

с ростом величин подвижных нагрузок и скоростей движения необходимо учитывать возможность отрыва балки от основания и, как следствие этого, потери устойчивости формы изгиба в подвижной системе координат. Заметим, что предположение о наличии только одной зоны отрыва впереди движущейся нагрузки выполняется, по крайней мере для диапазонов изменения  $\lambda$  от нуля до значений, при которых  $P_1$  обращается в нуль (при каждом значении  $v_1$ ). При  $\alpha < \pi/s$  заведомо не будет зон отрыва и на участке приложения движущихся сил при любых их значениях.

Поступила 27 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kenney J. T. Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No. 4.
2. Mathews P. M. Vibrations of a beam on elastic foundation. Z. angew. Math. und Mech., Pt. 1, 1958, Bd. 38, H. 3/4; pt. 2, 1959, Bd. 39, H. 1/2.
3. Муравский Г. Б. Неустановившиеся колебания балки, лежащей на упругом основании, при действии подвижной нагрузки. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Weitsmann Y. Onset of separation between a beam and a tensionless elastic foundation under a moving load. Internat. J. Mech. Sci., 1971, vol. 13, No. 8.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

УДК 534.061.3

#### МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ СЕМИНАРЫ

Теоретический семинар под руководством Ю. Н. Работнова, Л. А. Галина, Г. С. Шапиро, В. Д. Ключникова

9 IX 1974. А. И. Зобнин (Москва). *Некоторые задачи механики разрушения.*

Решена задача по растяжению ортотропной полосы с центральной поперечной трещиной. Показано, что для длинных образцов с поперечными разрезами влияние анизотропии материала на коэффициент интенсивности напряжения невелико и что в испытаниях на вязкость разрушения даже существенно ортотропных материалов можно использовать стандартные изотропные  $K$ -тарировки. Приведены результаты экспериментального определения характеристик вязкости разрушения изотропных и анизотропных графитовых материалов.

Представлено решение задачи о растяжении ортотропных плоскостей, ослабленных двумя ортогональными трещинами, результаты которого использованы для анализа условий распространения вторичной трещины вдоль волокон однонаправленного композита.

Построена модель разрушения полимерного материала, описывающая кинетику роста макротрещины в результате накопления субмикротрещин во всем объеме тела.

16 IX 1974. Э. И. Гольденгершель (Москва). *О принципе предельного модуля для первой краевой задачи линейной вязкоупругости.*

Рассматривается первая краевая задача линейной вязкоупругости для однородной изотропной среды

$$\Delta U + ((1-2\nu)I - V_\nu)^{-1} \text{grad div } U = -(\mu I - V_\mu)^{-1} K \\ U = U(x, t); K = K(x, t); x \in \Omega; t \in [0, \infty); U/\partial\Omega = 0.$$

Здесь  $\Omega$  — конечная область, заполненная вязкоупругой средой с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  — мгновенный коэффициент Пуассона вязкоупругой среды,  $U(x, t)$  — вектор смещений,  $K(x, t)$  — вектор объемной силы,  $V_\nu, V_\mu$  — вязкоупругие операторы, действующие по  $t$ . Предполагается, что  $K(x, t) \in L^2(\Omega)$  почти при каждом фиксированном  $t$ . Решение ищется в том же классе. Краевая задача называется асимптотически-устойчивой, если существование конечного по норме  $L^2(\Omega)$  предела  $\lim K(x; t) = LK$  влечет за собой существование конечного в том же смысле предела

$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = (LU)(x)$ . При некоторых естественных предположениях относительно операторов  $V_v, V_\mu$  доказывается теорема: 1) для асимптотической устойчивости краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы  $\omega \neq \xi(1-\xi v)^{-1}$ ,  $\omega = (1-2v)^{-1}$ , где  $v$  пробегает спектр оператора  $V_v$  в пространстве  $\Lambda(1)(0, \infty)$ , а  $\xi$  — спектр Коссера, соответствующей упругой задаче; 2) при соблюдении этого условия  $(LU)(x)$  является решением упругой задачи, получающейся из сформулированной выше заменой  $U(x, t)$  на  $(LU)(x)$ ,  $K(x, t)$  на  $(LK)(x)$  вольтеровых операторов  $V_v$  и  $V_\mu$  операторами умножения на константы  $\lim_{t \rightarrow \infty} (V_v 1)(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} (V_\mu 1)(t)$  соответственно.

