

ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТУРЕ ПЛОСКОЙ
ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА

Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, В. М. ЕНТОВ

(Москва)

Применение механики разрушения в большинстве случаев сводится к определению несущей способности (т. е. допустимых нагрузок) для тела с трещиной заданной геометрии (например, определенной методами дефектоскопии). Если трещины могут медленно расти, то при определении допустимой нагрузки указывается и промежуток времени, в течение которого тело не должно разрушиться. При заданном уровне нагрузок на основе сопоставления его с допустимой нагрузкой для тела с трещиной данной формы может производиться отбраковка готовой продукции.

При этом теория упругости применяется для расчетов коэффициентов интенсивности напряжений для заданного контура трещины или для последовательности контуров, которые может проходить трещина по мере ее развития.

Определив коэффициенты интенсивности, можно рассчитать развитие трещины во времени и тем самым решить вопрос о степени ее опасности. Реализация этой программы наталкивается на большие трудности, прежде всего потому, что недостаточно разработаны методы расчета коэффициентов интенсивности напряжений для сколько-нибудь сложных контуров. Поэтому естественно поставить вопрос об отыскании таких сравнительно простых достаточных признаков, которые позволяли бы решить вопрос об опасности или безопасности трещины, по крайней мере для определенного класса задач.

В данной работе такие признаки указаны для плоских трещин нормального разрыва в упругом или вязкоупругом теле, занимающем все пространство. Эти признаки основаны на вариационных оценках для коэффициентов интенсивности напряжений, сходных с известными оценками М. А. Лаврентьева [1] для плоских задач газовой динамики и соответствующими оценками в теории фильтрации (см., например, [2, 3]).

1. Рассмотрим упругое пространство с трещиной, занимающей область G плоскости $z=0$, ограниченную кусочно-гладкой кривой Γ . Как известно [4], рассматривая трещину нормального разрыва, можно считать, что внешние нагрузки сводятся к раскрывающим трещину симметричным относительно плоскости $z=0$ нормальным усилиям $\sigma_{zz}=-q(x, y)$, $z=0$ ($(x, y) \in G$).

В плоскости $z=0$ действуют лишь нормальные напряжения, а вертикальная составляющая смещения на продолжении трещины равна нулю $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ ($z=0$), $w(x, y)=0$ ($(x, y) \in G$).

Вблизи гладких участков контура трещины в плоскости $z=0$ напряжения σ_{zz} и смещения w имеют особенность вида $\sigma_{zz}=Ns^{-1/2}$, $w=4(1-\nu^2)E^{-1} \cdot Ns^{1/2}$, где s — расстояние по нормали от контура трещины, $N(t)$, $(x(t), y(t)) \in \Gamma$ — коэффициент интенсивности напряжений в данной точке контура, соответствующее значение параметра обозначено через t . В последующем будут отыскиваться оценки для коэффициентов интенсивности напряжений в точках контура.

Эти оценки опираются на следующую теорему сравнения.

Допустим, что рассматриваются две области G и G' ($G' \subset G$) с контурами Γ и Γ' , имеющими общую часть $\Gamma''=\Gamma \cap \Gamma'$. Будем полагать, что Γ''

состоит из некоторого числа гладких дуг и (или) изолированных точек касания контуров Γ и Γ' . Допустим далее, что соответствующие нагрузки $q(x, y)$ и $q'(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$q(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in G \setminus G', \quad q(x, y) > q'(x, y) \quad (x, y) \in G'$$

Тогда в тех точках Γ'' , в которых нормали к контурам совпадают, коэффициент интенсивности N для трещины, занимающей область G , меньше, чем коэффициент интенсивности N' для трещины, занимающей область G' : $N'(M) \leq N(M)$, $M \in \Gamma''$.

