

ДИНАМИКА ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ. 1.

В. В. БЕЛЕЦКИЙ

(Москва)

Предлагается и исследуется модель двуногой ходьбы. Двуногое устройство моделируется твердым тяжелым телом, к одной точке которого подвешены две многосвязные ноги. Ноги предполагаются безынерционными. В каждом суставе ноги (в том числе в точке подвеса) действует управляющий момент. Контакт ноги с поверхностью — точечный, а взаимодействие с поверхностью сводится к равнодействующей сил реакции.

В такой постановке задача расщепляется на некоторую новую задачу динамики твердого тела (корпуса аппарата) и последующую задачу вычисления управляющих воздействий и реакции опоры.

Существенно, что уравнения движения корпуса зависят от движения точки подвеса ног и от «следовой траектории» — последовательности точек постановки ног.

В рамках указанной постановки решен в замкнутом аналитическом виде ряд задач о движении двуногого устройства.

В настоящее время внимание некоторых исследователей привлечено к задачам управления ходьбой шагающих аппаратов [1, 2] и динамики ходьбы, в частности двуногой ходьбы. Внимание к этой теме вызвано не только естественным интересом к процессу ходьбы человека [3-5], но и появившимися новыми проблемами создания антропоморфных локомоционных систем^{1, 2} (экзоскелетоны, антропоморфные автоматические аппараты и т. п.) [6-8]. Особо стоит отметить подробные исследования М. Вукобратовича и его коллег [7, 8].

Задача двуногой ходьбы — сложная задача динамики и управления. Сложность задачи обусловлена большим числом степеней свободы системы, особым характером связей, наложенных на нее, тем, что движение на разных отрезках времени удовлетворяет разным системам уравнений и многими другими трудностями.

Поэтому различные динамические модели двуногой ходьбы, даже самые простые, при всей их безусловной полезности весьма сложны. Слабость этих моделей не в том, что они недостаточно близки к своему природному прообразу — человеку, а наоборот, в недостаточной степени абстрагирования.

Задача о двуногой ходьбе, как всякая задача динамики и управления, нуждается в некоей «изначальной» постановке, достаточно разумной, чтобы описать основные особенности исследуемого процесса, и в то же время достаточно абстрактной, чтобы быть перспективной для сравнительно простого выявления и анализа основных эффектов.

В данной работе делается попытка предложить подобную постановку задачи. Антропоморфная система моделируется твердым тяжелым телом (корпус — балансир), снабженным парой невесомых, неинерционных (многосвязных, вообще говоря) ног (фиг. 1).

Механическим оправданием «невесомости» ног является то, что в антропоморфных системах вес ног может оказаться малым по сравнению с весом всей системы.

Введение невесомого корпуса — балансира необходимо, так как именно его наличие в антропоморфной системе в конечном счете обеспечивает через управляющие связи между корпусом и ногами произвольность движения ног, т. е. адаптацию ног к поверхности, по которой происходит движение², а также обеспечивает устойчивость системы¹.

Невесомость и неинерционность ног играет фундаментальную роль: позволяет совершенно естественным образом задавать нужное движение ног кинематически, тем самым кинематически задавать движение точки подвеса ног; обеспечить незави-

¹ Вукобратович М. Искусственные локомоционные системы: динамика, алгоритмы управления, устойчивость. Докт. дис. М., Ин-т машиноведения АН СССР, 1972.

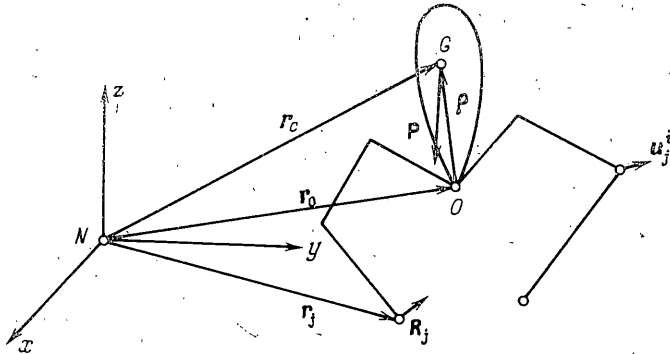
² Белецкий В. В. Плоские линейные модели двуногого шагания. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1973, препринт № 95.

симось движения корпуса аппарата от движения ног. Динамика корпуса аппарата определяется только траекторией точки подвеса и, что принципиально важно, «следовой дорожкой», т. е. точками опоры ног на поверхности. Это позволяет вычислить по конечным формулам управляющие моменты в суставах и реакции опоры, если решена задача динамики корпуса — балансира.

Таким образом, задача расщепляется на некоторую новую и небанальную (зависимость от следовой дорожки) задачу динамики твердого тела и последующую задачу вычисления управляющих воздействий и сил реакции опоры. При этом ряд задач динамики двуногой ходьбы удается рассмотреть аналитически.

1. Введем (фиг. 1) неподвижную систему координат $Nxyz$, где N — начало координат, а ось z направлена вертикально вверх. Рассмотрим тяжелое твердое тело веса $P=Mg$ (M — масса тела, g — ускорение силы тяжести); к точке O тела подвешена пара многозвенных ног, состоящих из невесомых неинерционных звеньев, соединенных двухстепенными суставами.

