

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД
С ИЗОЛИРОВАННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. С. ВАВАКИН, Р. Л. САЛГАНИК

(Москва)

По отношению к плавно меняющимся полям неоднородная среда ведет себя как однородная с эффективными характеристиками, получающимися в результате усреднения характеристик этой среды по объемам, малым по сравнению с масштабом изменения внешних полей, но большим по сравнению с масштабом неоднородности.

Задача определения эффективных характеристик возникает для композитов, в механике горных пород, при изучении ползучести и разрушения, когда существенную роль играет накопление повреждений. Основные сведения о методах решения этой задачи можно получить из [1]; ряд принципиальных вопросов рассмотрен в [2].

В данной работе рассматривается задача определения эффективных характеристик тела с изолированными неоднородностями, сильно отличающимися по свойствам от окружающего материала с учетом взаимодействия неоднородностей при широком их распределении по размерам или (и) достаточно случайном пространственном расположении.

Решение этой задачи для эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона в плоском изотропном случае с неоднородностями в виде прямолинейных прорезей и круглых отверстий проверено экспериментально.

1. Для получения необходимых исходных соотношений воспользуемся методом непосредственного усреднения полей по объему [2], которое будем обозначать угловыми скобками. Интересуясь полями напряжений и деформаций в упругом теле, обозначим через σ_{ik}' и ε_{ik}' не усредненные и через σ_{ik} , ε_{ik} усредненные тензоры напряжений и деформаций, через C_{iklm}° , C_{iklm} тензоры упругих постоянных окружающего материала и материала неоднородностей соответственно; объем усреднения считаем единичным. Имеем

$$(1.1) \quad \langle \sigma_{ik}' - C_{iklm}^{\circ} \varepsilon_{lm}' \rangle = \sigma_{ik} - C_{iklm}^{\circ} \varepsilon_{lm}$$

С другой стороны

$$(1.2) \quad \langle \sigma_{ik}' - C_{iklm}^{\circ} \varepsilon_{lm}' \rangle = \sum (C_{iklm}^1 - C_{iklm}^{\circ}) \int \varepsilon_{lm}' dV$$

где суммирование распространяется на все неоднородности в объеме усреднения, а интегрирование происходит по области, занятой неоднородностью. Интегрируя в (1.2) по частям, получаем с учетом (1.1)

$$(1.3) \quad \sigma_{ik} = C_{iklm}^{\circ} \varepsilon_{lm} + \frac{1}{2} \sum (C_{iklm}^1 - C_{iklm}^{\circ}) \oint (u_l n_m + u_m n_l) dS$$

где u_m — вектор смещения, n_m — вектор нормали к поверхности неоднородности, интегрирование распространяется по этой поверхности и использована формула

$$\varepsilon_{ik}' = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$$

В случае полостей $C_{iklm}^1 = 0$ и из (1.3) находим, решая уравнение относительно ε_{im}°

$$(1.4) \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{\circ} + \varepsilon_{ik}', \quad \varepsilon_{ik}' = \frac{1}{2} \sum \oint (u_i n_k + u_k n_i) dS$$

где ε_{ik}° — тензор средних деформаций материала, связанный с тензором напряжений σ_{ik} через тензор податливостей материала S_{iklm}° , обратный к C_{iklm}° , ε_{ik}' — вклад в тензор эффективной деформации от полостей (формула (1.4) имеет чисто геометрическое происхождение).

Для трещин из (1.4) находим, что u_i должно быть заменено скачком смещения на трещине, причем интегрирование происходит по поверхности трещины. В случае плоских трещин под знаком суммы в (1.4) стоит $n_i V_k + n_k V_i$, где V_i — проинтегрированный по поверхности трещины вектор скачка смещения. Иной способ получения формулы для трещин указан в [3].

Плоские напряженные состояния могут быть двух типов. В первом размер неоднородностей мал по сравнению с толщиной листа (вдоль которой будем считать направленной третью ось), и переход к плоскому состоянию совершается усреднением по толщине в соотношениях между напряжениями и деформациями, усредненными по объему. Во втором размер неоднородностей велик по сравнению с толщиной листа, и усреднение напряжений и деформаций должно происходить в уравнениях плоского напряженного состояния для исходного материала. При этом сохраняются приведенные выше формулы с заменой интегрирования по поверхности неоднородности интегрированием по контуру неоднородности и суммированием по неоднородностям, заключенным в единице объема, — суммированием по неоднородностям, заключенным в единице площади, причем тензорные индексы пробегает значения 1, 2.

