МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1975

УДК 534

ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ

В. Г. ПОДОЛЬСКИЙ

(Харьков)

Теоремы существования, единственности и устойчивости периодического движения осциллятора с нелинейным демпфированием, имеющего одну массу, одну пружину и одну фрикционную связь, доказаны в [1]. В данной работе рассматриваются вопросы качественной теории вынужденных периодических колебаний систем с сухим трением с большим числом масс и фрикционных связей. Такие системы являются расчетными схемами при исследовании колебаний строительных конструкций с учетом сухого трения между элементами [2].

1. Система содержит конечное число k фрикционных связей, размещенных так, что их заклинивание (замена фрикционной связи жесткой), изменяя характеристики жесткости, не останавливает перемещений масс (имеются в виду не только абсолютные, но и относительные перемещения масс). Когда все силы сухого трения равны нулю, а также при заклиненных фрикционных связях система устойчива и линейна как по восстанавливающим, так и по диссипативным силам (учитывается внутреннее трение в материале, коэффициент неупругого сопротивления материала γ не зависит от амплитуды); элементами, обуславливающими нелинейность системы, являются только фрикционные связи.

Характеристика фрикционной связи показана на фиг. 1, где H_i — усилие в связи, F_i — модуль предельной величины этого усилия (величина силы трения при движении), x_i — относительное перемещение, а $x_i^{\bullet}$ — скорость относительного перемещения соприкасающихся элементов связи, i — номер связи ($i=1, \ldots, k$).

Перемещения масс системы с фрикционными связями могут быть представлены в виде разложения по собственным формам колебаний линейной системы, которая получается из исследуемой, если положить $\gamma=0$ и все $F_i=\infty$. Коэффициенты разложения $q_s(t)$, где t — время, являются обобщенными координатами нелинейной системы. При этом удерживается конечное число координат q_s ($s=1, \ldots, n$). Если все массы сосредоточенные, то n совпадает с числом масс. Такой прием применяется и для приближенного исследования систем с распределенными массами.

К массам системы приложены периодические возмущающие силы (период T всех возмущающих сил одинаков). Функции, описывающие изменение возмущающих сил во времени, удовлетворяют условиям Дирихле.

Внутреннее трение в строительных материалах, не зависящее от частоты [3], учитывается приближенно при помощи эквивалентных вязких сил [4].

В работе [2] получены дифференциальные уравнения колебаний описанных выше систем. Для сокращения дальнейших выкладок эти уравнения представим в форме

$$\varphi_s(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = R_s(t), \qquad \psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}) + H_i[\psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}), x_i^{\bullet}] = 0 \tag{1.1}$$

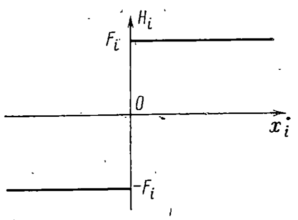
$$(s=1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, k)$$

где φ_s и ψ_i — линейные операторы, определяемые из формул

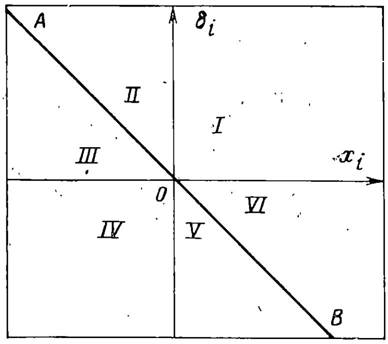
$$(1.2)\qquad \varphi_s(\mathbf{q},\mathbf{x})=\left[q_s^{\cdot\cdot}+\lambda_s^2\left(q_s+\frac{\gamma}{\omega}q_s^{\cdot}\right)\right]A_s^2+\sum_{\nu=1}e_{s\nu}\left(x_\nu+\frac{\gamma}{\omega}x_\nu^{\cdot}\right)$$

$$\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})=\sum_{s=1}^{n}e_{si}\left(q_s+\frac{\gamma}{\omega}q_s^{\cdot}\right)+\sum_{\nu=1}^{k}c_{i\nu}\left(x_\nu+\frac{\gamma}{\omega}x_\nu^{\cdot}\right)$$

