УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. В. ВЛАСОВ

(Свердловск)

Устойчивость некоторых частных видов перманентных вращений тяжелых твердых тел рассматривалась в работах [1, 2]. В более общей постановке в работе [3] были получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений в виде областей устойчивости на линии пересечения конуса Штауде [4] и единичной сферы с центром в неподвижной точке, а также достаточные условия неустойчивости перманентных вращений. В работе [5] рассмотрены некоторые вопросы устойчивости и стабилизации перманентных вращений твердого тела для случая Лагранжа и Ковалевской.

В предлагаемой работе методом связки первых интегралов получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела в виде уравнений двухпараметрической области устойчивости. Эти условия, по существу являясь эквивалентными аналогичным условиям В. В. Румянцева [3], отличаются от последних по форме и способу получения.

1. Система уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет три первых интеграла

$$V_1=Ap^2+Bq^2+Cr^2+2P(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3)=\mathrm{const} \tag{1.1}$$
$$V_2=Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3=\mathrm{const},\qquad V_3=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

(Здесь использованы обозначения, общепринятые в теории твердого тела с неподвижной точкой [6].)

Произвольное перманентное вращение тела описывается соотношениями

$$p_0=\mathrm{const},\quad q_0=\mathrm{const},\quad r_0=\mathrm{const},\quad \gamma_1^\circ=\mathrm{const},\quad \gamma_2^\circ=\mathrm{const},\quad \gamma_3^\circ=\mathrm{const} \tag{1.2}$$

и будем считать, что возмущенные движения, соответствующие (1.2), имеют координаты, ξ, η, ζ, α, β, γ.

Рассмотрим произвольное тяжелое твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, с одним лишь условием $B=A+\mu$, $\mu>0$.

Система уравнений возмущенного движения, соответствующего (1.2), имеет первые интегралы

$$V_1=A(p_0+\xi)^2+(A+\mu)(\eta+q_0)^2+C(\zeta+r_0)^2+2P[(\alpha+\gamma_1^\circ)x_c+(\beta+\gamma_2^\circ)y_c+(\gamma+\gamma_3^\circ)z_c]=\mathrm{const}$$
$$V_2=A(\xi+p_0)(\alpha+\gamma_1^\circ)+(A+\mu)(\eta+q_0)(\beta+\gamma_2^\circ)+C(\zeta+r_0)(\gamma+\gamma_3^\circ)=\mathrm{const}$$
$$V_3=(\alpha+\gamma_1^\circ)^2+(\beta+\gamma_2^\circ)^2+(\gamma+\gamma_3^\circ)^2=1$$

В предположении $D=A+2\mu-C\neq0$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}V={}&V_1+2\omega V_2+(A+2\mu)\omega^2V_3+P^2\omega^{-2}[{}^1/{}_2x_c^2\mu^{-1}+y_c^2\mu^{-1}+z_c^2D^{-1}]=A[\xi+p_0+\omega(\alpha+\gamma_1^\circ)]^2+\\&+(A+\mu)[\eta+a_0+\omega(\beta+\gamma_2^\circ)]^2+C[\zeta+r_0+\omega(\gamma+\gamma_3^\circ)]^2+2\mu\omega^2(\alpha+\gamma_1^\circ+{}^1/{}_2Px_c\mu^{-1}\omega^{-2})^2+\\&+\mu\omega^2(\beta+\gamma_2^\circ+Py_c\mu^{-1}\omega^{-2})^2+D\omega^2[\gamma+\gamma_3^\circ+Pz_cD^{-1}\omega^{-2}]^2\end{aligned}$$