Если неоднородности достаточно удалены одна от другой, то интегралы в (1.3) или (1.4) могут быть выражены через σ_{ik} или ε_{ik} на основе решения для одиночной неоднородности, находящейся в однородном поле. Это приближение, известное как приближение малой концентрации, справедливо до тех пор, пока неоднородности можно считать не взаимодействующими.

Например, для условий плоского напряженного состояния второго типа в случае прямолинейных прорезей длины l и изотропного материала с модулем Юнга E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 для эффективных значений E и ν находим [3]

$$(1.5) \quad E = E_0 (1 - 1/4 \pi \Omega), \quad \nu = \nu_0 (1 - 1/4 \pi \Omega), \quad \Omega = N l_m^2$$

где N — число прорезей на единицу площади, индекс m означает усреднение по распределению квадратов их длин. При тех же условиях соответствующие формулы для круглых отверстий диаметра l можно получить из (1.4) после перехода к плоскому напряженному состоянию второго типа, причем вследствие изотропии достаточно воспользоваться решением для одноосного растяжения [4]. Относя затем приложенное напряжение и эффективную поперечную деформацию к эффективной продольной, найдем E и ν соответственно

$$(1.6) \quad E = E_0 (1 - 3/4 \pi \Omega), \quad \nu = \nu_0 + 1/4 (1 - 3\nu_0) \pi \Omega, \quad \Omega = N l_m^2$$

Общее решение для случая конечной концентрации, когда взаимодействие между неоднородностями существенно, неизвестно. Если, однако, имеется широкое распределение неоднородностей по размерам, причем малые неоднородности в среднем равномерно распределены среди неоднородностей больших размеров, то задача может быть решена асимптотически. В этом случае можно считать, что неоднородности близких размеров не

посредственно между собой не взаимодействуют, а среда со всеми неоднородностями, размер которых существенно меньше, чем у данных, выступает по отношению к последним как однородная сплошная. Поэтому вычисление эффективных характеристик можно провести поэтапным применением формул приближения малой концентрации. В пределе это сводится к интегрированию некоторой системы дифференциальных уравнений.

Такое дифференциальное уравнение, определяющее зависимость эффективной диэлектрической проницаемости от относительного объемного содержания неоднородностей, было предложено Бруггеманом [5], однако без указания на то, что оно справедливо лишь при условии широкого распределения по размерам. Значение этого условия для применимости результата Бруггемана (и то, что этот результат неприменим в случае близких по размеру или одинаковых неоднородностей), по-видимому, впервые было понято в работе [6]. В работе [3] асимптотическое рассмотрение для широкого распределения неоднородностей по размерам проведено для задачи об эффективных характеристиках тел с большим числом трещин.

Для плоского напряженного состояния второго типа в случае широкого распределения по размерам прямолинейных прорезей [3]

$$(1.7) \quad E = E_0 e^{-\frac{1}{2}\pi\Omega}, \quad \nu = \nu_0 e^{-\frac{1}{2}\pi\Omega}$$

По той же схеме, т. е. заменяя в (1.6) E_0, ν_0 на E, ν ; E, ν на $E+dE, \nu+dv$; Ω на $d\Omega$ и интегрируя, для круглых отверстий при конечной концентрации Ω находим

$$(1.8) \quad E = E_0 e^{-\frac{1}{2}\pi\Omega}, \quad \nu = \frac{1}{3} [1 + (3\nu_0 - 1) e^{-\frac{1}{2}\pi\Omega}]$$

Внесение как прорезей, так и отверстий приводит, естественно, к снижению модуля Юнга. Коэффициент Пуассона в случае прорезей также убывает с ростом Ω (причем по тому же закону, что и E). В случае отверстий он монотонно убывает с ростом Ω , стремясь к $1/3$, если $\nu_0 > 1/3$, и монотонно возрастает, стремясь к $1/3$, если $\nu_0 < 1/3$.

При достаточно слабых неоднородностях охватывающая их эффективная область, дающая вклад в эффективные характеристики, практически совпадает с областью, занимаемой самой неоднородностью. Соответственно в первом приближении эффективные характеристики равны средним по объему (или по площади) от неоднородных характеристик материала; квадратичные члены, как известно [2, 7], также могут быть вычислены универсальным образом независимо от геометрии неоднородностей и их расположения. Поэтому приближение невзаимодействующих неоднородностей (или малой концентрации) справедливо до тех больших значений концентрации, чем меньше различие в свойствах неоднородности и материала.

