)\psi^2(y)+O(\varepsilon^2)\}[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$\Phi(X,y)=1-{}^1/_2c^{-1}X\{\varepsilon k_1-{}^1/_2\varepsilon^2(3k_1^2-4k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^3)\}\psi^{\cdot}(y)$$

(2.9) $$y=t_1+\varphi,\qquad \varphi=c^{-1}X\eta$$

(2.10) $$\eta=1-\lambda=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\{{}^1/_2\varepsilon k_1\psi(y)-{}^1/_8\varepsilon^2(3k_1^2-4k_2)\psi^2(y)+O(\varepsilon^3)\}$$

Соответственно для анализа в области $0\leqslant t_1\leqslant t_0$ процесса возникновения ударных волн получим из (2.7) формулы

(2.11) $$X_*=2c[\varepsilon\{k_1-{}^1/_2\varepsilon(k_1^2-4k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^2)\}\psi^{\cdot}(y)]^{-1}$$
$$t_*=y+2[\varepsilon\{k_1-\varepsilon(k_1^2-2k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^2)\}\psi^{\cdot}(y)]^{-1}$$

Формулы (2.8) могут быть интерпретированы как асимптотические представления решения вдоль прямых характеристик уравнения (1.1). В фигурные скобки в этих формулах включены разложения по степеням ε.

Некоторые свойства решения, вытекающие из выведенных выше точных и асимптотических формул, были установлены ранее в работах [1–5, 17].

3. Точное решение и асимптотика общего вида для случая второго краевого условия (1.4). Введем в рассмотрение формулу

(3.1) $$U(X,t)=-H(y)\varepsilon c\int_0^y\psi(\tau)d\tau+H(y-t_0)\varepsilon c\int_{t_0}^y\psi(\tau)d\tau-$$
$$-H(y)\varepsilon X\int_0^y\psi(\tau)\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}d\tau+H(y-t_0)\varepsilon X\int_{t_0}^y\psi(\tau)\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}d\tau$$

где $y(X,t)$ и $\lambda(y)$ по-прежнему определены формулами (2.2). Используя (2.3), получим из (3.1)

(3.2) $$U'(X,t)=H(y)\varepsilon\int_0\lambda(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau-H(y-t_0)\varepsilon\int_{t_0}\lambda(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}d\tau$$
$$U^{\cdot}(X,t)=-[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon c\psi(y)$$
$$U''(X,t)=-[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon c^{-1}\lambda^2(y)[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$U^{\cdot\cdot}(X,t)=-[H(y)-H(y-t_0)]\varepsilon c[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$

Используя (3.2), нетрудно проверить, что решение (3.1) точно удовлетворяет уравнению (1.1), начальным условиям (1.3) и второму из краевых условий (1.4) при произвольной функции $q(U')$, удовлетворяющей условиям (1.2). Однако практическое применение формул (3.1), (3.2) оказывается возможным лишь после решения системы из уравнений (2.2) и (3.2) относительно U' и λ, что требует конкретизации функции $q(U')$.

Частный случай (1.6). Рассмотрим область изменения X и t, где отсутствуют ударные волны. Допустим, что $|\varepsilon|\ll 1$ и функция $q(U')$ задана в виде разложения (1.6). Тогда путем последовательного приближения нетрудно вывести из (2.2) и (3.2) следующую асимптотическую формулу:

(3.3) $$\eta=1-\lambda=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\{{}^1/_2\varepsilon k_1\psi(y)-{}^1/_2\varepsilon^2(k_1^2-k_2)\psi^{\cdot}(y)+O(\varepsilon^3)\}$$

Используя (3.3) и применяя обозначения (2.9), получим из (3.1), (3.2) следующие асимптотические формулы (при $\varepsilon\to 0$):

(3.4) $$U(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\Bigg[-\varepsilon c\int_0^y\psi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon X\{{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(y)-{}^1/_3\varepsilon^2(k_1^2-k_2)\psi^3(y)+O(\varepsilon^3)\}\Bigg]-H(t_1-t_0)\varepsilon c\int_0^{t_0}\psi(\tau)\,d\tau$$

$$U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon\{\psi(y)-{}^1/_4\varepsilon k_1\psi^2(y)+{}^1/_6\varepsilon^2(k_1^2-k_2)\psi^3(y)+O(\varepsilon^3)\}$$
$$U^{\cdot}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c\psi(y)$$
$$U''(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c^{-1}\{1+\varepsilon k_1\psi(y)+$$
$$+\varepsilon^2k_2\psi^2(y)+O(\varepsilon^3)\}^{-1}[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$U^{\cdot\cdot}(X,t)=-[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\varepsilon c[\Phi(X,y)]^{-1}\psi^{\cdot}(y)$$
$$\Phi(X,y)=1-{}^1/_2c^{-1}X\{\varepsilon k_1-2\varepsilon^2(k_1^2-k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^3)\}\psi^{\cdot}(y)$$

