МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 539.375

РАЗРУШЕНИЕ ХРУПКИХ ТЕЛ, ОСЛАБЛЕННЫХ СИСТЕМАМИ ТРЕЩИН

А. Е. АНДРЕЙКИВ, В. В. ПАНАСЮК, М. М. СТАДНИК

(Львов)

Предлагается методика приближенного решения задач о предельно-равновесном состоянии хрупких тел, ослабленных системами трещин, близких в плане к круговым. На основании предложенной методики решен ряд задач по определению разрушающей нагрузки для хрупких тел с системами компланарных трещин.

1. Предельно-равновесное состояние хрупких тел, ослабленных системами трещин, близких в плане к круговым. Рассмотрим неограниченное хрупкое тело, в одной из плоскостей которого размещена система n трещин, области которых S_k близки к кругам Δ_k [1]. Введем систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом, чтобы плоскость $z=0$ совпадала с плоскостью расположения трещин.

Кроме того, будем считать, что рассматриваемое хрупкое тело растягивается системой усилий Q, которые в случае бездефектного тела вызывают в плоскости размещения трещин ($z=0$) только нормальные напряжения

$$\sigma_z^{(0)}(x,y,0)=f(x,y).$$

Определим предельное значение внешних усилий $Q=Q_*$, по достижению которого трещины начнут распространяться.

Так как напряженное состояние в теле симметрично относительно плоскости $z=0$, то определение предельного значения внешних усилий Q_* сводится [1] к нахождению в этой плоскости растягивающих напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$, что равносильно решению упругой задачи для полупространства $z\geqslant0$ с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&u_z(x, y, 0)=0 && \text{при} \quad (x, y)\in S \\
&\sigma_z(x, y, 0)=-f(x, y) && \text{при} \quad (x, y)\in S_k \\
&\tau_{xz}(x, y, 0)=\tau_{yz}(x, y, 0) && \text{при} \quad (x, y)\in S+S_k
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $k=1, 2, \ldots, n$, S — часть плоскости xOy вне трещин.

На основании результатов работы [2] задача упругого равновесия для полупространства $z\geqslant0$ с граничными условиями (1.1) сводится к решению системы интегральных уравнений вида

$$\Psi_k(x,y)=\iint\limits_{S_k} K_k(x,y,\xi,\eta)\left[f(\xi,\eta)+\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\Psi_j(\xi,\eta)\right]d\xi\, d\eta- \tag{1.2}$$

$$-\iint\limits_{\Delta S_k} K_k(x,y,\xi,\eta)\,\Psi_k(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \qquad (x,y)\in\Delta_k^{(0)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$K_k(x,y,\xi,\eta)=\frac{\sqrt{a_k^2-(\xi-x_k)^2-(\eta-y_k)^2}}{\pi^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2-a_k^2}}$$

Здесь $\Delta_k^{(0)}$ – область вне круга Δ_k, $\Delta S_k=\Delta_k-S_k$, a_k – радиус круга Δ_k, (x_k, y_k) – координаты центра этого круга.

Величина нормальных растягивающих напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$ определяется через искомые функции $\Psi_k(x, y)$ следующей формулой:

$$(1.3)\qquad \sigma_z(x,y,0)=\sum_{k=1}^{n}\Psi_k(x,y)\qquad (x,y)\in S.$$

Пользуясь условием непрерывности напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$ на контурах кругов Δ_k, для определения функций $\Psi_k(x, y)$ в областях ΔS_k получим следующие уравнения:

$$(1.4)\qquad \lim_{r_k\to a_k}\left\{\iint_{S_k}\left[f(\xi,\eta)+\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\Psi_j(\xi,\eta)\right]K_k(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta-\right.$$

$$\left.-\iint_{\Delta S_k}\Psi_k(\xi,\eta)K_k(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}\sqrt{r_k^2-a_k^2}=0\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

где $r_k=\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}$. Решая уравнения (1.4) и пользуясь результатами работы [1], для определения функций $\Psi_k(x, y)$ в областях ΔS_k получим приближенные формулы

$$(1.5)\qquad \Psi_k(r_k,\beta_k)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r_k^2-R_k^2(\beta_k)}}\left\{F_k(a_k,\beta_k)+\left[r_k-a_k+\frac{1}{2}E_k(\beta_k)\right]\left[\frac{d}{dr_k}F(r_k,\beta_k)\right]_{r_k=a_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi a_k}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}\left[E_k(\alpha)F_k(a_k,\alpha)\right]\operatorname{ctg}\frac{\beta_k-\alpha}{2}\,d\alpha+o\left[E_k^2(\beta_k)\right]\right\}-$$

$$-f(r_k,\beta_k)-\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\Psi_j(r_k,\beta_k),\qquad E_k(\beta_k)=a_k-R_k(\beta_k),\quad R_k(\beta)<r_k<a_k\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