С возрастанием различия в свойствах неоднородностей и материала эффективная область растет (для предельного случая безграничной податливости неоднородностей отношение площади эффективной области к площади неоднородности равно согласно (1.6) для круглых отверстий трем, а для прорезей, согласно (1.5) — бесконечности), и концентрация, до которой применимо приближение невзаимодействующих неоднородностей, уменьшается. Однако вместе с тем расширяется область применимости приближения широкого распределения неоднородностей по размерам. Для сильных неоднородностей формулы этого приближения оказываются справедливыми даже в случае совершенно одинаковых неоднородностей, если они расположены в пространстве достаточно равномерно и случайно.

Равномерность означает, что для подавляющего большинства неоднородностей их взаимодействие с неоднородностями ближайшего окружения происходит без существенного выделения одних по сравнению с другими

(практическое отсутствие резких сгущений, в частности, слияний неоднородностей).

Случайность должна быть такой, чтобы все многочисленные допустимые варианты взаиморасположения неоднородностей встречались с одинаковой вероятностью. Тогда влияние окружающих неоднородностей на данную, так как это сильные неоднородности и создаваемое ими возмущение простирается достаточно далеко за пределы собственной области, будет определяться суммированием большого числа случайных факторов.

Выделим в случае одинаковых неоднородностей под знаком суммы в правой части (1.3) слагаемые, относящиеся к подсистеме неоднородностей, концентрация которых бесконечно мала и которые пространственно удалены одно от другого настолько, что взаимная корреляция упругих полей от них отсутствует. Остальные слагаемые объединим с первым.

Не меняя левой части, подобное разбиение можно провести многими способами и представить левую часть как среднее по всем таким разбиениям. Естественно ожидать, что одно слагаемое в правой части будет давать при этом тензор эффективных характеристик, отвечающий бесконечно малому уменьшению концентрации вследствие выделения подсистемы. Другое слагаемое, отвечающее суммированию по подсистеме (выделяемой так, чтобы не нарушалась симметрия тензора эффективных характеристик) вследствие отсутствия взаимной корреляции между ее членами и предположенного характера расположения неоднородностей, дает результат, который получился бы при внесении подсистемы в однородную среду, обладающую тензором эффективных характеристик. Изменением последнего тензора вследствие выделения подсистемы при вычислении вклада от нее можно пренебречь как малой высшего порядка.

Таким образом, приходим к той же процедуре вычисления эффективных характеристик, что и для приближения широкого распределения по размерам. С ростом концентрации будут происходить, вообще говоря, нарушения условия случайности и равномерности. Это можно в принципе учесть, считая, что появляются объекты новой природы (например, сливающиеся прорези), если только для них можно решить соответствующую задачу теории упругости.

Для рассмотренных примеров это означает применимость формул (1.7), (1.8) в широком диапазоне концентраций независимо от ширины распределения по размерам. Так как в случае одинаковых неоднородностей все уже имеющиеся неоднородности должны, согласно сказанному выше, рассматриваться по отношению к добавляемым на следующем шаге как меньшие, то $\Omega = Nl^2$, где N — число неоднородностей на единицу площади сплошного образца. При нанесении неоднородностей большего размера на фон данных одинаковых неоднородностей среда по отношению к ним может при выполнении указанных выше условий считаться однородной, обладающей эффективными характеристиками, определяемыми имеющимися неоднородностями.

Пусть на фон отверстий диаметра l_1 наносятся отверстия диаметра $l_2 > l_1$. Тогда для результирующих E и ν справедливы формулы (1.8) с $\Omega = N_1 l_1^2 + N_2 l_2^2$, где оба слагаемых могут быть конечны, причем N_1 — число первых отверстий в расчете на единицу площади всего образца за вычетом площади вторых отверстий, N_2 — число вторых отверстий в расчете на единицу площади всего образца. Аналогично, в общем случае $\Omega = \sum N_i l_i^2$, где N_i — число отверстий в расчете на единицу площади всего образца за вычетом площади тех отверстий, диаметр которых превышает l_i .

По мере роста ширины распределения данное значение Ω выражается все большим числом все меньших слагаемых и в пределе получаем асимптотику широкого распределения по размерам, причем, как можно показать,

в этом пределе $\Omega = -4\pi^{-1} \ln(1-A)$, где A — относительная суммарная площадь всех отверстий. Таким образом, в этом пределе зависимость эффективных E и ν от A (см. (1.8)) степенного типа (аналогично формуле Бруггемана для диэлектрической проницаемости).

В противоположном предельном случае одинаковых отверстий $\Omega = Nl^2 = 4\pi^{-1}A$ зависимость E и ν от A экспоненциальная. Зависимость же E и ν от Ω остается одной и той же при любом распределении отверстий по размерам.