Очевидно, при условии $D>0$, или $B-C>A-B$ имеем $V\geqslant0$. Производная dV/dt в силу возмущенной системы

$$dV/dt\equiv0 \tag{1.3}$$

Функция V будет функцией Ляпунова, если в точке $\xi=\eta=\zeta=\alpha=\beta=\gamma=0$ и только в этой точке

$$V=0 \tag{1.4}$$

Это условие приводится к уравнению

$$\begin{aligned}&A[p_0+\omega(\alpha+\gamma_1^\circ)]^2+(A+\mu)[q_0+\omega(\beta+\gamma_2^\circ)]^2+C[r_0+\omega(\gamma+\gamma_3^\circ)]^2+2\mu\omega^2(\gamma_1^\circ+\\&+{}^1/{}_2Px_c\mu^{-1}\omega^{-2})^2+\mu\omega^2(\gamma_2^\circ+Py_c\mu^{-1}\omega^{-2})^2+D\omega^2(\gamma_3^\circ+Pz_cD^{-1}\omega^{-2})^2=0\end{aligned}$$

которое при выполнении $D>0$ в силу того, что $A>0$, $B>0$, $C>0$, $\mu>0$, $\omega>0$, имеет единственное решение

$$p_0=-\omega\gamma_1^\circ={}^1/{}_2Px_c\mu^{-1}\omega^{-1},\qquad q_0=-\omega\gamma_2^\circ=Py_c\mu^{-1}\omega^{-1} \tag{1.5}$$
$$r_0=-\omega\gamma_3^\circ=Pz_cD^{-1}\omega^{-1}$$

Простая подстановка показывает, что (1.5) удовлетворяет уравнениям движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, т. е. такое движение действительно существует.

В силу (1.1) получаем еще одно ограничение на рассматриваемые тела

$$P^2\omega^{-4}[{}^1/_4x_c^2\mu^{-2}+y_c^2\mu^{-2}+z_c^2D^{-2}]=1 \tag{1.6}$$

При выполнении (1.3) и (1.5) функция V является функцией Ляпунова в соответствующей теореме Ляпунова об устойчивости [7], и движение (1.5) является устойчивым. Если условие $\mu>0$ не выполняется, т. е. $A>B$ или $A=B\neq C$, то, переименовав соответствующим образом подвижные оси, получим тот же результат в новой системе координат.

Таким образом, получаем, что для каждого тела, удовлетворяющего условиям $\mu>0$, $D>0$ и (1.6), существует, по крайней мере, одно нетривиальное устойчивое движение вида (1.5).

2. Результат п. 1 допускает обобщение в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть дано произвольное тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, не совпадающей с центром масс, т. е. $x_c^2+y_c^2+z_c^2\neq 0$. Каждое такое тело имеет, по крайней мере, одну двухпараметрическую область устойчивых перманентных вращений вида

$$\begin{aligned} &p_0=2\lambda_2\lambda_3Px_ca^{-1}, && \gamma_1^\circ=4\lambda_3^2Px_ca^{-1}, && q_0=2\lambda_2\lambda_3Py_cb^{-1}\\ &\gamma_2^\circ=4\lambda_3^2Py_cb^{-1}, && r_0=2\lambda_2\lambda_3Pz_cd^{-1}, && \gamma_3^\circ=4\lambda_3^2Pz_cd^{-1}\\ &a=4\lambda_1\lambda_3-A\lambda_2^2, && b=4\lambda_1\lambda_3-B\lambda_2^2, && d=4\lambda_1\lambda_3-C\lambda_2^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

причем параметры λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_3^2>0,\quad 4\varphi(\lambda_2,\lambda_3)\lambda_3-K\lambda_2^2>0,\quad \lambda_1=\varphi(\lambda_2,\lambda_3),\quad K=\max\{A,B,C\} \tag{2.2}$$