$R_s(t)$ — коэффициенты разложения возмущающей нагрузки по собственным формам колебаний указанной выше линейной системы, т. е. периодические функции времени с периодом T, удовлетворяющие условиям Ди-



Фиг. 1



Фиг. 2

рихле, $\omega=2\pi/T$ — основная частота возмущающей нагрузки, λ_s, A_s, $e_{s\nu}$, $c_{i\nu}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы, $H_i[\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x}), x_i^{\cdot}]$ — усилие в i-й фрикционной связи, способ определения которого различен для двух возможных состояний этой связи — покоя (когда $|\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})|<F_i$, $x_i^{\cdot}=0$) и скольжения (когда $|\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})|=F_i$, $x_i^{\cdot}\neq0$). На интервалах времени покоя $H_i=-\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})$ определяется из i-го уравнения, система (1.1) интегрируется без этого уравнения, причем принимается, что соответствующая скорость $x_i^{\cdot}=0$, а перемещение $x_i=\text{const}$ (величина $x_i=\text{const}$ определяется в конце предшествующего интервала времени, на котором имеет место скольжение). Интервал покоя сменяется интервалом скольжения в момент $t=t^*$, при котором наступает равенство $|\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})|=F_i$, причем при $t=t^*-0$ $\operatorname{sign}\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})=\operatorname{sign}d^\nu[\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})]/dt^\nu$, где ν — наинизший порядок производной, отличной от нуля при $t=t^*-0$ (если производные порядка $1, 2, \ldots, \nu-1$ при $t=t^*-0$ равны нулю, то принимается во внимание знак производной ν-го порядка). Знак скорости $x_i^{\cdot}$ на последующем интервале времени, на котором имеет место скольжение, противоположен знаку $\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})$ при $t=t^*$; при скольжении нужно принять $H_i=F_i\operatorname{sign}x_i^{\cdot}$ и интегрировать i-е уравнение совместно с остальными уравнениями системы (1.1). Скольжение сменяется состоянием покоя в момент $t=t^{**}$, когда $x_i^{\cdot}=0$, причем при $t=t^{**}-0$ $\operatorname{sign}d^\nu(x_i^{\cdot})/dt^\nu=-\operatorname{sign}H_i$, где ν — наинизший порядок производной, отличной от нуля при $t=t^{**}-0$.

Система дифференциальных уравнений (1.1) кусочно-линейна. При заданных начальных условиях в результате интегрирования системы (1.1) могут быть найдены определенные ограниченные непрерывные функции времени q_s, $q_s^{\cdot}$, x_i, $x_i^{\cdot}$ ($s=1,\ldots,n$; $i=1,\ldots,k$). Доказательство ограниченности и непрерывности этих функций здесь не приводится. Исследуется характер движения системы, начавшегося с произвольных начальных условий, при $t\to\infty$.

2. Воспользуемся вспомогательными соотношениями. Рассмотрим функцию

(2.1) $$\Psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\delta})=\{H_i[\psi_i(\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}), x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot}]-H_i[\psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})x_i^{\cdot}]\}\delta_i^{\cdot}$$

Выражение в фигурных скобках представляет разность усилий в i-й фрикционной связи при двух движениях системы: одно движение определено совокупностью функций $q_s(t)+\Delta_s(t)$ и $x_\nu(t)+\delta_\nu(t)$, другое – $q_s(t)$ и $x_\nu(t)$ ($s=1,\ldots,n$; $\nu=1,\ldots,k$); оператор ψ_i определен формулой (1.2); функции q_s, Δ_s, x_ν, δ_ν могут не удовлетворять системе (1.1), но являются непрерывными с определенными первыми производными.