Для прорезей подобные вопросы не возникают. Здесь $\Omega = \sum N_i l_i^2$, причем слагаемые могут быть конечными и все N_i представляют собой числа прорезей соответствующей длины в расчете на единицу площади всего образца.

Если в материале имеются неоднородности двух типов, причем размеры неоднородностей одного из них намного больше, чем другого, то для эффективных характеристик имеются две асимптотики в зависимости от того, размер неоднородностей какого типа больше. Если для данной эффективной характеристики эти асимптотики различаются между собой, то в области близких размеров неоднородностей обе они не будут давать правильных результатов.

Следует иметь в виду, что в этой области приобретают значение численные коэффициенты, определяющие размер эффективных областей, так что при близких собственных размерах неоднородностей разных типов различие в размерах этих областей может быть еще значительным.

Если же для данной эффективной характеристики указанные асимптотики дают одинаковый результат, то следует ожидать, что он будет близким к истине во всей области соотношения размеров.

Пусть, например, на образец с прорезями (концентрация Ω') наносятся круглые отверстия намного большего размера в концентрации Ω'' . Тогда, подставляя $\nu(\Omega')$ из (1.7) вместо ν_0 в (1.8) для этого случая, находим

$$(1.9) \quad \nu = 1/3 [1 + (3\nu_0 e^{-1/4\pi\Omega'} - 1) e^{-3/4\pi\Omega''}]$$

Если на образец с отверстиями наносятся прорези намного большего размера, то аналогично находим

$$(1.10) \quad \nu = 1/3 [1 + (3\nu_0 - 1) e^{-3/4\pi\Omega''}] e^{-1/4\pi\Omega'}$$

Эти формулы дают разные результаты (совпадающие, как и должно быть, лишь в приближении малой концентрации, когда удерживаются лишь члены не выше первого порядка малости по Ω' и Ω'').

Так как эффективная область для отверстий больше, чем для прорезей при том же l , следует ожидать, что асимптотика (1.9) будет применима при диаметрах отверстий, равных и даже несколько меньших длины прорезей, и лишь при дальнейшем уменьшении диаметра отверстий произойдет переход к асимптотике (1.10).

Для модуля Юнга в обоих указанных случаях сочетания прорезей с отверстиями имеем одну и ту же зависимость

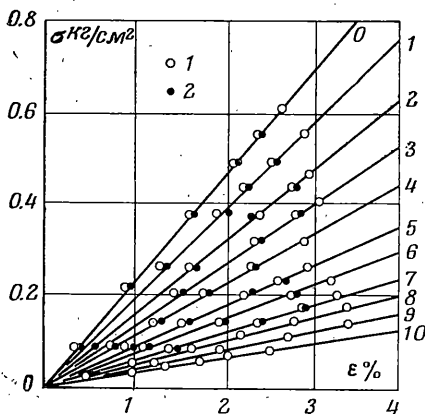
$$(1.11) \quad E = E_0 \exp \left[-\frac{1}{4} \pi (\Omega' + 3\Omega'') \right]$$

2. Экспериментальная проверка теории должна быть проведена для достаточно представительных условий, отражающих основные качественные стороны явления в общем случае и в то же время допускающих конт-

роль за характером расположения неоднородностей. Наиболее подходящими для этого представляются условия плоского напряженного состояния второго типа. Изучался изотропный случай с неоднородностями в виде полостей. Для исследования влияния формы неоднородностей были выбраны два крайних случая: прямолинейные прорезы и круглые отверстия.

В качестве материала для испытаний была взята вакуумная листовая резина толщиной ~ 0.1 см. Такой выбор материала позволил провести испытания при небольших нагрузках и выполнить измерения деформаций оптическим методом. Испытания на одноосное растяжение проводились при комнатных условиях на образцах в виде двойной лопатки. Размеры рабочей части составляли 20×16 см и 14×8 см; небольшое число испытаний было выполнено на образцах с рабочей частью 7×4 см. Для удобства на образец в исходном состоянии наносилась чернилами квадратная сетка со стороной ячейки 0.5 см. Прорезы и отверстия наносились специально изготовленными шаблонами последовательно (по шагам).

Образец зажимался в захватах, причем верхний жестко закреплялся, а к нижнему подвешивался груз. Шаг по нагрузке составил от 0.020 до 0.200 кг в зависимости от концентрации нанесенных на образец прорезей или (и) отверстий. Напряжение σ_y определялось по отношению к исходной площади поперечного сечения образца. Нагружение образцов осуществлялось до значений продольной деформации $\epsilon_y \approx 3\%$: Этот предел (лежащий в области деформаций, достаточно малых для того, чтобы можно было не учитывать геометрическую нелинейность) выбирался из условия отсутствия выщупываний образцов,



Фиг. 1

становившихся заметными при его превышении в тем большей степени, чем выше была концентрация прорезей и отверстий.

