УДК 531.36

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОРРЕКТИРУЕМОГО ГИРОКОМПАСА

И. Ш. ШУЛЬМАН

(Москва)

Развиваются результаты работы [1] для получения менее стеснительных достаточных условий асимптотической устойчивости положения равновесия корректируемого гирокомпаса. Рассматриваются два способа формирования моментов управления.

1. Уравнения движения корректируемого гирокомпаса, полученные в работе [1], имеют вид

$$
\begin{gathered}
\beta^{\bullet}\cos\beta+u_\xi\cos\alpha\cos\beta+u_\eta\sin\alpha\cos\beta=M_2/H\\
\alpha^{\bullet}\cos\beta+u_\xi\sin\alpha\sin\beta-u_\eta\cos\alpha\sin\beta+u_\zeta\cos\beta=M_1/H\\
u_\xi=-v_N/R,\qquad u_\eta=U\cos\varphi+v_E/R,\qquad u_\zeta=U\sin\varphi+v_E\operatorname{tg}\varphi/R
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь α, β – углы, задающие отклонение главной оси гироскопа соответственно от плоскости меридиана и плоскости горизонтальной платформы, на которой установлен гироскоп; M_1, M_2 – моменты управления, приложенные к гироскопу соответственно вокруг вертикальной и горизонтальной осей его подвеса; H – собственный кинетический момент гироскопа; v_N, v_E – соответственно северная и восточная составляющие скорости объекта относительно земного шара; φ – широта местоположения объекта; R – радиус Земли; U – угловая скорость вращения Земли.

Предполагая известными величину и направление вектора скорости объекта относительно земного шара, а также широту, можно сформировать моменты управления по закону

$$
\begin{gathered}
\frac{M_1}{H}=U\sin\varphi+\frac{v}{R}\operatorname{tg}\varphi\sin(K+\alpha)+k_1\beta\\
\frac{M_2}{H}=-\frac{v}{R}\cos(K+\alpha)-k_2\beta
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь K – курс объекта; $(K+\alpha)$ – угол между направлением горизонтальной проекции вектора собственного кинетического момента гироскопа и направлением вектора относительной скорости; k_1, k_2 – некоторые постоянные коэффициенты, имеющие размерность угловой скорости.

При учете элементарных соотношений

$$
v\cos(K+\alpha)=v_N\cos\alpha-v_E\sin\alpha,\qquad v\sin(K+\alpha)=v_E\cos\alpha+v_N\sin\alpha
$$

дифференциальные уравнения (1.1) после подстановки в них выражений (1.2) для моментов управления приводятся к форме, из которой очевидно наличие частного решения $\alpha=0$, $\beta=0$.

Для анализа устойчивости этого частного решения запишем упомянутую систему в предположении малости углов α и β. Имеем

$$
\alpha^{\bullet}-\frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi\alpha-\left(k_1+U\cos\varphi+\frac{v_E}{R}\right)\beta=0,\qquad \beta^{\bullet}+k_2\beta+U\cos\varphi\alpha=0 \tag{1.3}
$$

2. Система линейных дифференциальных уравнений (1.4) имеет в общем случае движения объекта переменные коэффициенты, поскольку составляющие скорости и широта являются функциями времени $v_N=v_N(t)$, $v_E=v_E(t)$, $\varphi=\varphi(t)$.

Естественно принять, что широта и скорость изменяются в пределах

$$
-90^\circ<-\varphi_m\leqslant\varphi\leqslant\varphi_m<90^\circ,\qquad -v_m\leqslant v\leqslant v_m \tag{2.1}
$$

Произведем в уравнениях (1.3) замену искомых функций по формулам $x_1=\alpha\cos\varphi$, $x_2=\beta$.

При этом система (1.3) преобразуется с учетом равенства $\varphi^{\bullet}=v_N/R$ к виду

$$
\begin{gathered}
x_1^{\bullet}-k_1x_2=f(t)x_2,\qquad x_2^{\bullet}+k_2x_2+Ux_1=0\\
f(t)=k_1(\cos\varphi-1)+(U\cos\varphi+v_E/R)\cos\varphi
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Пусть характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которую обращается система (2.2) при $f(t)=0$, имеет пару комплексных корней вида $\varepsilon\pm\omega i$.