Каждое i -е звено одной ноги имеет ту же длину, что и i -е звено второй ноги (что, впрочем, непринципиально). Будем считать, что нога может



Фиг. 1

иметь только точечный контакт с поверхностью. Пусть точка C — центр тяжести тяжелого тела. Проведем из N радиус-векторы: r_c — в центр масс C ; r_o — в точку подвеса O ; r_j — в точку опоры j -й ноги ($j=1, 2$).

Если ρ — радиус-вектор, проведенный из точки O подвеса в центр масс C , то $r_c=r_o+\rho$. Пусть P — вектор силы тяжести, а R_j ($j=1, 2$) — векторы сил реакции опоры (так будем называть сумму всех сил, приложенных в опорной точке j -й ноги; сюда входит реакция поверхности опоры и сила тре-

ния — сцепления). Обозначим $R = \sum_{j=1}^2 R_j$.

Если $|R|=0$, то происходит безопорное движение (полет). В случае $|R| \neq 0$ возможны стадии одноопорного движения (только одно из $|R_j| \neq 0$) и стадии двуопорного движения (каждое из $|R_j| \neq 0$).

Определение: бег — чередование одноопорных и безопорных движений; ходьба — чередование одноопорных и двуопорных движений; скакание — чередование одноопорных, безопорных и двуопорных движений.

В силу принятых обозначений теорема о движении центра масс системы, совпадающего с центром масс корпуса — балансира, может быть записана в виде

$$(1.1) \quad R = -P + M \{ r_o + \omega \times \rho + \omega \times [\omega \times \rho] \}$$

где ω — вектор угловой скорости твердого тела.

Теорема об изменении момента количества движения относительно точки O подвеса может быть записана в виде

$$(1.2) \quad I\dot{\omega} + \omega \times I\omega + M\rho \times \mathbf{r}_0 \ddot{\cdot} = \rho \times \mathbf{P} - \sum_{j=1}^2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{R}_j$$

Здесь I — тензор инерции тела в точке O . При написании векторных формул (1.1), (1.2) использованы известные результаты аналитической механики [9].

Для того чтобы уравнения (1.1), (1.2) (вместе с невыписанными здесь кинематическими соотношениями Пуассона) представляли собой замкнутую систему, необходимо доопределить векторы реакции.

Ограничимся в дальнейшем в этой работе особым классом походок — одноопорной ходьбой, которая представляет собой чередование одноопорных движений. Это ходьба, пограничная между бегом и собственно ходьбой в смысле приведенного определения.

Для одноопорной ходьбы доопределение реакций проходит наиболее простым и естественным образом. А именно, обозначим через ν индекс опорной ноги, а через π индекс переносной ноги. Тогда

$$(1.3) \quad \mathbf{R}_\pi = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_\nu$$

и \mathbf{R}_ν определяется правой частью уравнения (1.1); уравнение (1.2) запишем в виде

$$(1.4) \quad I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = [\rho + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\nu)] \times [\mathbf{P} - M\mathbf{g}] - (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\nu) \times \{\dot{\omega} \times \rho + \omega \times [\omega \times \rho] M\}$$

Конечно, и в ходьбе общего вида одноопорная фаза описывается этим же уравнением. В двуопорном движении доопределение реакций может быть проведено неоднозначно. Неоднозначность эта следует из существа задачи: при полностью заданном поступательном и угловом движении система (1.1), (1.2) не имеет решения относительно шести компонент реакций (детерминант системы равен нулю).

Представляется естественным использовать условие непрерывности реакций: на интервале двуопорного движения нога, вышедшая из стадии переноса, непрерывно нагружается до полного значения реакции одноопорного движения, а нога, готовящаяся к переносу, соответственно разгружается. Обозначим через π индекс ноги, готовящейся к переносу (задняя нога), а через ν индекс ноги, готовящейся быть опорной в последующем одноопорном движении (передняя нога), и доопределим реакции следующим образом:

$$(1.5) \quad \mathbf{R}_\pi = [E - \Lambda(t)] \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_\nu = \Lambda(t) \mathbf{R}$$

где \mathbf{R} определяется формулой (1.1), E — единичная матрица, Λ — диагональная матрица с элементами, $\lambda_k(t)$ ($k=1, 2, 3$), причем $\lambda_k(t)$ — произвольные функции времени, удовлетворяющие, однако, обязательным условиям: $\lambda_k(t_i) = 0$; $\lambda_k(t_i + \tau_i) = 1$. Здесь t_i — момент начала, $t_i + \tau_i$ — момент окончания двуопорной фазы. На $\lambda_k(t)$ можно наложить добавочные условия (например условия монотонности $\lambda_k(t) \geq 0$ и т. п.). В частном случае можно искать походки, удовлетворяющие условию $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ ($k=1, 2, 3$). Тогда вместо (1.5) имеем $\mathbf{R}_\pi = [1 - \lambda(t)] \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_\nu = \lambda(t) \mathbf{R}$. Здесь $\lambda(t)$ — скалярная функция, и уравнения (1.2) записываются особенно просто: они снова принимают вид (1.4), только вместо вектора $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\nu$ будет стоять вектор

$$(1.6) \quad \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_\lambda = \mathbf{r}_0 - [(1 - \lambda)\mathbf{r}_\pi + \lambda\mathbf{r}_\nu]$$

В дальнейшем будет рассматриваться одноопорная ($\lambda=1$ или $\tau_i=0$) ходьба.

2. Точка подвеса ног в принятой постановке моделирует гондолу, в которой находятся исследовательские приборы (или экипаж), и важно обеспечить определенную траекторию $r_0(t)$ именно этой точки. Будем считать $r_0(t)$ известной вектор-функцией времени.