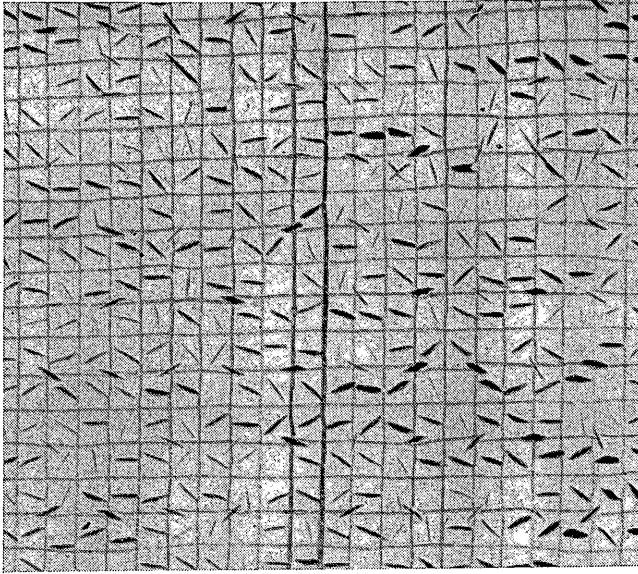
В большинстве испытаний измерялось при помощи катетометра типа КМ-6 удлинение в продольном направлении как изменение расстояния между двумя иглками, воткнутыми на оси образца в концах его рабочей части. В ряде испытаний при помощи другого катетометра типа КМ-6 (или КМ-8), расположенного горизонтально, измерялось также поперечное сокращение как изменение расстояния между иглками, воткнутыми на одной горизонтали.

Такие измерения проводились в шести сечениях, расположенных в центральной части образца на расстоянии ~ 2 см одно от другого. При этом база измерения была различной. Например, для образца с размерами рабочей части 20×16 см база по разным сечениям изменялась от 8 до 15 см. Измерения проводились через 5 мин после каждого шага по нагрузке (разгрузке), причем было проверено, что увеличение времени до начала измерения до 30 мин (необходимое время всех измерений составляло 20–25 мин) не сказывалось на результатах. По результатам измерений вычислялись обычным образом осевая ϵ_y и поперечная ϵ_x деформации.

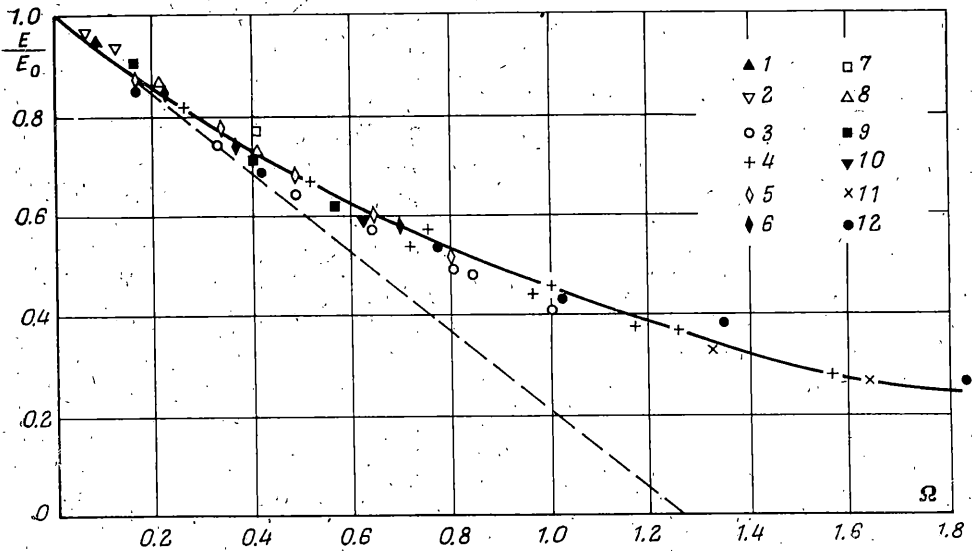
Типичные зависимости σ_y от ϵ_y приведены на фиг. 1 (1 — нагрузка, 2 — разгрузка). Эти зависимости получены при испытании образца, на который сперва последовательно наносились прорезы длиной $l=0.50$ см с шагом по концентрации $\Omega=0.25$ (1–5), а затем наносились отверстия диаметром $l=1.04$ см с шагом по концентрации $\Omega \approx 0.07$ (6–10). Зависимость «0» относится к сплошному образцу. Модуль Юнга определялся как средний угловой коэффициент зависимостей σ_y от ϵ_y . Зависимости ϵ_x от ϵ_y имели аналогичный характер. За коэффициент Пуассона принималось значение $-\epsilon_x/\epsilon_y$, получаемое усреднением как по каждому сечению (нагрузка — разгрузка), так и по всем сечениям. Максимальное отклонение от этого среднего не превышало 10–12%.