в которых функция $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)$ определяется единственным образом из соотношения

$$16P^2\lambda_3^4(x_c^2a^{-2}+y_c^2b^{-2}+z_c^2d^{-2})-1=0 \tag{2.3}$$

Доказательство. Система уравнений возмущенного движения, соответствующего (1.2), имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} &V_1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma_1^\circ+2\beta\gamma_2^\circ+2\gamma\gamma_3^\circ=0\\ &V_2=A\xi\alpha+B\eta\beta+C\zeta\gamma+Ap_0\alpha+Bq_0\beta+Cr_0\gamma+A\gamma_1^\circ\xi+B\gamma_2^\circ\eta+C\gamma_3^\circ\zeta=\text{const}\\ &V_3=A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2Ap_0\xi+2Bq_0\eta+2Cr_0\zeta+2P(x_c\alpha+y_c\beta+z_c\gamma)=\text{const} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим комбинацию

$$\begin{aligned} V=&\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\lambda_3V_3=\lambda_3A\xi^2+\lambda_2A\xi\alpha+\lambda_1\alpha^2+\lambda_3B\eta^2+\lambda_2B\eta\beta+\lambda_1\beta^2+\lambda_3C\zeta^2+\lambda_2C\zeta\gamma+\lambda_1\gamma^2+\\ &+[(\lambda_2A\gamma_1^\circ+2\lambda_3Ap_0)\xi+(\lambda_2B\gamma_2^\circ+2\lambda_3Bq_0)\eta+(\lambda_2C\gamma_3^\circ+2\lambda_3Cr_0)\zeta+(2\lambda_1\gamma_1^\circ+\lambda_2Ap_0+2\lambda_3Px_c)\alpha+\\ &+(2\lambda_1\gamma_2^\circ+\lambda_2Bq_0+2\lambda_3Py_c)\beta+(2\lambda_1\gamma_3^\circ+\lambda_2Cr_0+2\lambda_3Pz_c)\gamma] \end{aligned}$$

Подбором λ_i и движения (1.2) обратим члены, стоящие в квадратных скобках, в нуль. Для этого положим

$$\begin{aligned} &\lambda_2\gamma_1^\circ+2\lambda_3p_0=0, && 2\lambda_1\gamma_1^\circ+\lambda_2Ap_0=-2\lambda_3Px_c\\ &\lambda_2\gamma_2^\circ+2\lambda_3q_0=0, && 2\lambda_1\gamma_2^\circ+\lambda_2Bq_0=-2\lambda_3Py_c\\ &\lambda_2\gamma_3^\circ+2\lambda_3r_0=0, && 2\lambda_1\gamma_3^\circ+\lambda_2Cr_0=-2\lambda_3Pz_c \end{aligned} \tag{2.5}$$

В предположении, что $\lambda_3\neq 0$, $x_c^2+y_c^2+z_c^2\neq 0$ (так как должно выполняться последнее условие в (1.1)), а также $(4\lambda_1\lambda_3-A\lambda_2^2)(4\lambda_1\lambda_3-B\lambda_2^2)(4\lambda_1\lambda_3-C\lambda_2^2)\neq 0$ система (2.5) имеет единственное решение вида (2.1). Простой подстановкой показывается, что при любых λ_i, удовлетворяющих указанным неравенствам, движение (2.1) удовлетворяет уравнениям движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Для каждого движения (2.1) функция V представляет собой сумму трех квадратичных форм вида $L\lambda_3x_1^2+L\lambda_2x_1x_2+\lambda_1x_2^2$, где L принимает значения A, B, C. По критерию Сильвестра для знакоопределенности таких форм достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda_3\neq 0,\qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & {}^1/_2L\lambda_2\\ {}^1/_2L\lambda_2 & L\lambda_3 \end{vmatrix} = L\lambda_1\lambda_3-{}^1/_4L^2\lambda_2^2>0$$

Так как $L>0$, то получаем неравенства

$$\lambda_3^2>0,\qquad 4\lambda_1\lambda_3-L\lambda_2^2>0 \tag{2.6}$$

во втором из которых L может равняться A, B, C.

При выполнении (2.6) функция V будет знакоопределенной, равенства (1.3) и (1.4) для нее, очевидно, выполняются. Значит, она является функцией Ляпунова для выбранного движения, и по соответствующей теореме Ляпунова об устойчивости это движение устойчиво.