Траектория $r_v(t)$ точек постановки ног тоже может считаться заданной. Таким образом, уравнение (1.4) содержит известные функции времени: r_0 и $r_0 - r_v$ (или функцию (1.6) в двуопорном движении). Дополненное кинематическими соотношениями, уравнение (1.4) представляет собой замкнутую систему скалярных дифференциальных уравнений движения твердого тела.

Для одноопорных походок правые части уравнений (1.4) — разрывные функции времени. Действительно, $r_v(t)$ — кусочно-постоянная вектор-функция, $r_0(t)$ — непрерывная, следовательно, $r_0(t) - r_v(t)$ представляет собой лишь кусочно-непрерывную функцию, претерпевающую разрывы в моменты смены опорной ноги.

Задача сводится к нахождению непрерывных по углам и угловым скоростям решений системы (1.4) дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Среди таких решений выбирается решение с заданными свойствами (например, для периодической («регулярной») походки естественно искать периодические решения системы (1.4) и т. п.). По тем или иным критериям решение системы (1.4) выбрано, а по формулам (1.1), (1.3) немедленно вычисляется реакция опоры. Полученная вектор-функция $R_v(t)$ должна проверяться «на разумность», поскольку реакция опоры должна удовлетворять определенным ограничениям. Например, при движении по поверхности нормальная составляющая силы реакции должна быть положительной (иначе происходит отрыв от поверхности): $n_j R_j > 0$, n_j — нормаль к поверхности в точке опоры.

Далее, опорная точка не будет скользить по поверхности, если только касательная составляющая силы R_j меньше определенной величины. Это значит, что вектор R_j должен лежать внутри некоего кругового конуса, ось которого нормальна к поверхности¹:

$$(2.1) \quad |R_j - n_j (R_j n_j)| \leq K^j (R_j n_j)$$

где K^j — коэффициент трения.

Пусть e_v — единичный вектор из точки опоры к текущей точке траектории движения, а τ — единичный вектор, касательный к траектории движения. Естественным условием является тогда

$$(2.2) \quad (R_v \cdot \tau) (e_v \cdot \tau) \geq 0$$

Условие (2.2) означает, что нога испытывает отталкивающее влияние поверхности. Введенные ограничения сужают класс допустимых траекторий $r_0(t)$ и допустимых решений системы (1.4). Эти ограничения смягчаются, если расширить возможности ноги как механизма. Так, нога, снабженная присосками (или зацепками), снимает ограничение (2.2) (аппарат может подтягиваться присосавшейся к поверхности ногой) и расширяет или снимает условия (2.1).

Задача о ходьбе — это задача управления. Траектория $r_0(t)$ обеспечивается определенным движением опорной ноги, а это движение обеспечивается определенными управлениями в суставах ноги. Таким образом, от задания траектории $r_0(t)$ надо перейти к синтезу движения ног, обеспе-

¹ Охотимский Д. Е., Голубев Ю. Ф., Алексеева Л. А. Управление динамической моделью шагающего аппарата. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974, препринт № 20.

чивающего данную траекторию $\mathbf{r}_0(t)$, и вычислению управляющих моментов в суставах, обеспечивающих необходимое движение ног.

Рассмотрим последнюю задачу. Обозначим суставы каждой ноги индексом $i=0, 1, 2, \dots$, начиная с сустава в точке O подвеса ноги ($i=0$). Обозначим \mathbf{r}_j^i радиус-вектор из начала N в i -й сустав рассматриваемой j -й ноги и через \mathbf{u}_j^i — вектор управляющего момента в i -м суставе j -й ноги. При этом тождественно $\mathbf{r}_j^0 = \mathbf{r}_0$ ($j=1, 2$), а $\mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_2^0$ — управляющие моменты между корпусом и «нулевыми» звеньями соответственно первой и второй ноги.

Применим теорему об изменении момента количества движения относительно i -го сустава к части ноги от точки опоры до i -го сустава. Поскольку для переносной ноги $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_\pi = 0$, а для опорной ноги $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_v$, то вследствие принятой невесомости и неинерционности ног получим

$$(2.3) \quad \mathbf{u}_\pi^i = 0, \quad \mathbf{u}_v^i = (\mathbf{r}_v^i - \mathbf{r}_v) \times \mathbf{R}_v \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

При этом на \mathbf{r}_v^i наложены связи

$$(2.4) \quad |\mathbf{r}_v^{i+1} - \mathbf{r}_v^i| = l_i \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

где l_i — длина i -го звена ноги. Формулы (2.3), (2.4) полностью решают задачу о вычислении управлений, обеспечивающих заданное движение точки подвеса. В общем случае $\mathbf{u}_j^i = (\mathbf{r}_j^i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{R}_j$.

Все управления в переносной ноге суть нули: для невесомой ноги перенос осуществляется кинематически, без дополнительной затраты работы. Это означает, что у весомой ноги потребные управления малы вместе с массой ноги, и способ переноса ноги малой массы мало влияет на управление. Для опорной ноги управления определены однозначно, если однозначно задана траектория каждого сустава. Но одна и та же траектория точки подвеса (а только эта траектория и интересна) может быть обеспечена различными совокупностями траектории суставов: передвижением ноги «по-человечески» — коленкой вперед, либо симметричным передвижением «по-птичьи» — коленкой назад и т. п.

Для адаптации к любой поверхности фактически достаточно возможностей двух- или трехзвенных ног.