Соотношение, которое потребуется в дальнейшем, формулируется так: функция $\Psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\delta})$, определенная (2.1), неотрицательна, т. е.

(2.2) $$\Psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\delta})\geqslant 0$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (2.2), определим знак величины $N_i=\Psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\delta})$ при всех возможных сочетаниях скоростей $x_i^{\cdot}$, $\delta_i^{\cdot}$, $x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot}$, причем выделим случаи, когда каждая из этих скоростей положительна, отрицательна или равна нулю.

Рассмотрим совокупность точек в системе координат $x_i^{\cdot}$, $\delta_i^{\cdot}$ (фиг. 2). Проведем прямую AOB, уравнение которой $x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot}=0$. Эта прямая и оси координат делят плоскость на шесть областей. При переходе из какой-либо области в соседнюю изменяется знак одной из рассматриваемых скоростей $x_i^{\cdot}$, $\delta_i^{\cdot}$ и $x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot}$. Считаем, что каждая из этих областей открыта, т. е. точки, расположенные на прямых, разграничивающих области, не принадлежат ни одной из областей; на этих прямых одна из скоростей равна нулю.

На оси $x_i^{\cdot}$, в том числе в точке O, $N_i=0$, ибо $\delta_i^{\cdot}=0$. На оси $\delta_i^{\cdot}$, где $x_i^{\cdot}=0$, $N_i=F_i\delta_i^{\cdot}\,\mathrm{sign}\,\delta_i^{\cdot}-\delta_i^{\cdot}\psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})\geqslant 0$, так как $|\psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})|\leqslant F_i$. На прямой AOB $N_i=\delta_i^{\cdot}\psi_i(\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}+\boldsymbol{\delta})-\delta_i^{\cdot}F_i\,\mathrm{sign}\,(-\delta_i^{\cdot})\geqslant 0$. Следовательно, для точек, расположенных на разделяющих области прямых (2.2) справедливо.

В областях I, III, IV и VI $\mathrm{sign}\,(x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot})=\mathrm{sign}\,x_i^{\cdot}$, поэтому $N_i=$ $=\delta_i^{\cdot}[F_i\,\mathrm{sign}\,(x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot})-F_i\,\mathrm{sign}\,x_i^{\cdot}]=0$. Для точек, принадлежащих областям II и V, справедливо соотношение: $\mathrm{sign}\,x_i^{\cdot}=-\mathrm{sign}\,(x_i^{\cdot}+\delta_i^{\cdot})=-\mathrm{sign}\,\delta_i^{\cdot}$, при котором $N_i=F_i\delta_i^{\cdot}\,\mathrm{sign}\,\delta_i^{\cdot}-F_i\delta_i^{\cdot}\,\mathrm{sign}\,x_i^{\cdot}>0$. Соотношение (2.2) доказано.

3. Второе вспомогательное соотношение отражает одно из свойств операторов, определенных формулами (1.2).

Если в (1.1) положить все $F_i=0$ и, следовательно, $H_i=0$, то получим дифференциальные уравнения движения линейной системы. Положив, далее, что все $R_s(t)\equiv 0$, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний этой системы

(3.1) $$\varphi_s(\mathbf{q}, \mathbf{x})=0, \quad \psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})=0 \quad (s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k)$$

Используем известное [5] для дифференциальных уравнений свободных колебаний линейных систем соотношение

(3.2) $$S(\mathbf{q},\mathbf{x})=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(\mathbf{q},\mathbf{x})q_s^{\cdot}+\sum_{i=1}^{k}\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x})x_i^{\cdot}=$$
$$=\frac{d}{dt}[K(\mathbf{q}^{\cdot})+U(\mathbf{q},\mathbf{x})]+2\Phi(\mathbf{q}^{\cdot},\mathbf{x}^{\cdot})$$

где $K(\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}})$ — кинетическая энергия, $U(\mathbf{q},\ \mathbf{x})$ — потенциальная энергия, $\Phi(\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}},\ \mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}})$ — диссипативная функция, представляющие собой квадратичные формы от обобщенных скоростей (K и Φ) или координат (U) системы.