23 IX 1974. А. Б. Левина (Москва). *Малоцикловая усталость металлов.*

Выводятся механические уравнения состояния, содержащие конечное число структурных параметров. В качестве параметра структуры, являющегося мерой упрочнения материала, принята удельная диссипация механической энергии вследствие необратимых деформаций и в качестве меры разупрочнения взят параметр повреждаемости, определяющий и критерий разрушения.

Рассматривается приложение уравнений к малоцикловой усталости при нормальных температурах для симметричного и несимметричного циклического деформирования. Проведено сопоставление мягкого и жесткого нагружения и сравнение с экспериментом. Изучается влияние высоких температур на усталость. Рассмотрены случаи чистой ползучести, релаксации, динамической ползучести, сочетание механической усталости и динамической ползучести, жесткое нагружение при повышенных температурах. Решаются температурные задачи малоцикловой усталости.

Вводится понятие эквивалентных стандартных испытаний и критерий оценки результатов сложных испытаний на основе данных более простых экспериментов. Обсуждается влияние частоты нагружения на результаты испытаний при малом числе циклов нагружения. Решаются задачи суммирования повреждений при циклических нагружениях. Сделан вывод о возможности применения механических уравнений состояния к описанию сложного процесса деформирования и разрушения при малом числе циклов нагружения.

7 X 1974. П. П. Мосолов (Москва). *Связь вариационного принципа и принципа виртуальных мощностей для вязкопластических сред.*

Известно, что в линейной теории упругости принцип виртуальных работ эквивалентен задаче о минимуме соответствующего функционала. Точно так же в случае медленных стационарных движений несжимаемых нелинейно-вязких жидкостей принцип виртуальных мощностей эквивалентен задаче о минимуме функционала.

Для вязкопластических сред связь принципа виртуальных мощностей и задачи об экстремуме функционала не очевидна, так как в формулировке принципа виртуальных мощностей участвуют неизвестные границы, разделяющие области жесткого состояния среды и области течения, функционал формально соответствующий вязкопластической среде оказывается недифференцируемым.

При рассмотрении задач о движении вязкопластических сред на основе принципа виртуальных мощностей не было получено общих теорем ни о существовании решения, ни о его единственности. Большинство решений конкретных задач о движении вязкопластической среды найдено из принципа виртуальных мощностей, причем для всех этих решений оставалась неисследованной проблема единственности. С другой стороны, для тех же задач, сформулированных как задачи об экстремуме функционала, можно доказать общие теоремы о существовании и единственности минимизирующего векторного поля, однако вопрос о том, являются ли решения, найденные из принципа виртуальных мощностей, минимизирующими соответствующие функционалы, оставался открытым.

В докладе показано, что принцип виртуальных мощностей и задача о минимуме соответствующего функционала для вязкопластических сред эквивалентны.

14 X 1974. П. П. Мосолов (Москва). *Оценки снизу минимального значения функционала.*

При исследовании конкретных задач о минимуме функционала с помощью приближенных методов целесообразно проводить параллельно два процесса: один процесс, например, по схеме метода Рунца, дающий оценки сверху нижней грани функционала, и другой процесс на основе, например, принципа Кастильяно, позволяющего получать нижние оценки для минимального значения функционала. Однако принцип Кастильяно требует нахождения специальных вектор-функций, что в конкретных задачах не всегда легко сделать.