3. Уравнения (1.1), (1.4), (2.3) полностью определяют условия осуществления заданной траектории $\mathbf{r}_0(t)$ при заданной следовой дорожке $\mathbf{r}_v(t)$. В частности, ничто не мешает потребовать $\mathbf{r}_0 = \text{const}$ при $\mathbf{r}_v(t) = \text{const}$. Тогда рассматриваемая механическая система при определенном движении корпуса — балансира относительно точки подвеса, опираясь ногой в одну и ту же точку поверхности, будет сохранять полную неподвижность ноги. При этом центр масс системы может ни в какой момент времени не располагаться на одной вертикали с точкой опоры. Система, опираясь на одну ногу, стоит «косо» и не падает. Так, человек, опрокидываясь на спину, пытается сохранить равновесие, вертя руками.

Рассмотрим этот механический эффект в простейшем случае, когда точка подвеса ноги совпадает с центром масс тела. Тогда $\rho = 0$.

Учитывая требуемую неподвижность точки подвеса в пространстве, имеем $\mathbf{r}_0'' = 0$. Заметим, наконец, что левая часть уравнения (1.4) представляет собой производную от вектора \mathbf{L} момента количества движения. С учетом сказанного система (1.1), (2.3) и (1.4) соответственно принимает вид

$$(3.1) \quad \mathbf{R} = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{u}_v^i = (\mathbf{r}_v^i - \mathbf{r}_v) \times (-\mathbf{P}), \quad d\mathbf{L}/dt = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_v) \times \mathbf{P}$$

По требованию все \mathbf{r}_v^i , \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_v постоянны. Следовательно, требуемое состояние системы обеспечивается постоянными моментами управления в

суставах, согласно (3.1). При этом к телу — балансиру приложен постоянный момент, под действием которого тело неограниченно раскручивается, как легко обнаружить, интегрируя третье уравнение (3.1).

Неограниченная раскрутка корпуса — балансира будет иметь место в рассматриваемой задаче и при $\rho \neq 0$, так как и в этом случае в момент, приложенный к телу, аддитивно входит постоянный (в пространстве) вектор.

В случае (3.1) вектор L по направлению асимптотически приближается к направлению (горизонтальному) действующего на него момента, а по величине неограниченно возрастает.

Особенно прозрачен эффект для простейшего случая однозвенной ноги: звено сохраняет неподвижность под любым углом к горизонту. Напомним, что в точке опоры звена на поверхность не приложен никакой момент сил управления. Есть только постоянный управляющий момент в суставе $u^0 = -(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_v) \times \mathbf{P}$, приложенный к звену, и соответственно момент $-u_0$, приложенный к телу.

4. Назовем походку комфортабельной, если точка подвеса движется равномерно и прямолинейно. Тогда $\mathbf{r}_0(t)$ — линейная вектор-функция времени, а $\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_v(t)$ — кусочно-линейная вектор-функция. Рассмотрим комфортабельную походку в простейшем случае $\rho = 0$ (точка подвеса совпадает с центром масс балансира). Тогда уравнения движения и управления имеют вид (3.1), но правые части этих уравнений уже не постоянны.

Зададим траекторию $\mathbf{r}_0(x, y, z)$ точки подвеса в виде

$$(4.1) \quad y=0, \quad x=x_0+Vt, \quad z=z_0$$

так, что точка подвеса движется с постоянной скоростью V вдоль оси x на постоянной высоте z_0 от координатной плоскости xy . Зададим периодическое, периода T , движение ног следующими формулами следовой дорожки:

$$(4.2) \quad y_v = \begin{cases} y_0 & \text{при } \frac{1}{2}iT \leq t < \frac{1}{2}(i+1)T \\ -y_0 & \text{при } \frac{1}{2}(i+1)T \leq t < \frac{1}{2}(i+2)T \end{cases}$$

$$x_v = x_v^0 + Vt_i \text{ при } t_i \leq t < t_i + \frac{1}{2}T = t_{i+1}, \quad t_i = \frac{1}{2}iT, \quad z_v = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

Будем считать движение (4.1), (4.2) осуществимым, если оно не приводит к неограниченному увеличению угловой скорости балансира. Необходимым и достаточным условием этого является ограниченность модуля $|L|$ вектора кинетического момента. В скалярном виде уравнения (3.1) в силу (4.1), (4.2) запишутся так:

$$(4.3) \quad L_x^* = Py_v, \quad L_y^* = P[V(t-t_i) + \Delta_0], \quad L_z^* = 0, \quad \Delta_0 = x_0 - x_v^0$$

Интегрируя эти уравнения, обнаружим, что требование ограниченности модуля $|L|$, вообще говоря, не выполнено, и движение (4.1), (4.2) в этом смысле неосуществимо. Единственная возможность осуществления этого движения — придание свободному параметру Δ_0 определенного значения, а именно

$$(4.4) \quad \Delta_0 = -VT/4$$

Это условие означает симметричность передвижения точки подвеса относительно опорной точки: в моменты начала и конца опоры расстояния между этими точками одинаковы. При условии (4.4) решение системы (4.3) будет периодическим с периодом T .