Были проведены три типа испытаний: с прорезями, с отверстиями, с прорезями и отверстиями.

1. Испытывались образцы с прорезями одной, двух, нескольких длин. Чтобы обеспечить изотропию, были выбраны восемь направлений (через



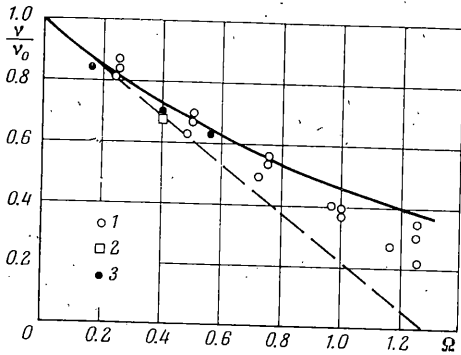
Фиг. 2



Фиг. 3

равные интервалы от 0° до 160°), причем были изготовлены соответствующие этим направлениям шаблоны, по которым и наносились прорезы.

Для обеспечения равномерности и изотропии распределения прорезов по образцу на каждом шаге прорези ($l < 0.70$ см) наносились таким образом, чтобы в каждом горизонтальном ряду находилось по одной (в образцах шириной 8 см) или по две (в образцах шириной 16 см) прорезы одного направления.



Фиг. 4

Юнга и коэффициент Пуассона материала без прорезей, E и ν — то же для материала с прорезями. Каждой точке соответствует один эксперимент (нагрузка — разгрузка).

Обозначения на фиг. 3: 1—0.20 (на образец последовательными шагами наносились прорези длиной $l=0.20$ см), 2—0.25; 3—0.40, 4—0.50, 5—0.80, 6—0.93, 7—2.00, 8— $\Omega_{0.20}=0.21$, 0.80 (на образец с прорезями $l=0.20$ см, концентрация Ω которых составляла 0.21, наносились прорези длиной $l=0.80$ см), 10— $\Omega_{0.25}=0.25$, 0.93, 11— $\Omega_{0.40}=1.0$, 0.80, 12—0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 2.00 см (прорези наносились по шагам в указанной последовательности размеров); на фиг. 4: 1—0.50, 2—2.00 см. Сплошными линиями изображены теоретические зависимости (1.7), штрихами — (1.5), соответствующие приближению малой концентрации.

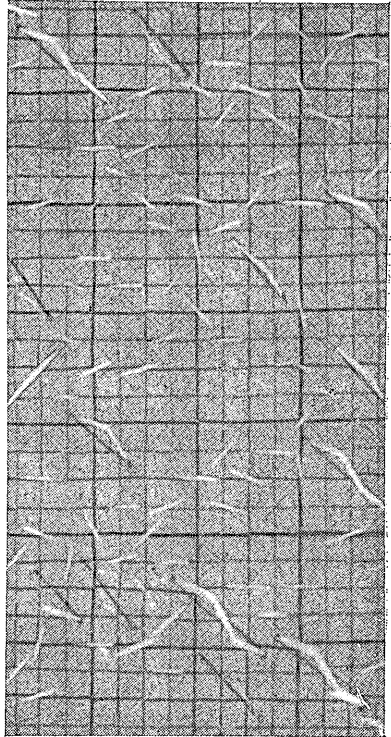
При нанесении на образцы прорезей длины $l=0.80$ см и $l=0.93$ см на последнем шаге (концентрации $\Omega_{0.80}=1.13$ и $\Omega_{0.93}=1.56$) некоторые из прорезей пересеклись (объединились). На фиг. 5 приведена фотография основной части одного из таких образцов ($l=0.80$ см, $\Omega=1.13$).