2. Пусть внешние усилия сводятся к сосредоточенной силе

$$q(x, y) = P \delta(x-a) \delta(y-b), \quad (a, b) \in G$$

Заметим, прежде всего, что смещения $w(x, y, 0)$ и напряжения $\sigma_{zz}(x, y, 0)$ выражаются в данном случае (см., например, [5, 6]) через гармоническую в полупространстве (например $z \geq 0$) функцию $f(x, y, z)$ соотношениями

$$(2.1) \quad w(x, y, 0) = f(x, y, 0), \quad \sigma_{zz} = \partial f / \partial z [E / 2(1-\nu^2)]$$

Гармоническая функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} f(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in G, \quad \partial f / \partial z &= -2E^{-1}(1-\nu^2)q(x, y) = \\ &= -2E^{-1}(1-\nu^2)\delta(x-a)\delta(y-b), & (x, y) \in G \end{aligned}$$

и при $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 0$.

Покажем, что $f(x, y, z) \geq 0$ при $z \geq 0$. Действительно, из принципа максимума и краевых условий следует, что функция $f(x, y, z)$ может достичь своего минимального отрицательного значения лишь в некоторой внутренней точке Q области G , не совпадающей с (a, b) , где f принимает бесконечно большое положительное значение. Однако $(\partial f / \partial z) = 0$ в окрестности $\varepsilon(Q)$ точки Q в области G , откуда следует, что граничная точка Q не может быть точкой абсолютного минимума функции f . Таким образом, $f(x, y, z) \geq 0$.

Поэтому в силу (2.1) $w(x, y, 0) \geq 0$ в G и, поскольку $f(x, y, 0) = 0$ $(x, y) \in G$, то $(\partial f / \partial z) \geq 0$, $(x, y) \in G$.

Таким образом доказано, что при приложении к поверхности плоской трещины нормального разрыва раскрывающих ее сосредоточенных сил смещения поверхности трещины всюду положительны, а напряжения в плоскости трещины на ее продолжении всюду растягивающие. Заметим, что это верно для трещины произвольного очертания, в том числе и занимающей многосвязную область, ограниченную негладким контуром. В силу линейности задачи это верно и для произвольного распределения нагрузок $q(x, y)$, если только $q(x, y) \geq 0$ для всех $(x, y) \in G$.

Наконец, если рассмотреть две системы нагрузок, удовлетворяющих условию $q_1(x, y) \geq q(x, y)$, $(x, y) \in G$, то для соответствующих смещений и напряжений имеем, очевидно

$$w_1(x, y, 0) \geq w(x, y, 0), \quad (x, y) \in G; \quad \sigma_{zz1}(x, y, 0) \geq \sigma_{zz}(x, y, 0), \quad (x, y) \in G$$

3. Вернемся к сформулированной выше задаче сравнения коэффициентов интенсивности напряжений для двух трещин, имеющих общую часть контура Γ'' . Для того чтобы получить вторую задачу (отвечающую контуру Γ') из первой, достаточно приложить по берегам площадки $G \setminus G'$ усилия, равные напряжениям $\sigma_{zz}'(x, y, 0)$, действующим на этой площадке во второй задаче. По доказанному выше $\sigma_{zz}'(x, y, 0) > 0$, т. е. соответствующие им усилия q^* отрицательны (стремятся закрыть трещину). Если рассмотреть трещину, занимающую область G , сначала под действием ис-