Введем безразмерные величины

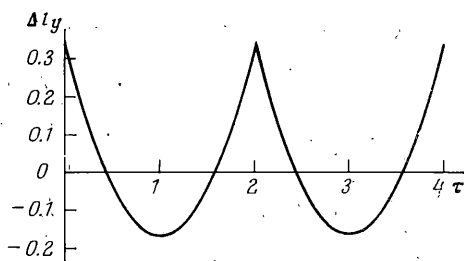
$$\tau = \frac{t-t_i}{T_0}, \quad l_y = \frac{L_y}{PVT_0^2}, \quad l_x = \frac{L_x}{Py_0T_0}, \quad T_0 = \frac{1}{4}T$$

$$l_x = l_x^\circ + \Delta l_x, \quad l_y = l_y^\circ + \Delta l_y$$

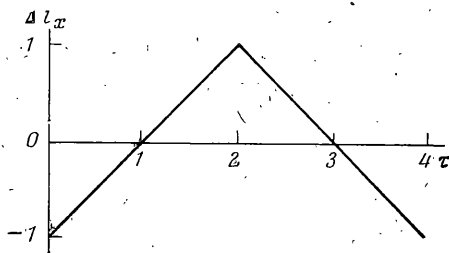
где l_x°, l_y° — средние значения величин l_x, l_y . Тогда найденное T -периодическое решение представимо в следующем параметрическом виде (фиг. 2):

(4.5)

$$\begin{aligned} \Delta l_x + 1 &= \tau \\ \Delta l_y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\tau^2 - \tau \\ (0 \leq \tau < 2) &\text{ при} \\ t_i &\leq t < t_i + \frac{1}{2}T \\ 3 - \Delta l_x &= \tau \\ \Delta l_y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\tau - 2)^2 - \\ & - (\tau - 2) \quad (2 \leq \tau < 4) \\ \text{при } t_i + \frac{1}{2}T &\leq t < t_i + T \end{aligned}$$



В плоскости $\Delta l_x, \Delta l_y$ решение (4.5) периодически пробегает отрезок дуги параболы $\Delta l_y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\Delta l_x^2$ от точки $\Delta l_x = -1, \Delta l_y = \frac{1}{3}$ в момент t_i до точки $\Delta l_x = 1, \Delta l_y = \frac{1}{3}$ в момент $t_i + \frac{1}{2}T$ и обратно. При $\Delta l_x = 0$ величина Δl_y достигает минимума $\Delta l_y = -\frac{1}{6}$; при $\Delta l_y = 0$ имеем $\Delta l_x = \pm 1/\sqrt{3}$.



Фиг. 2

Выпишем уравнения движения в углах. Введем систему координат Ox', y', z' , жестко связанную с корпусом — балансиром; начало поместим в точку подвеса ног, оси направим по главным осям эллипсоида инерции тела. Определим ориентацию всей системы Ox', y', z' относительно неподвижной системы $Nxyz$, углами ψ, θ, φ (фиг. 3). Угол θ (тангаж) описывает колебания «вдоль курса» аппарата, если этот курс выдерживается вдоль оси x . Угол ψ (рысканье) описывает колебания оси Oz' поперек курса. Наконец угол φ (осевое вращение) описывает колебания корпуса вокруг оси Oz' .

Элементы таблицы направляющих косинусов имеют следующие значения:

	x'	y'	z'	
x	α	α'	α''	$\alpha = \cos \theta \cos \varphi, \quad \alpha' = -\cos \theta \sin \varphi, \quad \alpha'' = \sin \theta$
y	β	β'	β''	$\beta = \sin \theta \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi$
z	γ	γ'	γ''	$\beta' = -\sin \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi, \quad \beta'' = -\cos \theta \sin \psi$
				$\gamma = -\sin \theta \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi$
				$\gamma' = \sin \theta \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi, \quad \gamma'' = \cos \theta \cos \psi$

Компоненты угловой скорости по осям x' , y' , z' суть

$$(4.6) \quad \omega_{x'} = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi$$

$$\omega_{y'} = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_{z'} = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}$$

Согласно (4.3) $L_z = L_z^0 = \text{const}$; будем искать периодическое движение корпуса в классе движений $L_z^0 = 0$. Тогда уравнения движения для случая динамической симметрии корпуса ($I_{x'x'} = I_{y'y'} = A$, $I_{z'z'} = C$) имеют вид

$$(4.7) \quad d\theta / d\tau = n_0 l_y - 2n_0 l_y \sin \psi / 2$$

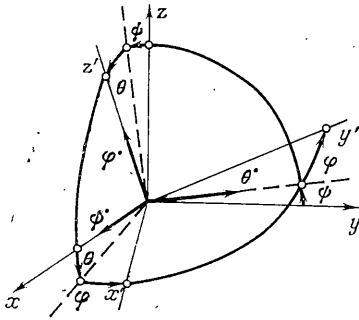
$$d\psi / d\tau = n_1 l_x + n_0 l_y \operatorname{tg} \theta \sin \psi$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = n_1 (K_0 - 1) l_x \sin \theta -$$

$$-n_0 l_y \sin \psi \frac{\sin^2 \theta + K_0 \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$n_0 = \frac{PVT_0^3}{A}, \quad n_1 = \frac{Py_0 T_0^2}{A}$$

$$K_0 = A/C$$



Фиг. 3

Здесь $l_x = l_x^0 + \Delta l_x$; $l_y = l_y^0 + \Delta l_y$, а Δl_x , Δl_y как функции времени определяются формулами (4.5) (и периодичным образом продолжаются на $\tau > 4$ и на $\tau < 0$).

Уравнения (4.7) точно интегрируются в некоторых частных случаях:

а) плоские колебания при нулевой ширине следовой дорожки ($n_1 = 0$, $\psi = 0$);

б) пространственные колебания при нулевой ширине следовой дорожки ($n_1 = 0$);

в) «топтанье на месте» (скорость поступательного движения нулевая, $n_0 = 0$);

г) малые пространственные колебания (θ и ψ малы, членами второго и выше порядка малости можно пренебречь).