Величины ε, ω зависят от коэффициентов k_1, k_2

(2.3) $\varepsilon=-\mu\omega_0$, $\omega=\sqrt{1-\mu^2}\omega_0$, $\omega_0^2=k_1U$, $\mu={}^1/_2k_2(k_1U)^{-1/2}$ $(0<\mu<1)$

Переходя [1] к новым искомым функциям по формулам $x_1=y_1$, $x_2=\varepsilon k_1^{-1}y_1+\omega k_1^{-1}y_2$, вместо системы (2.2) получаем

(2.4)
$$y_1^\bullet=\varepsilon[1+k_1^{-1}f(t)]y_1+\omega[1+k_1^{-1}f(t)]y_2$$
$$y_2^\bullet=\varepsilon[1-k_1^{-1}f(t)]y_2-\omega[1+\varepsilon^2\omega^{-2}k_1^{-1}f(t)]y_1$$

В качестве функции Ляпунова примем определенно-отрицательную функцию вида $V=-{}^1/_2(y_1^2+y_2^2)$.

Ее производная по времени в силу дифференциальных уравнений (2.4) представляет собой квадратичную форму

(2.5)
$$V^\bullet=a_{11}y_1^2+2a_{12}y_1y_2+a_{22}y_2^2$$
$$a_{11}=-\varepsilon[1+k_1^{-1}f(t)],\quad a_{12}={}^1/_2\omega k_1^{-1}(\varepsilon^2\omega^{-2}-1)f(t),\quad a_{22}=-\varepsilon[1-k_1^{-1}f(t)]$$

По теореме Сильвестра квадратичная форма (2.5) будет определенно-положительной, если для любого момента времени выполняются условия

(2.6) $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$

Следовательно, по теореме Ляпунова условия (2.6) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости положения равновесия корректируемого гирокомпаса.

3. Приведем достаточные условия (2.6) к более простому виду, поскольку в соответствии с (2.3) $\varepsilon<0$. Первое из условий (2.6) удовлетворяется при выполнении неравенства

(3.1) $k_1+f(t)>0$

а второе – при выполнении неравенства

(3.2) $1-f^2(t)k_1^{-2}F(\mu)>0$, $F(\mu)={}^1/_4(2\mu^2-1)^2\mu^{-2}(1-\mu^2)^{-1}+1$

При $\mu={}^1/_2\sqrt{2}$ неравенство (3.2) выполняется, если справедливо $k_1^2-f^2(t)>0$, и условия (2.6) удовлетворяются при выполнении системы неравенств

(3.3) $k_1+f(t)>0$, $k_1-f(t)>0$

В свою очередь, система неравенств (3.3) после подстановки значения $f(t)$ в соответствии с (2.2) приводится к форме

(3.4)
$$k_1>-\left(U\cos\varphi+\frac{v_E}{R}\right),\qquad k_1>\left(U\cos\varphi+\frac{v_E}{R}\right)\cos\varphi(2-\cos\varphi)^{-1}.$$

В силу вытекающих из условий (2.1) границ изменения функций времени и очевидного неравенства $\cos\varphi(2-\cos\varphi)^{-1}\leqslant1$ система неравенств (3.4) и, следовательно, условия (2.6) удовлетворяются при выполнении единственного требования $k_1>v_m/R+U$.

4. Рассмотрим случай формирования моментов управления корректируемого гирокомпаса, предложенный в работе [1]. Моменты управления, принятые в [1], имеют вид

(4.1)
$$\frac{M_1}{H}=-\frac{v}{R}\sin(K+\alpha)\sin\beta+\left[U\sin\varphi+\frac{v}{R}\sin(K+\alpha)\operatorname{tg}\varphi\right]\cos\beta+k_1\sin\beta$$
$$\frac{M_2}{H}=-\frac{v}{R}\cos(K+\alpha)\cos\beta-k_2\sin\beta$$

Уравнения в вариациях в этом случае отличаются от уравнений (1.3) отсутствием члена $v_E\beta/R$. Повторяя далее анализ, проведенный в п. 2, 3, заключаем, что положение равновесия корректируемого гирокомпаса, управляемого по закону (4.1), асимптотически устойчиво при выполнении условия $k_1>U$.

Отметим, что мало стеснительные достаточные условия асимптотической устойчивости получены в данной работе благодаря упрощению структуры дифференциальных уравнений посредством замены искомой функции α на $\alpha\cos\varphi$. Указанная замена, применявшаяся ранее в теории инерциальных систем навигации [2], по-видимому, существенна и при изучении динамики корректируемых гироскопических курсоуказателей.

Поступила 25 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ройтенберг Я. Н.* Корректируемый гирокомпас. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 2.
2. *Климов Д. М., Рабинович Ю. И.* О кинематических ошибках инерциальных систем навигации. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6.