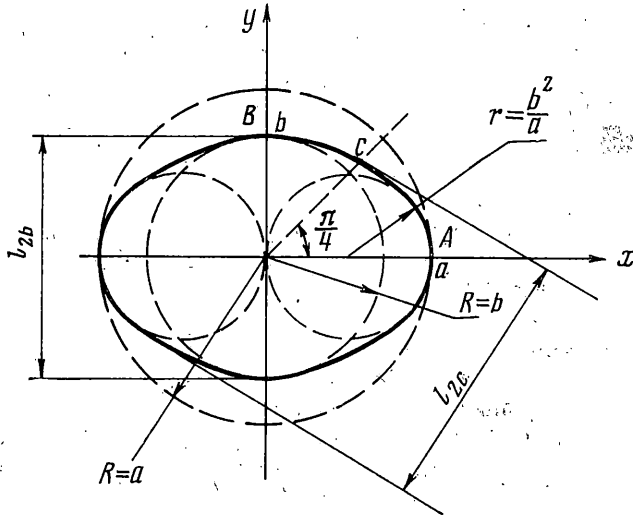
ходной системы нагрузок q (состояние I), потом — под действием системы нагрузок $q_2 = q + q^*$ (состояние II), то для всех $(x, y) \in G$ имеем $q_2 \leq q_1 = q$, и по доказанному выше $0 \leq w_2 = w' \leq w_1 = w$.

В общих точках контура имеем поэтому

$$N = N_1 = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \frac{\partial w}{\partial \nu s} \geq \frac{E}{4(1-\nu^2)} \frac{\partial w'}{\partial \nu s} = N'$$

где s — расстояние по нормали от контура, отсчитываемое внутрь трещины. Тем самым, сформулированная выше теорема сравнения доказана.

Таким образом, расширение трещины при сохранении системы нагрузок приводит к увеличению коэффициента интенсивности напряжений в



оставшихся неподвижными точках контура. Это тем более справедливо, если при расширении трещины на некоторой части ее поверхности прикладываются дополнительно раскрывающие трещину усилия (например, трещина под действием внутреннего давления, трещина в поле внешнего растягивающего усилия).

4. Полученный результат позволяет, прежде всего, строить двухсторонние оценки для коэффициентов интенсивности напряжений. Общий принцип заключается в том, что для заданной точки контура строятся два вспомогательных контура, объемлющий заданный и объемлемый им таким образом, что все три контура имеют в данной точке общую касательную. Вспомогательные контуры подбираются таким образом, чтобы для них коэффициент интенсивности напряжений в данной точке был известен. Тогда искомый коэффициент интенсивности для данного контура заключен между упомянутыми известными величинами. Такие оценки могут оказаться весьма грубыми, однако они заведомо будут строгими.

В качестве примеров рассмотрим трещины, ограниченные выпуклыми контурами и, в частности, эллиптические и прямоугольные трещины в условиях однородного нагружения $\sigma_{zz} = -q = \text{const} (q > 0)$. Тогда одну из оценок сверху для коэффициента интенсивности N_p в любой точке p гладкости контура трещины можно получить, взяв в качестве объемлющей трещину в виде полосы, стороны которой — опорные прямые, определяющие ширину $[7] l_p$ выпуклого контура Γ по направлению, перпендикулярному касательной к этому контуру в точке p .

Для трещины в виде полосы выполняются условия плоской деформации и коэффициент интенсивности для нее N_{lp} равен

$$(4.1) \quad N_{lp} = q\sqrt{l_p/4}$$

По доказанному $N_p < N_{lp}$. Другие простейшие оценки сверху и снизу для выпуклых контуров трещин можно получать, используя описанные и вписанные окружности и эллипсы.

Проиллюстрируем сказанное на эллиптической и прямоугольной трещинах.

Оценки для эллиптической трещины можно сравнить с точным решением (см., например, [5, 6]). На фигуре пунктирными линиями изображены эталонные контуры для некоторых точек $p \in \Gamma$, а в таблице указаны соответствующие неравенства для N_p и некоторые числовые значения (звездочкой отмечены точные значения). Как видно из таблицы, оценочные значения близки к истинным.