Влияние объединения прорезей можно попытаться оценить следующим образом. Объединившиеся прорези заменяем эквивалентными прямолинейными, размер которых принимается равным длине проекции ломаной на среднее направление, которое характеризуется углом φ_i с горизонталью (фиг. 5). Сначала согласно (1.7) определяем E'/E_0 для концентрации необъединившихся прорезей. Вклад от объединившихся прорезей вычисляем по формуле

$$E = E' \left(1 - \frac{1}{2} \pi \sum_i l_i^2 N_i \cos^2 \varphi_i \right)$$

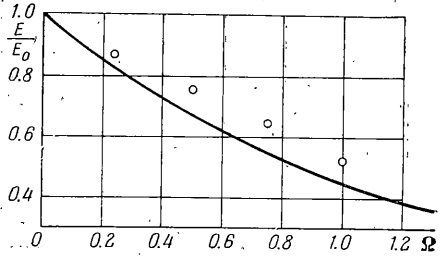
Случайность расположения стремились обеспечить, главным образом, за счет некоррелированности ориентаций прорезей (в частности, при нанесении прорезей на каждом следующем шаге не принималась во внимание ориентация прорезей на предыдущих).

Для примера на фиг. 2 приведена фотография части растянутого образца с прорезями $l=0.50$ см ($\Omega \approx 1.20$). Зависимости E/E_0 и ν/ν_0 от Ω для образцов с прорезями представлены на фиг. 3 и 4 соответственно. Здесь E_0 , ν_0 — модуль



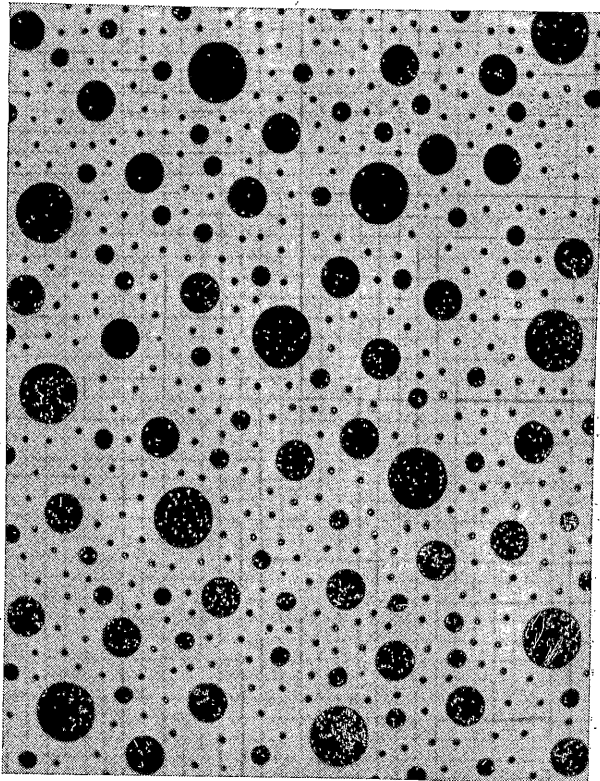
Фиг. 5

которая легко получается из формулы (5.2) работы [3]. При $l=0.80$ см получили $E/E_0=0.31$, а при $l=0.93$ — $E/E_0=0.23$. Соответствующие экспериментальные значения равны 0.34 и 0.24. В то же время теоретические значения E/E_0 , соответствующие концентрациям $\Omega_{0.80}=1.13$ и $\Omega_{0.93}=1.56$ (без учета объединения прорезей), согласно (1.7) равны 0.42 и 0.28.



Фиг. 6

Для выяснения влияния случайности расположения неоднородностей на характеристики материала был проведен специальный эксперимент, в котором прорезы ($l=0.50$ см) наносились на образец (рабочая часть 20×16 см) в определенном порядке. При сохранении восьми направлений прорезей они наносились так, чтобы в каждом вертикальном ряду (ширина ряда 1.0 см) находились бы прорезы только одного направления, причем сохранялась симметрия образца относительно средней вертикальной оси. Результаты этого эксперимента приведены на фиг. 6 (сплошная линия соответствует зависимости (1.7)). Отметим, что экспериментальные точки лежат выше теоретической кривой, причем при $\Omega > 0.25$ их отклонение от кривой превышает разброс экспериментальных результатов, приведенных на фиг. 3.