В докладе предложен другой метод получения оценок снизу минимального значения функционала. Этот метод по существу состоит в следующем. Если считать, что компоненты тензора скоростей деформаций — произвольные независимые функции, то задача о минимуме функционала для многих задач механики сплошной среды

становится задачей об экстремуме функции нескольких переменных. Указана счетная система условий ортогональности для компонент тензора скоростей деформаций, которая эквивалентна условиям совместности компонент тензора скоростей деформаций. Взяв лишь конечное число условий из этой системы, приходим к оценке снизу минимального значения функционала. По известному правилу при исследовании экстремума функционала конечное число условий ортогональности можно заменить множителями Лагранжа. Таким образом, при конечном числе условий ортогональности задача о минимуме функционала эквивалентна задаче об экстремуме функции нескольких переменных. Используя указанный метод множителей Лагранжа, удается получить законченное математическое решение классической задачи Сен-Венана о кручении идеально-пластического стержня. Отмечено, что традиционное исследование этой задачи приводит лишь к оценке снизу предельного момента, так как это исследование основано на рассмотрении напряженного состояния стержня без изучения связи напряженного состояния и поля скоростей движения.

21 X 1974. А. Н. Сунрун (Горький). *Некоторые методы исследования и совершенствования наследственных моделей.*

Дается математическое обоснование нелинейных наследственных определяющих соотношений с интегралами Стильеса как допустимых функционалов целого порядка в пространстве функций с ограниченной вариацией. Приводится система определений и теорем теории стилтесовских реологических моделей.

Предлагается метод исследования наследственных уравнений (метод локальных соотношений), основанный на представлении операторов в виде алгебраических выражений, связывающих производные по времени от компонент тензоров достаточно гладких историй напряжений и деформаций в окрестности фиксированной точки временного интервала. Методом локальных соотношений устанавливаются следующие свойства-ограничения в применении наследственных моделей: относительность связи кинематических функций от альтернативных программ нагружения, линейность соотношения в окрестности каждой точки временного интервала производных по времени любого целого порядка от историй деформаций и напряжений, ограниченность памяти.

Постулируются феноменологические признаки деформационного нарушения структуры среды при двухступенчатой программе нагружения (мгновенное упрочнение и деформационное старение) и показывается невозможность описания выявленных эффектов наследственными соотношениями. Для устарения установленных ограничений классических моделей предлагается использовать нелинейную гипотезу, параметрические функции состояния среды и осуществлять изменение структуры ядер при смене активности процесса.

Предлагается универсальная модель, построенная на базе линейной интегральной модели с разностным ядром, в которой сменной ядра учитываются с заданной точностью физическая нелинейность, старение среды и все выявленные ограничения наследственных моделей. Описываются механические и электронные эквиваленты универсальной модели; приводятся численные решения практических задач, указываются способы неалгоритмического моделирования задач ползучести стержневых статически неопределимых конструкций.

18 XI 1974. М. Л. Хейнлоо (Новосибирск). *Исследование напряжений в конструкциях с упругими и вязкоупругими элементами.*

Рассмотрены вопросы прочности и оптимального проектирования конструктивно неоднородных многослойных сферических сосудов, цилиндрических труб и круглых дисков. Получены численные решения центрально-симметричной задачи для сферической оболочки и осесимметричной задачи для цилиндрической оболочки с учетом физической и геометрической нелинейности, что и показало, что и равнопрочные двух- и трехслойные сосуды имеют существенные преимущества перед однослойными.

9 XII 1974. Б. А. Друянов (Москва) *Разрывы скоростей в термопластичности.*

Дана постановка задачи термопластичности для разрывных полей скоростей деформаций. Рассмотрены условия на поверхности разрыва.