Точки контура	Коэффициент интенсивности	$a=1, b=0.7$	$a=1, b=0.5$
A	$N_A < N_A^* < N_R$	$0.32q < 0.40q < 0.45q$	$0.22q < 0.29q < 0.45q$
B	$N_B < N_B^* < N_{l_{2b}}$	$0.38q < 0.48q < 0.59q$	$0.32q < 0.41q < 0.50q$
C	$N_C^* < N_{l_{2a}}$	$0.45q < 0.65q$	

Рассмотрим теперь трещину в виде прямоугольника с вершинами в точках $L(-a, -b)$, $L'(-a, b)$, $M'(a, b)$, $M(a, -b)$. Оценка сверху для коэффициента интенсивности на сторонах прямоугольника вне некоторой окрестности его вершин следует из (4.1). Если продолжить пары его параллельных сторон, то получим $N_{LL'} = N_{MM'} < N_{l_{2a}}$ и $N_{LM} = N_{L'M'} < N_{l_{2b}}$. Оценки снизу можно получить, используя вписанные в прямоугольник эллипсы и окружности. Например, для середин D и T сторон MM' и $L'M'$ имеем $N_D > N_D^e$ и $N_T > N_T^e$, где N_D^e и N_T^e — коэффициенты интенсивности в точках D и T вписанного эллиптического контура с осями $2a$, $2b$, параллельными сторонам прямоугольника. Для точек $L'M'$, заключенных между $E(-a+b, b)$ и $F(a-b, b)$, грубую оценку снизу дают вписанные окружности радиуса b с центрами в точках отрезка $[-a+b, a-b]$ оси x . Приведем некоторые числовые значения для прямоугольника со сторонами $2a=2$, $2b=1.4$. Имеем $N_{L'M'} < 0.59q$, $N_{MM'} < 0.7q$ и $0.4q < N_D < 0.7q$, $0.48q < N_T < 0.59q$ для точек D и T .

Для точек отрезка EF : $0.38q < N_{EF} < 0.59q$. Нижние оценки для N можно здесь улучшать, рассматривая вписанные эллипсы с другими полуосями, косо расположенные в прямоугольнике.

5. Для оценки опасности существующих в теле трещин обычно нет необходимости определять коэффициент интенсивности напряжений в каждой точке контура. Достаточно убедиться в том, что данная трещина может (или не может) вызвать разрушение тела за заданное время. Будем предполагать, что материал обладает типичной для ряда материалов монотонно возрастающей зависимостью скорости роста трещины u от коэффициента интенсивности напряжений N (необходимые сведения по теории квазистатического развития трещин можно найти в работах [8, 9])

$$(5.1) \quad u = F(N), \quad F'(N) \geq 0, \quad F(\infty) = \infty, \quad F(0) = 0$$

Допустим, что первоначальный контур трещины имеет параметрическое представление $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$ ($0 \leq s \leq 2\pi$).

Каждая точка контура имеет скорость, направленную по нормали к контуру и определяемую соотношением (5.1), $N=N(s)$; и задача о развитии трещины сводится к решению системы

$$\frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2} F(N(s, t))$$

$$\frac{\partial y(s, t)}{\partial t} = - \frac{\partial x}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2} F(N(s, t))$$

с начальным условием $(x, y)|_{t=0} = (x_0, y_0)$.

Значение коэффициента интенсивности напряжений в точках контура в каждый момент является, вообще говоря, функционалом от текущих функций $x(s, t)$, $y(s, t)$ и может быть определено из решения задачи теории упругости¹.

При сформулированных выше условиях для функции $F(N)$ развитие трещины происходит непрерывно.

Допустим теперь, что имеются два контура Γ_0 и Γ_0' , первый из которых в начальный момент объемлет второй, и заданы такие системы раскрывающихся трещину нагрузок q и q' , что в любой момент в каждой точке $q \geq q'$. В этом случае трещина, развивающаяся из контура Γ_0' , всегда будет оставаться внутри трещины, развивающейся из контура Γ_0 .

Действительно, в противном случае должна найтись такая точка s^* и такой момент t^* , что текущие контуры трещин Γ' и Γ касаются один другого, контур Γ' лежит внутри контура Γ и нормальная скорость u' распространения контура Γ' в точке s^* больше соответствующей скорости u контура Γ . Однако по доказанному выше $N'(s^*, t^*) \leq N(s^*, t^*)$ и в силу монотонности функции $F(N)$ имеем $u' \leq u$. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение.