Аналогично случаю, рассмотренному в п. 2, формулы (3.4) позволяют непосредственное вычисление решения. Для этого следует задать различные значения $y=\mathrm{const}$. Каждое фиксированное значение $y=\mathrm{const}$ позволяет с учетом (3.3) определить прямую характеристику (2.2), вдоль которой решение $U(X,t)$ и его производные вычисляются по формулам (3.4). В области $0\leqslant t_1\leqslant t_0$ это решение сохраняет силу до возникновения бесконечных разрывов вторых производных (ударных волн), т. е. в области таких значений t и X, при которых $\Phi(X,y)>0$. Критерий возникновения ударных волн может быть сформулирован таким же образом, как и в п. 2. При этом для вычисления X_* и t_* в данном случае имеем

(3.5) $$X_*=2c[\varepsilon\{k_1-2\varepsilon(k_1^2-k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^2)\}\psi^{\cdot}(y)]^{-1}$$
$$t_*=t+2[\varepsilon\{k_1-{}^1/_2\varepsilon(3k_1^2-k_2)\psi(y)+O(\varepsilon^2)\}\psi^{\cdot}(y)]^{-1}$$

4. Область применимости метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений. Применяя этот метод в случае задач, рассмотренных в п. 1—3, имеем, например, для U и U' следующие формулы [7]:

(4.1) $$U(X,t)=c[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\Bigg\{-\varepsilon\int_0^{t_1}\psi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{8}(1+T)k_1\int_0^{t_1}\psi^2(\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}k_1c^{-1}X\psi^2(t_1)\right]+$$

$$+\varepsilon^3\Bigg[\frac{1}{12}(1+T)\left(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2-k_2\right)\int_0^{t_1}\psi^3(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2-k_2\right)c^{-1}X\psi^3(t_1)-\frac{1}{24}k_1^2c^{-2}X^2\frac{\partial}{\partial t}\psi^3(t_1)\Bigg]+O(\varepsilon^4)\Bigg\}+$$

$$+cH(t_1-t_0)\Bigg\{-\varepsilon\int_0^{t_0}\psi(\tau)\,d\tau-\varepsilon^2\frac{1}{8}(1+T)k_1\int_0^{t_0}\psi^2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon^3\frac{1}{12}(1+T)\left(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2-k_2\right)\int_0^{t_0}\psi^3(\tau)\,d\tau+O(\varepsilon^4)\Bigg\}$$

$$(4.2)\qquad U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\left\{\varepsilon\psi(t_1)+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{8}(1-T)k_1\psi^2(t_1)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}k_1c^{-1}X\frac{\partial}{\partial t}\psi^2(t_1)\right]+\varepsilon^3\left[\frac{1}{12}(1-T)\left(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2-k_2\right)\psi^3(t_1)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}(9-3T)k_1^2-k_2\right)c^{-1}X\frac{\partial}{\partial t}\psi^3(t_1)+\frac{1}{24}k_1^2c^{-2}X^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^3(t_1)\right]+O(\varepsilon^4)\right\}$$

Здесь $T=1$ в случае первого и $T=-1$ в случае второго из краевых условий (1.4).

Первые члены в фигурных скобках формул (4.1), (4.2) определяют нулевое (линейное) приближение, а следующие члены — поправки от учета нелинейных эффектов в первом и во втором приближении. Разложения по степеням ε, которые стоят в формулах (4.1), (4.2) в фигурных скобках, принципиально отличаются от подобных разложений в формулах (2.8), (2.10), (2.11) и (3.3)—(3.5). Действительно, в разложениях по степеням ε, входящих в формулы общего вида асимптотики (2.8), (2.10), (2.11) и (3.3)—(3.5), каждый член порядка ε раз меньше предыдущего члена.

В случае формул типа (4.1), (4.2), где n-е приближение содержит члены вида

$$\varepsilon^{n+1}X^n\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^{n+m}}\psi^{n+1}(t_1)$$

(здесь $m=-1$ в формуле для $U(X,t)$; $m=0$ в формулах для первых производных; $m=1$ в формулах для вторых производных и т. д.). Это связано с тем, что (2.8), (2.10) и (3.3), (3.4) описывают при $y=\text{const}$ решение вдоль характеристик квазилинейного уравнения (1.1), а формулы типа (4.1), (4.2) дают при $t_1=\text{const}$ приближение решения вдоль характеристик соответствующего линейного волнового уравнения. Ввиду того (4.1), (4.2) имеют ограниченную область применимости, но явным образом показывают, как по мере роста времени происходит накопление нелинейных эффектов (отклонение нелинейного решения от линейного) и пригодны для непосредственного вычисления искомых величин при заданных значениях X и t.