Из структуры операторов (1.2) видно, что коэффициенты форм $U(\mathbf{q},\ \mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}},\ \mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}})$ отличаются лишь положительным множителем γ/ω. Так как система без сухого трения устойчива, то потенциальная энергия $U(\mathbf{q},\ \mathbf{x})$ — определенно-положительная функция. Поэтому диссипативная функция также определенно-положительна. Кинетическая энергия всегда является определенно-положительной формой от обобщенных скоростей.

Если $q_s(t)$ и $x_i(t)$ $(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k)$ удовлетворяют уравнениям (3.1), то $S(\mathbf{q},\ \mathbf{x})\equiv 0$ [5], причем в этом случае при $t\to\infty$ $q_s\to 0$ и $x_i\to 0$.

В (3.2) можно подставить вместо функций $q_s(t)$ и $x_i(t)$ другие ограниченные функции времени $\Delta_s(t)$ и $\delta_i(t)$ $(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k)$, имеющие определенные ограниченные первые производные

(3.3) $$S(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\delta})=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\delta})\Delta_s^{\boldsymbol{\cdot}}+\sum_{i=1}^{k}\psi_i(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\delta})\delta_i^{\boldsymbol{\cdot}}=$$
$$=\frac{d}{dt}[K(\boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{\cdot}})+U(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\delta})]+2\Phi(\boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{\cdot}},\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\cdot}})$$

Если Δ_s и δ_i не удовлетворяют уравнениям (3.1), то $S(\boldsymbol{\Delta},\ \boldsymbol{\delta})$ может не быть равной нулю.

Положительность квадратичной формы определяется набором ее коэффициентов. Поэтому $\Phi(\boldsymbol{\Delta}^{\boldsymbol{\cdot}},\ \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\cdot}})\geqslant 0$, причем знак равенства справедлив лишь тогда, когда все $\Delta_\nu^{\boldsymbol{\cdot}}$ и $\delta_j^{\boldsymbol{\cdot}}$ равны нулю.

Из изложенного вытекает справедливость следующего утверждения: если Δ_ν, $\Delta_\nu^{\boldsymbol{\cdot}}$, δ_j, $\delta_j^{\boldsymbol{\cdot}}$ — ограниченные функции времени $(\nu=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k)$, причем при $t\to\infty$ модули всех производных $\Delta_\nu^{\boldsymbol{\cdot}}$ и $\delta_j^{\boldsymbol{\cdot}}$ не уменьшаются до нуля, то

(3.4) $$\int_{t_0}^{\infty}S(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\delta})\,dt=+\infty$$

где t_0 — произвольный фиксированный момент времени, $S(\boldsymbol{\Delta},\ \boldsymbol{\delta})$ определяется из (3.3).

Отметим некоторые свойства функции

(3.5) $$M_i(\mathbf{q},\mathbf{x},\boldsymbol{\Delta}_c,\boldsymbol{\delta}_c)=H_i[\psi_i(\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}_c,\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}_c),x_i^{\boldsymbol{\cdot}}]-H_i[\psi_i(\mathbf{q},\mathbf{x}),x_i^{\boldsymbol{\cdot}}]$$
$$\Delta_{\nu c}=\mathrm{const},\qquad \delta_{jc}=\mathrm{const}\qquad (\nu=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k)$$

представляющей разность усилий во фрикционной связи при двух движениях системы, при которых соответствующие функции, описывающие изменения обобщенных координат во времени, отличаются постоянными слагаемыми $\Delta_{\nu c}$ и δ_{jc}; обобщенные скорости при этих двух движениях совпадают во все моменты времени.