Анализ этих случаев, а также механические соображения позволяют заключить, что подходящим выбором параметров l_x^0 , l_y^0 (а также $L_z^0 \neq 0$) можно, по-видимому, построить периодическое движение для произвольного начального положения корпуса (произвольных θ_0 , ψ_0).

Однако здесь ограничимся построением естественного периодического решения с начальными данными при $\tau = 0$, $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$, где θ_0 произвольно, а ψ_0 выбирается определенным образом.

Такое периодическое решение существует, если $l_x^0 = 0$, а параметры l_y^0 и ψ_0 удовлетворяют условиям¹

$$(4.8) \quad l_y^0 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \tau^2 - \tau + \frac{1}{3} \right) \sin^2 \frac{\psi}{2} \left[1 - \int_0^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} d\tau \right]^{-1} d\tau$$

$$\psi_0 = -\frac{n_0}{2} \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \tau^2 - \tau + \frac{1}{3} + l_y^0 \right) \operatorname{tg} \theta \sin \psi d\tau$$

¹ Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974, препринт № 32.

Тогда период $\theta(\tau)$ есть $\tau_0=2$, период $\psi(\tau)$ есть $2\tau_0=4$, а само решение удовлетворяет системе интегральных уравнений (где θ_0 произвольно)

$$(4.9) \quad \theta = \theta_1(\tau) + l_y^\circ n_0 \left[\tau - 2 \int_0^\tau \sin^2 \frac{\psi}{2} d\tau \right] - 2n_0 \int_0^\tau l_y(\tau) \sin^2 \frac{\psi}{2} d\tau$$

$$\psi = \psi_1(\tau) + n_0 \int_0^\tau l_y \operatorname{tg} \theta \sin \psi d\tau$$

$$(4.10) \quad \theta_1 = 1/6 n_0 \tau (\tau - 1) (\tau - 2) + \theta_0, \quad \psi_1 = 1/2 n_1 \tau (\tau - 2) + \psi_0$$

Теперь можно построить эффективный алгоритм численного поиска нужного периодического решения системы (4.7). В первом приближении (4.10) полагаем $\psi_0=0$ и в силу формул (4.10) вычисляем l_y° по (4.8); подставляем l_y° в (4.7) и интегрируем (4.7) при следующих начальных данных: θ_0 произвольно, а ψ_0 вычисляется по (4.8) тоже в силу первого приближения (4.10). Полученное численное решение рассматриваем как второе приближение и повторяем весь цикл вычислений и т. д.

Отметим, что $\theta_1(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$ при $\theta_0=0$ имеют свойство: $\theta_1(1+\tau) = -\theta_1(1-\tau)$, $\psi_1(1+\tau) = \psi_1(1-\tau)$, поэтому во втором уравнении (4.8) в подынтегральной функции в первом приближении стоит функция, нечетная относительно $\tau=1$. Следовательно, получим $\psi_0=0$ (при $\theta_0 \neq 0$ этого может и не быть).

Описанная программа построения периодического решения может быть осуществлена и аналитически — при несколько ином подходе. Отличие состоит в том, что тригонометрические функции в подынтегральных выражениях (4.8), (4.9) разлагаются в степенные ряды, в которых берутся старшие члены тем более высокого порядка, чем более высокое приближение рассматривается. При небольших значениях n_0 , n_1 уже второе приближение дает высокоточный результат. Разложение тригонометрических функций в степенные ряды необходимо только для того, чтобы вычислить квадратуры в явном виде.

Согласно описанной процедуре, получим аналитически искомое решение во втором приближении для начальных данных $\theta_0 = \psi_0 = 0$. Из (4.8) вычислим, полагая $\sin^2 \psi / 2 \sim \psi^2 / 4$

$$l_y^\circ = -\frac{2}{315} n_1^2 \frac{1}{1 - n_1^2/15} \approx -\frac{2}{315} n_1^2$$

а из (4.8) получим $\psi_0=0$.

Будем пользоваться выписанным приближенным значением l_y° ; в формулах (4.13) произведем аппроксимацию $\sin^2 \psi / 2 \sim \psi^2 / 4$, $\operatorname{tg} \theta \sin \psi \sim \theta \psi$; используем затем в подынтегральных выражениях формулы (4.5) и (4.10).

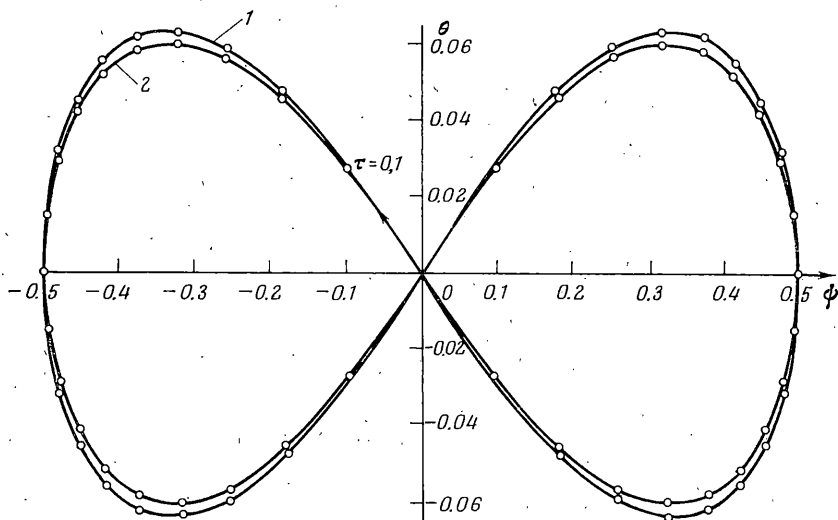
При принятой аппроксимации тригонометрических функций в окончательных формулах следует сохранять члены только до третьего порядка относительно величин n_0 , n_1 .