где r_k, β_k – координаты полярной системы с началом в центре круга Δ_k, $r_k=R_k(\beta_k)$ – радиус-вектор контура области S_k, $o[E_k^2(\beta_k)]$ – малая величина порядка $E_k^2(\beta_k)$

$$F_k(x,y)=\iint_{\Delta_k}\sqrt{r_k^2-a_k^2}\,K_k(x,y,\xi,\eta)\left[f(\xi,\eta)+\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\Psi_j(\xi,\eta)\right]d\xi\,d\eta$$

Считая, что имеет место неравенство $2E_k(\beta_k)a_k^3/b_{jk}^3\ll 1$ (b_{jk} – расстояние между центрами кругов Δ_k и Δ_j) и пренебрегая величинами того же порядка малости, соотношения (1.5) запишем в виде

$$(1.6)\qquad \Psi_k(r_k,\beta_k)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{r_k^2-R_k^2(\beta_k)}}\left\{\Phi_k(a_k,\beta_k)+\left[r_k-a_k+\frac{1}{2}E_k(\beta_k)\right]\left[\frac{d}{dr_k}\omega_k(r_k,\beta_k)\right]_{r_k=a_k}+\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi a_k}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}[E_k(\alpha)\omega_k(a_k,\alpha)]\operatorname{ctg}\frac{\beta_k-\alpha}{2}d\alpha+o\left[E_k^2(\beta_k);E_k(\beta_k)\frac{2a_k^3}{b_{jk}^3}\right]\Bigg\}-$$

$$-f(r_k,\beta_k)-\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\Psi_j(r_k,\beta_k)$$

$$\omega_k(r_k,\beta_k)=\iint_{\Delta_k}\sqrt{r_k^2-a_k^2}\,K_k(r_k,\beta_k,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\Phi_k(r_k,\beta_k)=\varphi_k(r_k,\beta_k)\sqrt{r_k^2-a_k^2},\qquad R_k(\beta_k)<r_k<a_k\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

Функции $\varphi_k(r_k,\beta_k)$ являются решением системы интегральных уравнений (1.2) при $E_k(\beta_k)=0$, которая в данном случае имеет вид

$$\varphi_k(x,y)=\iint_{\Delta_k}\left[f(\xi,\eta)+\sum_{j=1(\neq k)}^{n}\varphi_j(\xi,\eta)\right]K_k(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{1.7}$$

Система интегральных уравнений (1.7) была получена ранее в работах [2, 3] для упругого тела, ослабленного системой круговых в плане трещин.

Таким образом, величина нормальных растягивающих напряжений $\sigma_z(x,y,0)$ приближенно определяется на основании соотношений (1.3), (1.6) и (1.7).

Пример. Рассмотрим упругое тело, которое ослаблено двумя одинаковыми эллиптическими трещинами и растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями интенсивности p. Считается, что меньшие оси эллипсов размещены на оси Oy, а расстояние между их центрами равно $2h$. Радиус-вектор одного из контуров трещин определяется уравнением

$$R(\beta)=b/(1-n^2\cos^2\beta)^{-1/2},\qquad n^2=(a^2-b^2)/a^2$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипса; r, β — координаты полярной системы с началом в центре эллипса.

Задача состоит в определении наименьшего значения усилия $p=p_*$, при достижении которого наступает локальное разрушение тела.

На основании соотношений (1.3), (1.6) и (1.7), а также пользуясь основными положениями теории трещин [1], для определения величины предельного значения внешних усилий $p=p_*$ получим формулу

$$p_*=\frac{6\pi\sqrt{\pi k_1}\,K_{1c}}{\sqrt{a}\,[12\pi k_1+\varepsilon^3+\varepsilon^4+12k_1(K(n)-E(n))]}+o(\varepsilon^5) \tag{1.8}$$

где $K(n)$, $E(n)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода; K_{1c} — постоянная, характеризующая сопротивление материала распространению в нем трещины; $\varepsilon=a/h<1$; $k_1=b/a$; $o(\varepsilon^5)$ — малая величина порядка ε^5.

Если в выражении (1.8) положить $n=0$, то

$$p_*=\frac{6\pi^{3/2}K_{1c}}{\sqrt{a}\,(12\pi+\varepsilon_3+\varepsilon^4)}+o(\varepsilon^5) \tag{1.9}$$

что соответствует случаю двух круговых трещин.

2. Определение разрушающей нагрузки для неограниченного хрупкого тела, ослабленного системой компланарных трещин. Пусть неограниченное хрупкое тело содержит систему трещин, близких в плане к круговым, размещенных в одной плоскости. Нагружение тела считается аналогичным случаю, рассмотренному в п. 1. Предполагается также, что в момент предразрушения контуры трещин близки к окружностям. Задача состоит в определении такого значения внешних усилий $Q=Q_{**}$, при достижении которых произойдет спонтанное распространение трещин и разрушение тела.