Из структуры операторов ψ_i видно, что

(3.6) $$M_i(\mathbf{q},\mathbf{x},\boldsymbol{\Delta}_c,\boldsymbol{\delta}_c)\equiv-\psi_i(\boldsymbol{\Delta}_c,\boldsymbol{\delta}_c)=\mathrm{const}\quad\text{при } x_i^{\boldsymbol{\cdot}}\equiv 0$$

Рассмотрим случай, когда все q_s и x_j являются периодическими функциями времени периода T. Тогда $x_i^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$ — знакопеременная функция,

$x_i^\cdot(t)\neq 0$. Если при этом $\psi_i(\Delta_c, \delta_c)\neq 0$, то $M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \Delta_c, \delta_c)$ — величина переменная; если $x_i^\cdot\neq 0$, $q_s(t+T)=q_s(t)$ и $x_j(t+T)=x_j(t)$ $(s=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k)$, причем $\psi_i(\Delta_c, \delta_c)\neq 0$, то

$$M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \Delta_c, \delta_c)\neq\mathrm{const} \tag{3.7}$$

Очевидно, что

$$M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \Delta_c, \delta_c)\equiv 0 \quad \text{при} \quad \psi_i(\Delta_c, \delta_c)=0 \tag{3.8}$$

и, в частности, когда все $\Delta_{vc}=0$ и $\delta_{jc}=0$.

4. Рассмотрим движение системы, определенное совокупностью функций $q_s(t)$ и $x_i(t)$ $(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k)$ при произвольных начальных условиях. Сравним значения этих функций в моменты времени t и $t+T$, где T — период возмущающей нагрузки. Обозначим разности между соответствующими функциями при значениях $t+T$ и t через Δ_s и δ_i

$$q_s(t+T)=q_s(t)+\Delta_s(t), \qquad x_i(t+T)=x_i(t)+\delta_i(t) \tag{4.1}$$

Функции $q_s(t+T)$, $x_i(t+T)$ и $q_s(t)$, $x_i(t)$ удовлетворяют системе (1.1). Подставим в эту систему $q_s(t+T)$, $x_i(t+T)$, а затем $q_s(t)$, $x_i(t)$ и произведем вычитания соответствующих уравнений. Так как $R_s(t)=R_s(t+T)$, то

$$\varphi_s(\Delta, \delta)=0 \quad {\scriptstyle (s=1,\ldots,n)} \tag{4.2}$$

$$\psi_i(\Delta, \delta)+H_i[\psi_i(\mathbf{q}+\Delta, \mathbf{x}+\delta), x_i^\cdot+\delta_i^\cdot]-H_i[\psi_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}), x_i^\cdot]=0 \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,k)} \tag{4.3}$$

Умножим уравнения (4.2) на соответствующие $\Delta_s^\cdot$, уравнения (4.3) — на $\delta_i^\cdot$, просуммируем их и проинтегрируем в пределах от произвольного t_0 до ∞

$$\int_{t_0}^{\infty} S(\Delta, \delta)\,dt+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{\infty}\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \Delta, \delta)\,dt=0 \tag{4.4}$$

где $S(\Delta, \delta)$ определяется из (3.3), а $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \Delta, \delta)$ — из (2.1).

В соответствии с (3.4), если при $t\to\infty$ модули всех $\Delta_s^\cdot$ и $\delta_i^\cdot$ не уменьшаются до нуля, первый интеграл в (4.4) равен $+\infty$. Из (2.2) следует, что второе слагаемое в (4.4) неотрицательно. Поэтому равенство (4.4) возможно только тогда, когда при $t\to\infty$ все $\Delta_s^\cdot\to 0$ и все $\delta_i^\cdot\to 0$.

Следовательно, при $t\to\infty$ все $q_s^\cdot(t)$ и все $x_i^\cdot(t)$ приближаются к некоторым периодическим функциям с периодом T. Все координаты q_s и x_i ограничены. Поэтому при $t\to\infty$ $q_s(t)\to q_s(t+T)$ и $x_i(t)\to x_i(t+T)$, т. е. движение приобретает периодический характер.