Предположим, что внешний контур Γ_0 относится к числу тех контуров, для которых удается рассчитать кинетику развития трещины, и допустим, что этот контур оказывается безопасным с точки зрения того или иного критерия. Тогда и контур Γ_0' безопасен по тому же критерию. Напротив, если внутренний контур Γ_0' опасен, то опасен по тому же критерию и внешний контур Γ_0 .

Например, для трещины, занимающей выпуклую область G диаметра d и ширины l , некоторые оценки ее безопасности можно сделать при помощи описанной и вписанных окружностей, радиусы R и r которых заключены в пределах [7] $1/2 d \leq R \leq 1/\sqrt{3} d$ и $1/2 l \geq r \geq 1/3 l$.

Из сказанного, прежде всего, вытекает возможность оценки опасности трещин при помощи набора решений для сравнительно простых эталонных контуров. С другой стороны, доказанные утверждения избавляют от необходимости рассматривать трещины с «сильно изрезанными» контурами, которые, мало отклоняясь от плавных контуров по расстоянию, сильно отклоняются от них по направлению касательной. Расчеты для плавных контуров могут быть проведены относительно просто [11, 12]².

6. Рассмотрим несколько примеров. Пусть задана трещина с контуром Γ_0 , раскрываемая сосредоточенной силой P , приложенной в точке A , внутренней к Γ_0 . Проведем две окружности с центром в A — вписанную в Γ_0 (радиуса r_0) и описанную (радиуса R_0). По доказанному выше по мере своего роста трещина будет оставаться

¹ Возможность применения решения задачи теории упругости к вязкоупругим телам с развивающимися трещинами показана в [10].

² См. Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1973, препринт № 33.

между окружностями радиусов $r(t)$ и $R(t)$, удовлетворяющих уравнению $dr/dt = -F(N(r))$, $r(0) = r_0$, $R(0) = R_0$, где $N(r) = P/\pi^2 \sqrt{2r^3}$.

В данном случае имеем $d(R-r)/dt = F(N(R)) - F(N(r)) < 0$, так что полоса, в которую заключен контур трещины, по мере роста трещины сужается. Иными словами, при указанных условиях нагружения любая трещина по мере своего роста стремится к круговой. В частности, это доказывает устойчивость кругового контура трещины, растущего под действием центральной силы, по отношению к произвольным возмущениям.

Очевидно, тот же результат будет иметь место для любого осесимметричного распределения нагрузок, если в кольце, покрывающем контур рассматриваемой трещины, коэффициент интенсивности напряжений для круговой трещины падает с ростом ее радиуса.

Если коэффициент интенсивности для круговой трещины растет с ее радиусом, то кольцо, заключающее в себе контур трещины, расширяется по мере ее роста. (По-видимому, это связано не с реальной неустойчивостью роста трещины, а лишь с грубостью в этом случае применяемого способа оценки.)

Поступила 4 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. *Положий Г. Н.* Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации. Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 4.
3. *Енгов В. М.* Об аналогии уравнений плоской фильтрации и продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
4. *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Green A. E., Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, vol. 46, No. 1.
6. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
7. *Люстерник Л. А.* Выпуклые тела. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
8. *Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Салганик Р. Л.* О кинетике распространения трещин. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5—6; 1967, № 1.
9. *Салганик Р. Л.* Временные эффекты при хрупком разрушении. Проблемы прочности, 1971, № 2.
10. *Енгов В. М., Салганик Р. Л.* О трещинах в вязкоупругих телах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
11. *Зиновьев Б. М.* Один приближенный метод расчета тел с разрезами. В сб.: Механика деформируемого тела и расчет сооружений. Новосибирск, 1972.
12. *Cruse T. A.* Application of the boundary-integral equation method of three dimensional stress analysis. Computers and Structures, 1973, vol. 3, No. 3.