Последнее соотношение в (1.1) накладывает на движение (2.1) условие, которое можно записать в виде

(2.7) $$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=0$$

Здесь F левая часть уравнения (2.3). Множество решений уравнения (2.3) непусто. Например, существует решение вида $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$, $\lambda_1=(x_c^2+y_c^2+z_c^2)^{1/2}P$. Возьмем $\partial F/\partial\lambda_1=-8\cdot16P^2\lambda_3^5(x_c^2a^{-3}+y_c^2b^{-3}+z_c^2d^{-3})$.

Очевидно, всюду в рассматриваемой области изменения λ_i, определяемой условием (2.6), имеем $\partial F/\partial\lambda_1<0$ и по теореме о существовании неявной функции в этой области уравнение (2.3) разрешимо в виде $\lambda_1=\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$, причем единственным образом.

Переписав условие (2.6) в виде (2.2), получаем то, что и требовалось доказать.

В пространстве переменных λ_1, λ_2, λ_3 множество точек, описываемое соотношениями (2.2), очевидно, представляет собой некоторую область на поверхности (2.7). В силу непрерывности отображения (2.1) эта область отображается в подвижном пространстве координат X, Y, Z тоже в некоторую область устойчивых положений осей вращения. Если обратиться, как в [3], к линии пересечения конуса Штауде и единичной сферы с центром в неподвижной точке, то на этой линии получим область G, которая состоит, вообще говоря, из нескольких интервалов, каждая точка которых соответствует устойчивому положению оси вращения.

Сравним полученные результаты с достаточными условиями устойчивости перманентных вращений, полученными в работе [3], которые имеют вид

(2.8) $$-\frac{x_c}{\gamma_1^\circ}>0, \qquad -\frac{y_c}{\gamma_2^\circ}>0, \qquad -\frac{z_c}{\gamma_3^\circ}>0$$

Для произвольного вращения из области (2.1), (2.2) условия (2.8), очевидно, выполняются. С другой стороны, если заданы γ_1°, γ_2°, γ_3° и для них выполняется (2.8), то из (2.1) имеем

(2.9) $$\lambda_1={}^1/_4[\lambda_3\gamma_1^\circ]^{-1}[A\gamma_1^\circ\lambda_2^2-4Px_c\lambda_3^2]$$

Так как для перманентных вращений выполняется $p_0/\gamma_1^\circ=q_0/\gamma_2^\circ=r_0/\gamma_3^\circ=\omega$, то после подстановки (2.9) в выражения для γ_2°, γ_3° в (2.1) получим

$$(A-B)p_0q_0\lambda_2^2=4P(x_c\gamma_2^\circ-y_c\gamma_1^\circ)\omega^2\lambda_3^2, \qquad (A-C)p_0r_0\lambda_2^2=4P(x_c\gamma_3^\circ-z_c\gamma_1^\circ)\omega^2\lambda_3^2,$$

откуда, учитывая динамические уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, получаем $\lambda_2^2=4\omega^2\lambda_3^2$.

Тогда в силу (2.8) имеем

$$4\lambda_1\lambda_3-A\lambda_2^2=4\left(A\omega^2-\frac{Px_c}{\gamma_1^\circ}\right)\lambda_3^2-4A\omega^2\lambda_3^2=-4P\lambda_3^2\frac{x_c}{\gamma_1^\circ}>0$$

Аналогично доказываются два других неравенства в (2.6).

Таким образом, доказано, что условия (2.1), (2.2) эквивалентны условиям (2.8), но, очевидно, отличаются от последних по форме. Кроме того, при нахождении условий (2.1), (2.2) использовался другой по сравнению с [3] способ отыскания функции Ляпунова, который может иметь самостоятельный интерес.

Поступила 27 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
2. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
3. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
5. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
6. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики, т. 2. М., «Наука», 1966.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1952.