23 XII 1974. В. М. Мирсалимов (Липецк) *Обратная двоякопериодическая задача термоупругости.*

Методами теории функций комплексного переменного рассмотрена задача об отыскании оптимальной формы канала при условии, что по всему объему тела интенсивность теплового деления равномерна, тело может свободно расширяться и что система находится в стационарном состоянии, а теплоемко реализуется через поверхности каналов, имеющие постоянную температуру. Предполагается, что каналы расположены в вершинах двоякопериодической сетки. Критерием, определяющим оптимальную

форму канала, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности канала или требование зарождения пластической области сразу по всей поверхности канала. Для правильных решеток (треугольная и квадратная), имеющих наибольшее применение, решение доведено до числовых результатов.

17 II 1975. Е. Б. Хант (Москва) *Распределение напряжений в композитных материалах.*

Исследован продольный и поперечный сдвиг и растяжение однонаправленного композитного материала, армированного двоякопериодической системой волокон, обладающих цилиндрической анизотропией. Рассмотрен процесс разрыва волокна в армированном материале и показана допустимость статического решения этой задачи. Решена задача о распределении напряжений в волокне, находящемся в анизотропной матрице. Определены напряжения в матрице, в окрестности конца волокна.

24 II 1975. В. О. Геогджаев (Москва) *Вдавливание штампов в полуплоскость.*

В рамках жесткопластического анализа предложен вариант решения задачи Прандтля о вдавливании плоского штампа в полуплоскость. Дано также решение задачи о вдавливании выпуклых жестких штампов в полуплоскость. В обеих задачах рассматривается процесс внедрения, а не только начальное пластическое течение. Распределение давлений между штампом и пластическим материалом, как обычно в жесткопластическом анализе, задается. В результате проведенных численных расчетов получены зависимости потребных сил от глубины внедрения штампов. В предложенных решениях учитывается, что граница полуплоскости вблизи штампа деформируется и для каждой глубины внедрения штампа определяется форма этой границы. На жесткопластической границе знак касательного напряжения совпадает со знаком скорости сдвиговой деформации, т. е. предложенные решения не обладают недостатком, отмеченным Ли для известных решений о давлении выпуклых штампов на вырез в полуплоскости.

3 III 1975. В. И. Астафьев (Москва) *Применение метода конечных элементов в задачах изгиба тонких пластин при установившейся ползучести.*

Решены задачи изгиба тонких пластин при установившейся ползучести методом конечных элементов. Получение уравнений основано на минимизации функционала Лагранжа и стационарности функционала Рейснера. Основные уравнения линеаризуются по методу Ньютона — Канторовича. Доказывается сходимость метода Ньютона — Канторовича к точному решению. В конкретных задачах рассмотрены конечные элементы различных видов и доказывается сходимость метода конечных элементов.

10 III 1975. Н. А. Угодчиков (Горький) *Исследование возбуждения колебаний в стержнях с внутренними источниками тепла.*

Получена математическая модель для описания динамических явлений в ядерном горючем на основе трехмерных уравнений линейной термоупругости с учетом специфического вида функции мощности источников тепла, определяемых уравнением кинетики ядерного реактора и плотностью горючего. Эта модель линеаризована в окрестности стационарного состояния системы, соответствующего рабочему режиму реактора. На основе трехмерной линеаризованной модели получены одномерные уравнения продольных изгибных и крутильных колебаний стержня, находящегося в неизотермических условиях. Эти уравнения использованы для построения математических моделей продольных и изгибных колебаний тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов) стержневого типа. Исследована устойчивость стационарного режима ТВЭЛа. Показана возможность самовозбуждения продольных и изгибных колебаний ТВЭЛа. Найдены области устойчивости продольных и изгибных колебаний ТВЭЛа в пространстве основных параметров системы. Исследовано влияние теплопроводности ядерного горючего на положение границ области устойчивости в пространстве параметров системы. Исследовано влияние неравномерности плотности потока нейтронов по длине активной зоны на условия самовозбуждения продольных и изгибных колебаний ТВЭЛов. Для продольных колебаний ТВЭЛов исследованы условия самовозбуждения в случае зависимости плотности потока нейтронов от плотности горючего.