Вычисляя квадратуры, после некоторых упрощений при $0 \leq \tau < 2$ получим окончательно

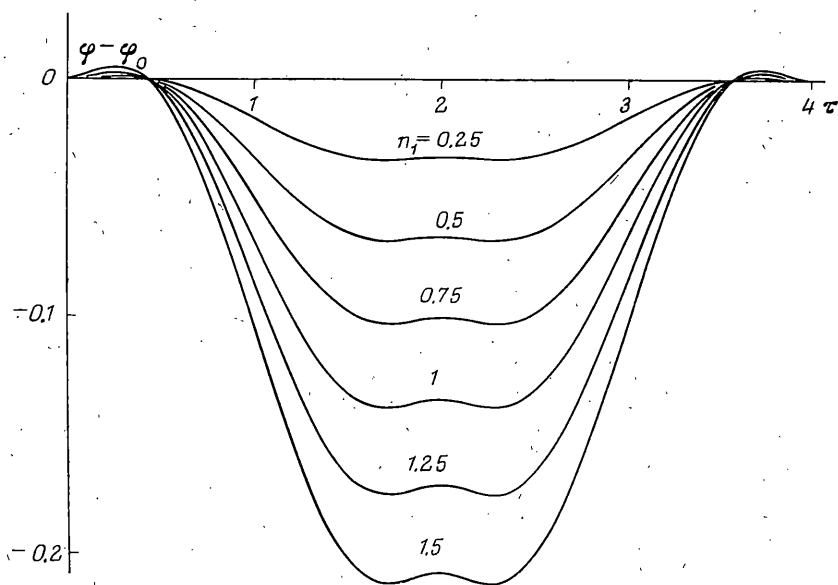
$$(4.11) \quad \theta = \theta_1 + \theta_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \theta_1 = 1/6 n_0 \tau (\tau - 1) (\tau - 2) \\ \psi_1 = 1/2 n_1 \tau (\tau - 2), \quad \theta_2 = -n_0 n_1^2 \tau (\tau - 1) (\tau - 2) P_4(\tau) / 5040$$

$$P_4(\tau) = 45\tau^4 - 180\tau^3 + 168\tau^2 + 24\tau + 16, \quad \psi_2 = \frac{n_0^2 n_1}{1748} \tau^3 (\tau - 2)^3 (3\tau - 4) (3\tau - 2)$$

Решение (4.11) продолжается на интервал $2 \leq \tau < 4$ заменой $\theta(\tau) \rightarrow \theta(\xi)$, $\psi(\tau) \rightarrow -\psi(\xi)$, $\xi = \tau - 2$.