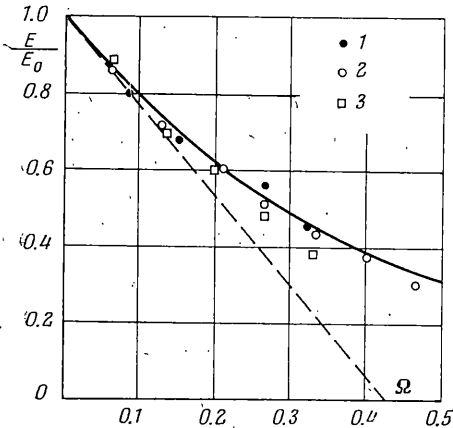


Фиг. 7

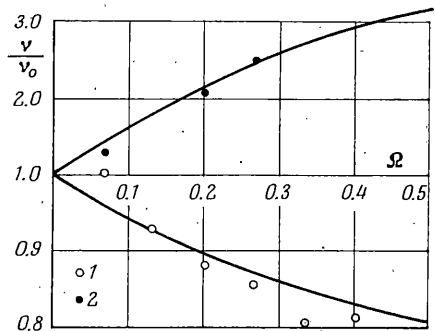
Можно полагать, что тенденция экспериментальных результатов, представленных на фиг. 4, к отклонению от теории в области больших концентраций связана с недостаточным для коэффициента Пуассона выполнением условий случайности и равномерности.

2. Исследовались образцы с отверстиями одного диаметра и нескольких диаметров. В этих испытаниях параметрами случайного расположения служили лишь координаты центров отверстий, которые стремились располагать беспорядочно, соблюдая при этом равномерность расположения отверстий по площади образца.

На фиг. 7 приведена фотография основной части образца с отверстиями диаметром $l=1.50, 1.04, 0.50, 0.20$. Суммарная концентрация $\Omega \approx 0.33$. Экспериментальные результаты для E/E_0 и ν/ν_0 представлены на фиг. 8:



Фиг. 8



Фиг. 9

1—1.50, 1.04, 0.50, 0.20 см (отверстия наносились на образец по шагам в указанной последовательности диаметров); 2—1.04 см (на образец последовательными шагами наносились отверстия диаметром 1.04 см) и фиг. 9: 1—1.04 см, $\nu_0=0.46$. Сплошные линии отвечают теоретическим зависимостям (1.8), штрихи — приближению малой концентрации (1.6).

3. Выполнены следующие эксперименты.

а) Был взят образец с прорезями длины $l=0.50$ см ($\Omega=1.25$, общее число прорезей 1600); модуль упругости $E\{\Omega=1.25\}$ и коэффициент Пуассона $\nu\{\Omega=1.25\}$ соответственно составляли 8.86 кг/см^2 и 0.08. На этот образец последовательно наносились отверстия диаметром $l=1.04$ см и экспериментально определялись E и ν .

Результаты испытаний приведены на фиг. 8 (3) и 9 (2), где соответствующая кривая построена по зависимости (1.8), за E_0 и ν_0 взяты в данном случае значения, соответствующие $E\{\Omega=1.25\}$ и $\nu\{\Omega=1.25\}$. Отметим, что зависимости σ_y от ϵ_y , представленные на фиг. 1, относятся к этому образцу. Полное снижение модуля Юнга по сравнению с его значением для сплошного образца здесь примерно семикратное.

б) На образце, содержащий отверстия диаметром $l=0.25$ см ($\Omega_{\phi 0.25} = 0.25$, общее число 1280), наносили прорези длиной 0.80 см. Результаты испытаний приведены на фиг. 3 (9) и 4 (3). В этом случае за E_0 и ν_0 принимались значения E и ν , вычисленные согласно (1.8) для $\Omega=0.25$, соответственно равные 13.5 кг/см^2 и 0.42.

в) На сплошной образец одновременно наносились прорези и отверстия, длина и диаметр которых совпадали: $l=0.50$ см. При этом концен-

трация прорезей составляла $\Omega_{0,50}=0.75$, а концентрация отверстий $\Omega_{\emptyset 0,50}=\equiv 0.25$. Результаты испытаний: $E/E_0=0.28$, $\nu/\nu_0=0.70$. Как отмечалось выше, в случае равенства длины прорезей диаметру отверстий следует ожидать, что вследствие более сильного влияния отверстий на эффективные характеристики должна быть справедлива формула (4.9). Теоретические значения, подсчитанные согласно (4.11) и (4.9), равны: $E/E_0=0.31$, $\nu/\nu_0=\equiv 0.68$.

Авторы благодарны А. Д. Дмитриеву, И. И. Романенко и Г. М. Южакову, выполнявшим большую работу по подготовке и проведению экспериментов.

Институт механики МГУ

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beran M. J.* Statistical continuum theories. N. Y. Interscience, 1968.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
3. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
5. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von Heterogenen Substanzen. Ann. der Physik, 1935, Bd 24, H. 7, S. 636.
6. *Neale G. H., Nader W. K.* Prediction of transport processes within porous media: diffusive flow processes within an homogeneous swarm of spherical particles. A. I. Ch. E. Journal, 1973, vol. 19, No. 1, p. 112.
7. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 11.