Отсюда следует справедливость такого утверждения: периодическое решение уравнений (1.1) с периодом возмущающей нагрузки существует; движение системы, начавшееся с произвольных начальных условий и имеющее в начальной стадии непериодический характер, с течением времени неограниченно приближается к периодическому движению, имеющему период возмущающей нагрузки.

5. Перейдем к рассмотрению вопроса о единственности периодического движения, в частности, — о возможности субгармонических колебаний.

Обозначим периодическое (с периодом T) решение уравнений (1.1) через $q_s(t)$, $x_i(t)$ $(s=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k)$. Предположим, что наряду с этим решением существует другое периодическое решение $q_s'(t)$, $x_i'(t)$, имеющее период χT, где χ — некоторое целое положительное число. Если $\chi\neq 1$, то второе движение содержит субгармоники. Обозначим $q_s'-q_s=\Delta_s$,

$\dot{x}_i' = \dot{x}_i = \dot{\delta}_i$. В рассматриваемом случае, очевидно, Δ_s и δ_i — функции времени с периодом χT.

Тем же способом, что и в п. 4, получаем уравнения (4.2) и (4.3), соотношение (4.4) и приходим к выводу, что при $t \to \infty$ $\dot{\Delta}_s \to 0$ и $\dot{\delta}_i \to 0$. Но в рассматриваемом случае $\dot{\Delta}_s$ и $\dot{\delta}_i$ — периодические функции. Поэтому в любой момент времени

$$\dot{\Delta}_s = \dot{\delta}_i = 0, \quad \Delta_s = \Delta_{sc} = \text{const}, \quad \delta_i = \delta_{ic} = \text{const} \qquad (s=1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, k)$$

Таким образом, соответствующие обобщенные скорости двух периодических движений совпадают в любой момент времени, а соответствующие координаты могут отличаться на постоянные величины Δ_{sc}, δ_{ic}. Следовательно, периоды этих двух движений совпадают. Так как движение с периодом T существует, то все другие возможные периодические движения имеют тот же период, совпадающий с периодом возмущающей нагрузки. Это значит, что субгармонические колебания рассматриваемой системы невозможны.

Определим условия, при которых периодическое движение единственно. Уравнения (4.2) и (4.3) с учетом полученного выше результата $\Delta_s = \Delta_{sc}$, $\delta_i = \delta_{ic}$ могут быть представлены в виде

$$(5.1) \qquad \varphi_s(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) = 0, \qquad \psi_i(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) = -M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) \qquad (s=1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, k).$$

Здесь операторы φ_s и ψ_i, определенные формулами (1.2), применены к совокупности постоянных Δ_{jc} и $\delta_{\nu c}$, функция $M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)$ определена формулой (3.5). Левые части уравнений (5.1) представляют собой линейные формы от постоянных Δ_{jc} и $\delta_{\nu c}$, поэтому $\psi_i(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) = \text{const}$. Следовательно, $M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) = \text{const}$.

Рассмотрим случаи, когда на систему действуют достаточно большие силы и существует периодическое решение, при котором во всех фрикционных связях происходит скольжение, т. е. выполняется условие $\dot{x}_i \neq 0$ $(i=1, \ldots, k)$. Тогда в соответствии с (3.7) $M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) \neq \text{const}$ при $\psi_i(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) \neq 0$. Но это противоречит полученному выше результату. Остается принять, что все $\psi_i(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) = 0$ и, как следует из (3.8), все $M_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c) \equiv 0$. При этом (5.1) превращается в систему линейных однородных алгебраических уравнений, постоянные коэффициенты которых совпадают с коэффициентами квадратичной формы от обобщенных координат, являющейся выражением потенциальной энергии системы. Так как потенциальная энергия — определенно-положительная функция, то ее дискриминант и все его главные миноры не равны нулю [5]. Поэтому не равен нулю и определитель системы линейных однородных уравнений (5.1), а сама система имеет единственное решение: все $\Delta_{sc} = 0$ и все $\delta_{ic} = 0$.