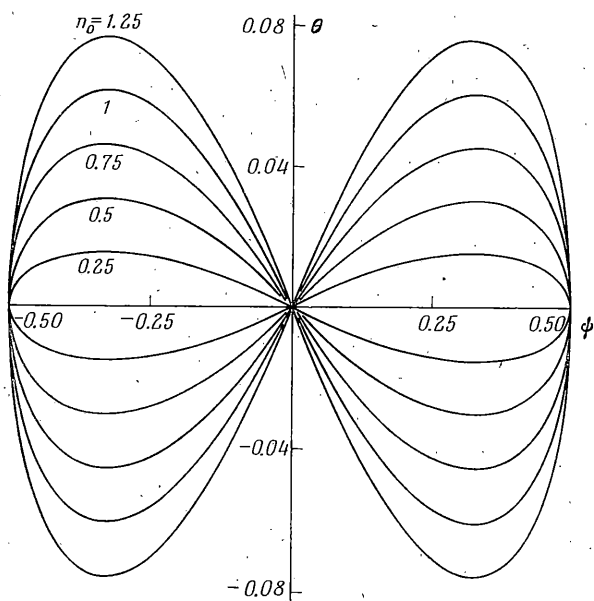


Фиг. 4

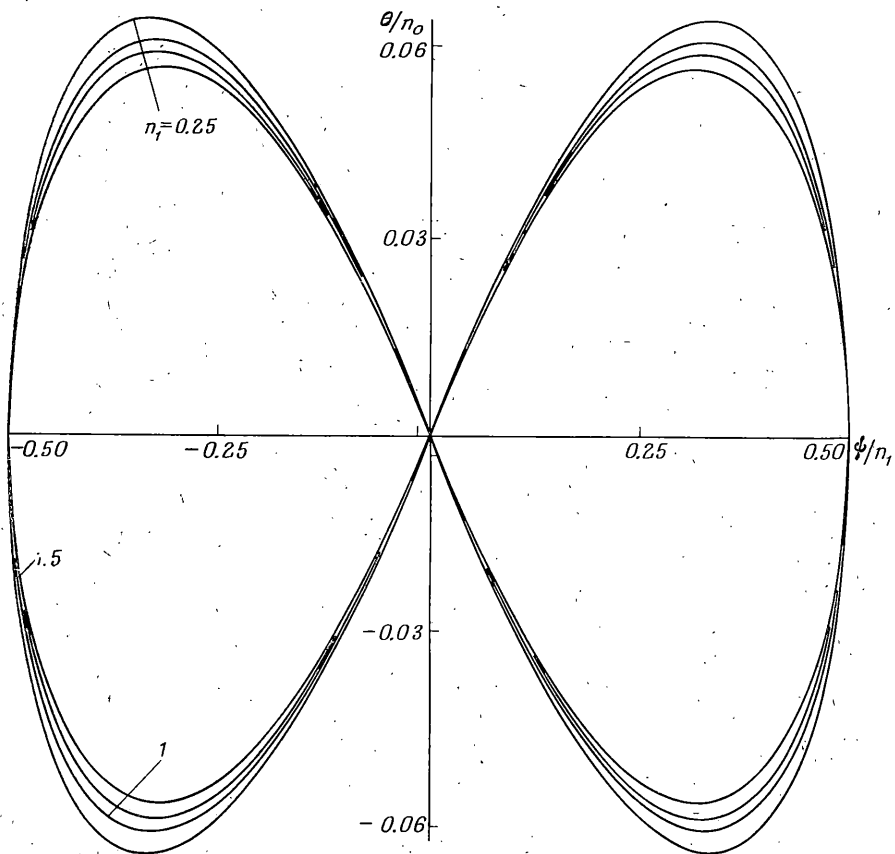


Фиг. 5

На фиг. 4 построены «эталонные» кривые $\theta(\psi)$ для $n_0=n_1=1$ в первом приближении (4.10) (кривая 1), втором аналитическом приближении (4.11) (кривая 2) и в результате численного решения задачи (кривая 2). Кривые первого приближения имеют максимальную амплитуду по ψ $\max \psi=0.5$, а по θ $\max \theta=1/3^{1/3} \approx 0.0641$. Кривая второго приближения (2) и точное решение мало отличаются от первого приближения (1). Так, при $n_0=n_1=1$, $\max |\psi_2| \sim 0.0005$, т. е. $\sim 0.1\%$ от $\max |\psi_1|$; отличие по θ существенней: $\max |\theta_2| \sim 0.003$, т. е. 5% от $\max |\theta_1|$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Осталось вычислить осевое вращение $\varphi(\tau)$. Из (4.7) в том же приближении при $0 \leq \tau < 2$ получим

$$(4.12) \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{180} n_1 n_0 \tau^2 \{ (K_0 - 1) \Phi_1(\tau) - K_0 \Phi_2(\tau) \} \\ \Phi_1 = 2(3\tau^3 - 15\tau^2 + 25\tau - 15), \quad \Phi_2(\tau) = 9\tau^3 - 45\tau^2 + 70\tau - 30$$

с продолжением на отрезке $2 \leq \tau \leq 4$ по формуле

$$(4.13) \quad \varphi(\tau) \rightarrow \varphi(2) + \varphi_0 - \varphi(z) \quad (z = \tau - 2)$$

Значение $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$, достигаемое при $\tau = 2$, дается формулой $\Delta\varphi = \frac{1}{45} [n_0 n_1 (1 - 2K_0)]$. Например при $n_0 = n_1 = 1$, $K_0 = 2$, имеем $\Delta\varphi = -0.136$ (фиг. 5). На фиг. 5 даны также кривые $\varphi - \varphi_0$ в зависимости от τ для различных значений n_1 при $n_0 = 1$. Все эти кривые симметричны относительно среднего значения функции $\varphi - \varphi_0$, так что изменение этой функции на каждом последующем шаге зеркально повторяет изменение ее на предыдущем шаге (как и должно быть). Пикантной деталью найденного движения является легкое осевое «повиливание» в окрестности моментов ($\tau = 0, 2, 4, \dots$) смены опорной ноги.

Представление о зависимости точного периодического решения от параметров дают фиг. 6, 7 (причем на фиг. 6 фиксировано $n_1 = 1$).

Все числовые расчеты и графики данной работы выполнены Н. С. Кониковой.

Автор благодарен Д. Е. Охоцимскому за стимулирующие обсуждения проблемы.

Поступила 18 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К. Алгоритмы управления шагающим аппаратом, способным преодолевать препятствия. Техническая кибернетика, 1973, вып. 5.
2. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Боровин Г. К., Карнов И. И. Моделирование на ЦВМ движения шагающего аппарата. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, вып. 3.
3. Исследования на биодинамике ходьбы, бега, прыжка (под ред. Н. А. Бернштейна), «Физкультура и спорт», М., 1940.
4. Исследования по биодинамике локомоций (под ред. Н. А. Бернштейна), кн. 1. Биодинамика ходьбы нормального взрослого мужчины. М. - Л., Изд-во Всес. ин-та эксперим. медицины, 1935.
5. Гурфинкель В. С., Фомин С. В., Штилькин Т. К. Определение суставных моментов при локомоции. Биофизика, 1970, т. 15, вып. 2.
6. Вукобрагович М., Франк А., Джурич Д. Об устойчивости передвижения на двух ногах. В сб.: Механика, 1972, № 1 (131).
7. Vukobratovic M. A contribution to the mathematical theory of the artificial biped motion. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 3. Киев, Изд-во ин-та матем. АН УССР, 1970.
8. Chow C. K., Jacobson D. H. Studies of human locomotion via optimal programming. Math. Biosc., 1971, vol. 10, No. 3/4, p. 239-306.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.