Так как в момент разрушения все точки контуров трещин приходят в подвижно-равновесное состояние, то коэффициенты интенсивности напряжений во всех точках контуров трещин в момент предразрушения должны быть одинаковыми. На основании этого, а также пользуясь соотношениями (1.6), для определения подвижно-равновесных контуров трещин получим следующую систему уравнений:

$$(2.1)\qquad \frac{d}{d\beta_k}\left\{\Phi_k(a_k,\beta_k)-\frac{1}{2}E_k(\beta_k)\left[\frac{d}{dr_k}\omega_k(r_k,\beta_k)\right]_{r_k=a_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{E_k(\beta_k)}{2a_k}\Phi_k(a_k,\beta_k)+\frac{1}{4\pi a_k}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}\left[E_k(\alpha)\omega_k(a_k,\alpha)\right]\operatorname{ctg}\frac{\beta_k-\alpha}{2}d\alpha\right\}=0$$

В большинстве случаев приближенное решение уравнения (2.1) можно найти методом последовательных приближений или путем представления $E_k(\alpha)$ через тригонометрические суммы и сведения интегральных уравнений (2.1) к системе алгебраических уравнений. Радиусы окружностей a_k, описанных вокруг предельно-равновесных контуров, определяются также из условия равенства коэффициентов интенсивности напряжений на всех контурах трещин.

Пример. Рассмотрим неограниченное хрупкое тело, ослабленное периодической системой круговых трещин радиуса a, центры которых размещены в узлах квадратной сетки деления $2h$. Пусть такое тело растягивается в бесконечно удаленных точках равномерно распределенными усилиями p, перпендикулярными к плоскости расположения трещин. Введем прямоугольную систему декартовых координат $Oxyz$ таким образом, чтобы плоскость $z=0$ совпадала с плоскостью расположения трещин. Определим разрушающее значение внешнего усилия $p=p_{**}$, по достижению которого произойдет разрушение тела.

Для решения такой задачи используем методику, изложенную выше. Так как задача периодическая и все трещины находятся в одинаковых условиях, то для определения предразрушающей конфигурации контуров трещин достаточно рассмотреть условия постоянства коэффициентов интенсивности напряжений на одном из них.

На основании результатов работ [1, 4] найдем, что

$$\Phi_1(a_1,\beta)=2pa_1\pi^{-1}[1+0.2393\lambda^3+0.0810\lambda^5+$$
$$+0.0574\lambda^6+\lambda^7(0.0470+0.0122\cos 4\beta)+o(\lambda^8)]$$

$$(2.2)\qquad \omega(a_1,\beta)=\frac{2a_1p}{\pi},\qquad \left[\frac{d}{dr}\omega(r,\beta)\right]_{r=a_1}=\frac{4p}{\pi}$$

где $\lambda=a_1/h<1$, $o(\lambda^8)$ – малая величина порядка λ^8, a_1 – неизвестная величина радиуса окружности, описанной вокруг предразрушающего контура трещины.

На основании соотношений (2.2) уравнения (2.1) сведутся к одному интегральному уравнению, которое запишем в виде

$$(2.3)\qquad 0.0976\lambda^7a_1\sin 4\beta+\frac{dE(\beta)}{d\beta}-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\beta}\int_0^{2\pi}\frac{dE(\alpha)}{d\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}d\alpha=0$$

Учитывая, что разложение в тригонометрическую сумму функции $\Phi_1(a_1,\beta)$ включает лишь члены с множителями $\cos 4\beta$, решение уравнения (2.3) будем искать в следующем виде:

$$(2.4)\qquad E(\beta)=b_1\cos 4\beta+b_2$$

где b_1 и b_2 – неизвестные коэффициенты.

Подставляя соотношение (2.4) в уравнение (2.3) и пользуясь тем, что значения функции $E(\beta)$ в точках $\beta=0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ для этого случая равняются нулю, находим

$$(2.5)\qquad b_1=-0.0081\lambda^7a_1,\qquad b_2=0.0081\lambda^7a_1$$

Определяя неизвестную величину a_1 из условия неподвижности точек $\beta_i = {}^1/_4\pi(2i+1)$ $(i=0, 1, 2, 3)$ первоначального контура трещины в процессе ее распространения вплоть до момента спонтанного разрушения тела, уравнения для подвижных контуров трещин на основании соотношений (2.4) и (2.5) представятся выражением

$$R(\beta) = a[1+0.0081\varepsilon^7(1+\cos 4\beta)] \qquad (\varepsilon = a/h) \tag{2.6}$$

Используя соотношения (1.3), (1.6), (2.2), (2.6), а также основные положения теории трещин [1], для определения разрушающего значения внешних усилий получим следующую приближенную формулу:

$$p_{**} = \frac{\sqrt{\pi}K_{1c}}{2}[1-\varepsilon^3(0.2393+0.0810\varepsilon^2+0.0510\varepsilon^4)+o(\varepsilon^8)]/\sqrt{a} \tag{2.7}$$

Сравнивая формулу (2.7) с результатами работы [4], видим, что для данного случая дефектности твердого тела предельное значение внешней нагрузки незначительно отличается от разрушающего.

Поступила 23 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Киев, «Наукова думка», 1968.
2. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В.* Упругое равновесие тела, ослабленного системой круговых трещин, расположенных вдоль одной плоскости. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 2.
3. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В.* Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
4. *Андрейкив А. Е., Панасюк В. В., Стадник М. М.* Разрушение хрупких призматических брусьев, ослабленных внутренними круговыми трещинами. Проблемы прочности, 1972, № 10.