Оказывается, что формулы типа (4.1), (4.2) могут быть выведены из формул (2.8), (2.10) и (3.3), (3.4) и, следовательно, обоснованы для тех областей изменения X и t, где допустимо заменить функцию $\psi(y)$ разложением

$$(4.3)\qquad \psi(y)=\psi(t_1)+\varphi\psi'(t_1)+{}^1/_2\varphi^2\psi''(t_1)+\ldots$$

В (4.3) t_1 и φ определены формулами (2.9), причем в случае первого из краевых условий (1.4) η вычисляется по формуле (2.10), а в случае второго из краевых условий (1.4) — по формуле (3.3).

Покажем возможность применения (4.3) для выведения из (2.8) формулы (4.2). Подставляя (4.3) в (2.8) и используя (2.9), (2.10), имеем

$$(4.4)\qquad U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\{\varepsilon\psi(t_1)+$$
$$+\varepsilon\varphi\psi'(t_1)+{}^1/_2\varepsilon\varphi^2\psi''(t_1)+\ldots\}$$

$$(4.5)\qquad \varphi=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\left\{\frac{1}{2}\varepsilon k_1c^{-1}X\psi(t_1)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\varepsilon^2(3k_1^2-4k_2)c^{-1}X\psi^2(t_1)+\frac{1}{8}\varepsilon^2k_1^2c^{-2}X^2\frac{\partial}{\partial t}\psi^2(t_1)+\ldots\right\}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получим

$$U'(X,t)=[H(t_1)-H(t_1-t_0)]\left\{\varepsilon\psi(t_1)+\frac{1}{4}\varepsilon^2k_1c^{-1}X\frac{\partial}{\partial t}\psi^2(t_1)-\right.\tag{4.6}$$

$$\left.-\frac{1}{24}\varepsilon^3(3k_1^2-4k_2)c^{-1}X\frac{\partial}{\partial t}\psi^3(t_1)+\frac{1}{24}\varepsilon^3k_1^2c^{-2}X^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^3(t_1)+O(\varepsilon^4)\right\}$$

При $T=1$ формула (4.2) совпадает с формулой (4.6). Совершенно аналогично из формул (2.8), (2.10) и (3.3), (3.4) для других величин могут быть выведены формулы, совпадающие с формулами, полученными в [7] при помощи метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Earnshaw S.* On the mathematical theory of sound. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1860, vol. 150, pt 1, p. 133—148.
2. *Рахматулин Х. А.* О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 152.
3. *Blackstock D. T.* Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. J. Acoust. Soc. America, 1962, vol. 34, No. 1.
4. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
5. *Bland D. R.* Nonlinear dynamic elasticity. Waltham — Massachusetts — Toronto — London, Blaisdell Publ. Co., 1969. (Рус. перев.: М., «Мир», 1972).
6. *Заремба Л. К., Сердобольская О. Ю., Чернобай И. П.* Влияние фазовых сдвигов при отражении от границ на нелинейное взаимодействие продольных волн в твердых телах. Акуст. ж., 1972, т. 8, вып. 3.
7. *Нигул У. К.* Аналитическое выявление нелинейных эффектов при распространении и повторном отражении импульса с применением метода последовательного интегрирования линейных неоднородных волновых уравнений. Тр. симпоз. Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах, т. 1, стр. 63—106. (Горький — Таллин, 1973). Изд-во Горьковск. ун-та, 1973.
8. *Нигул У. К.* Отклонение решения квазилинейного волнового уравнения от решения линейного уравнения в области непрерывных первых производных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
9. *Lamb H.* The dynamic theory of sound. London, Edward Arnold & Co, 1931. (Рус. перев.: М., Физматгиз, 1960.)
10. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
11. *Zierep J., Heynatz J. T.* Ein analytisches Verfahren zur Berechnung der nichtlinearen Wellenausbreitung. ZAMM, 1965, Bd 45, H. 1, S. 37—46.
12. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Изд-во АН ЭстССР, 1972.
13. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Возникновение ударных волн в упругом полупространстве при одномерных нелинейных переходных волновых процессах, возбужденных непрерывным воздействием. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
14. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, 1968, т. 21, вып. 3.
15. *Бондарь Н. Г.* Приближенное замкнутое решение нелинейного волнового уравнения. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 7.
16. *Лахе А. Я.* Переход симметричного волнового процесса деформации пластинки в несимметричный при возникновении ударной волны. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. наук, 1973, т. 22, № 2.
17. *Энгельбрехт Ю. К.* Оценка времени возникновения разрывов решения краевой задачи для гиперболической квазилинейной системы второго порядка. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.