Следовательно, если система (1.1) имеет периодическое решение, при котором происходят проскальзывания во всех фрикционных связях (нет такой фрикционной связи, которая на протяжении периода колебаний остается в покое), то это периодическое решение единственное.

Рассмотрим другое периодическое решение системы (1.1), при котором хотя бы в одной фрикционной связи (например, ν-й) нет скольжения $(\dot{x}_\nu \equiv 0)$.

Используя (3.6), получаем, что ν-е уравнение системы (5.1) превращается в тождество и должно быть исключено из системы. В оставшейся системе число неизвестных больше числа уравнений. Ранг матрицы коэффициентов уравнений совпадает с числом уравнений, ибо из матрицы может быть выделен один из главных диагональных миноров дискриминанта потенциальной энергии. Такая система уравнений имеет бесчисленное множество отличных от нуля решений. Следовательно, рассматриваемое периодическое решение системы (1.1) не единственное, имеется сколько угодно периодических решений, но таких, что их соответствующие обобщенные координаты отличаются лишь постоянными слагаемыми.

Различным периодическим решениям системы (1.1) отвечают различные начальные условия движения. Из этого не следует, однако, что при неограниченном варьировании начальных условий постоянные Δ_{sc}, δ_{ic} изменяются в сколь угодно широких пределах: существуют предельные значения величин Δ_{sc}, δ_{ic}, зависящие от параметров системы, так что при любом различии в начальных условиях двух движений модули постоянных Δ_{sc}, δ_{ic} меньше определенных ограниченных величин.

Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, рассмотрим соотношения, которым удовлетворяют Δ_{sc}, δ_{ic} при таких периодических движениях, когда в m фрикционных связях ($m<k$) имеют место проскальзывания, а остальные $k-m$ фрикционных связей неподвижны. Перенумеруем, для определенности, фрикционные связи таким образом, что $x_j^{\boldsymbol{\cdot}}\neq 0$ ($j=1,\ldots,m$) и $x_\nu^{\boldsymbol{\cdot}}\equiv 0$ ($\nu=m+1,\ldots,k$). Тогда в соответствии с полученным выше результатом $\psi_j(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)=0$ ($j=1,\ldots,m$). Если рассматриваемое движение описывается совокупностью функций $q_s(t)$, $x_i(t)$, то для неподвижных связей ($\nu=m+1,\ldots,k$) справедливы неравенства $-F_\nu<\psi_\nu(\mathbf{q}, \mathbf{x})<F_\nu$. Аналогичные неравенства могут быть записаны при другом периодическом движении, соответствующими обобщенными координатами которого являются $q_s+\Delta_{sc}$, $x_i+\delta_{ic}$, а именно $-F_\nu<\psi_\nu(\mathbf{q}+\mathbf{\Delta}_c, \mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}_c)<F_\nu$. Отсюда следует, что $-2F_\nu<\psi_\nu(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)<2F_\nu$ ($\nu=m+1,\ldots,k$). Таким образом, вместо (5.1) можно записать следующую систему соотношений:

$$\varphi_s(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)=0, \quad \psi_j(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)=0, \quad \psi_\nu(\mathbf{\Delta}_c, \boldsymbol{\delta}_c)=L_\nu \quad (-2F_\nu<L_\nu<2F_\nu) \tag{5.2}$$

$$(s=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m;\ \nu=m+1,\ldots,k)$$

Определитель, составленный из коэффициентов левых частей соотношений (5.2), совпадает с определителем системы уравнений (5.1) и не равен нулю.

Так как все $|L_\nu|$ ограничены, то ограничены по модулю и все Δ_{sc}, δ_{ic}, что доказывает правильность высказанного выше утверждения.

Множественность периодических решений указанного типа нетрудно объяснить с механической точки зрения, если учесть, что фрикционная связь имеет «зону застоя».

При исследовании периодических колебаний конструкций интересуются обычно переменной частью функций, описывающих перемещения системы, ибо именно она определяет такие важнейшие параметры периодического движения, как частоты и размахи колебаний отдельных гармонических составляющих и движения в целом. Изменения «среднего» положения системы, относительно которого происходят периодические колебания, обычно значения не имеют.

Поэтому полученные в п. 5 результаты целесообразно сформулировать следующим образом.

Все периодические движения рассматриваемой системы имеют одинаковые частоты и размахи колебаний соответствующих гармонических составляющих, обобщенные скорости этих движений совпадают в любой момент времени, а обобщенные координаты могут отличаться ограниченными постоянными слагаемыми, предельная величина которых зависит только от параметров системы, но не от начальных условий движения. Если при периодическом движении происходит проскальзывание во всех фрикционных связях (это определяется величиной возмущающих сил), то такое периодическое движение единственное. Субгармонические колебания рассматриваемой системы невозможны.

6. Рассмотрим устойчивость периодических движений.

Исследуемое периодическое движение описывается совокупностью функций $q_s(t)$, $x_i(t)$, возмущенное движение — $q_s''(t)$, $x_i''(t)$. Указанные функции удовлетворяют уравнениям (1.1). Обозначим вариации: $\Delta_s = q_s'' - q_s$, $\delta_i - x_i'' - x$. Так же, как и в п. 4, 5, получаем уравнения (4.2) и (4.3), соотношение (4.4) и приходим к выводу: при $t \to \infty$ $\Delta_s^{\cdot} \to 0$ и $\delta_i^{\cdot} \to 0$, $\Delta_s \to \Delta_{sc} = \text{const}$ и $\delta_i \to \delta_{ic} = \text{const}$.

Повторяя рассуждения, приведенные в п. 5, находим, что если при рассматриваемом периодическом движении во всех фрикционных связях происходит скольжение (все $x_i^{\cdot} \neq 0$), то все $\Delta_{sc} = \delta_{ic} = 0$. Если же имеются такие связи, где $x_\nu^{\cdot} \equiv 0$, то постоянные Δ_{sc} и δ_{ic} могут отличаться от нуля. Они удовлетворяют соотношениям (5.2) и поэтому ограничены.

Следовательно, справедливо утверждение: любое возмущенное движение исследуемой системы при $t \to \infty$ неограниченно приближается к некоторому периодическому движению, обобщенные координаты которого отличаются постоянными слагаемыми (вариациями) от обобщенных координат рассматриваемого движения; указанные постоянные вариации ограничены, их предельные значения определяются не величинами первоначальных возмущений, а параметрами системы; если при рассматриваемом периодическом движении скольжение происходит во всех фрикционных связях (все $x_i^{\cdot} \neq 0$), то такое периодическое движение устойчиво асимптотически.

Полученные в п. 4—6 результаты нетрудно обобщить на системы с так называемым «комбинированным трением», в которых параллельно с фрикционными связями работают нелинейные вязкие демпферы. Важно, чтобы суммарные силы нелинейного неупругого сопротивления во всех элементах являлись неубывающими функциями соответствующих скоростей $x_i^{\cdot}$. Если это требование выполняется, то остается справедливым соотношение (2.2), а также все остальные соотношения, на которых основаны доказательства.

Поступила 6 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Железцов Н. А.* Метод точечного преобразования и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с комбинированным трением. ПММ, 1949, т. 13, вып. 1.
2. *Подольский В. Г.* Вибрация конструкций при сухом трении между элементами. Харьков, «Прапор», 1970.
3. *Сорокин Е. С.* Динамический расчет несущих конструкций зданий. М., Госстройиздат, 1956.
4. *Филиппов А. П.* Колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1965.
5. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М., Гостеортехиздат, 1958.