

внутреннего радикала и начиная с которого кривая  $\theta_1(T)$ , огибая точку ветвления, переходит в кривую  $\theta_2(T)$  (фиг. 2) (т. е. на второй лист римановой поверхности). Для значений угла  $\varphi$ , соответствующих лучам, проходящим через лауну, кривая  $\theta_1(T)$ , огибая точку ветвления, достигает вещественной оси и в течение всего времени прохождения лакуны через данную точку значения  $\theta_1(T)$  остаются вещественными (фиг. 2). Внутри лакуны смещения равны нулю (фиг. 3, 4). Вблизи оси  $z$  кривые смещений ведут себя так же, как и в случае изотропных сред. Приведенные кривые для льда отражают все качественные особенности кривых смещений для сред рассматриваемого вида.

Автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 14 V 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамики упругих анизотропных сред. В сб.: Динамика сплошной среды. Изд-во СО АН СССР, 1973, вып. 14.
2. Свейло В. А. О динамических задачах теории упругости анизотропного тела. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
3. Будаев В. С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 2.

УДК 624.07:534.1

### ДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ НА БАЛКУ, ЛЕЖАЩУЮ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Г. Б. МУРАВСКИЙ

(Москва)

Изучаются установившиеся колебания бесконечной балки, опирающейся на винклеровское основание, при движении с постоянной скоростью по балке бесконечной системы одинаковых сил. Кроме этого, на балку действует равномерно распределенная нагрузка, прижимающая балку к основанию. Разработан алгоритм расчета, учитывающий возможность появления зоны отрыва балки от основания. Выяснено соотношение между параметрами задачи, при котором появляется такая зона. Приводятся результаты числовых расчетов для широкого диапазона параметров. Исследована возможность потери устойчивости балки из плоскости, в которой действует подвижная нагрузка.

В известных решениях задачи о действии подвижной нагрузки на бесконечную балку, лежащую на упругом основании [1-3], использовалась предпосылка о том, что связь между балкой и основанием — двусторонняя. Лишь в работе [4] ставится вопрос о возможности отрыва балки от основания при движении по балке сосредоточенной силы  $P$  и при некоторой постоянной равномерно распределенной нагрузке  $q$ , прижимающей балку к основанию. Однако решения задачи при наличии зон отрыва не дается.

Ниже рассматривается действие на бесконечную балку, лежащую на винклеровском основании, бесконечной системы одинаковых сил  $P$ , движущихся по балке с постоянной скоростью  $v$ , а также равномерно распределенной нагрузки  $q_0$  (фиг. 1). Такая расчетная схема позволяет выяснить картину взаимодействия пути и длинно-го поезда на участке вблизи головной его части.

Будем считать, что давление балки на основание не может быть отрицательным. Это условие порождает зоны отрыва балки от основания при достижении некоторых значений параметров задачи. Будем предполагать, что прогибы  $w$  точек балки с фиксированной координатой  $z = x - vt + \text{const}$  в подвижной системе координат, движущейся поступательно с той же скоростью, что и нагрузка, не зависят от времени (постоянство формы прогибов в подвижной системе). Для участков, где контакт между балкой и основанием не нарушен, можно записать

$$(1) \quad EI \frac{d^4 w(z)}{dz^4} + kw(z) + mv^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = q(z) + q_0$$

Здесь  $EI$  — изгибная жесткость балки,  $m$  — масса единицы длины балки,  $k$  — коэффициент постели основания,  $q(z)$  — функция, выражающая подвижную нагрузку.

Для зон отрыва балки от основания должно быть исключено второе слагаемое в левой части (1). После введения безразмерных переменных

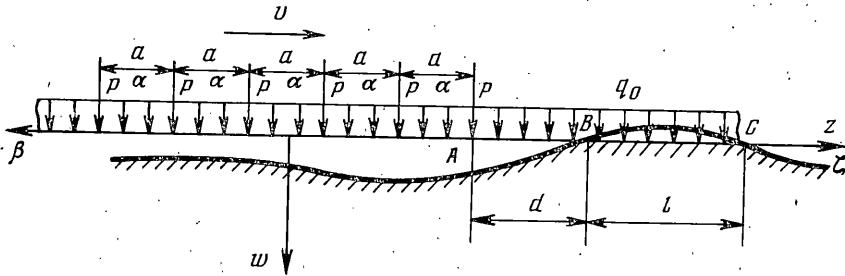
$$\xi = z(k/4EI)^{1/4}, \quad v_1 = v(m^2/4kEI)^{1/4}, \quad q_1(\xi) = q \left[ \xi \left( \frac{4EI}{k} \right)^{1/4} \right] q_0^{-1}, \quad w_1(\xi) = \frac{k}{q_0} w(z)$$

уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$(2) \quad \frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + 4v_1^2 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} + 4w_1 = 4q_1(\xi) + 4$$

последнее слагаемое в левой части отбрасывается для зон нарушения контакта. При определенном значении сил  $P$  правее точки  $A$  (Фиг. 1) появится зона отрыва балки от основания.

Будем далее изучать случай, когда впереди движущейся нагрузки имеется лишь одна такая зона. Считаем, что на участке, где приложены силы  $P$ , зон отрыва нет;



Фиг. 1

так будет при достаточно малых значениях расстояний  $a$ . Задачи рассматриваемого типа целесообразно решать обратным методом, а именно, задавая безразмерную длину  $\lambda = l(k/4EI)^{1/4}$  зоны отрыва, определять в качестве искомого неизвестных величины силы  $P$ , расстояние  $d$  и другие величины. Дальнейшее исследование проведем для значений безразмерной скорости  $v_1$ , меньших единицы. Заметим, что значение  $v_1=1$  соответствует критической величине скорости  $v = (4kEI/m^2)^{1/4}$ , при которой обращаются в бесконечность установившиеся прогибы балки на винклеровском основании, вызванные подвижной нагрузкой. При  $0 \leq v_1 < 1$  четыре корня характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2), будут

$$(3) \quad \kappa = \pm r \pm is, \quad r = (1 - v_1^2)^{1/2}, \quad s = (1 + v_1^2)^{1/2}$$

Рассмотрим участок  $CD$ . В точке  $C$ , где заканчивается зона нарушения контакта,  $w_1=0$ . При помещении в точку  $C$  начала координат не растущее с ростом  $\xi$  решение уравнения (2), в котором  $q_1(\xi)=0$ , можно представить в виде ( $\xi > 0$ )  $w_1 = 1 + (C_1 \cos s\xi + C_2 \sin s\xi) e^{-r\xi}$  или

$$(4) \quad w_1 = 1 + \left( -\cos s\xi + \frac{w_{10}' - r}{s} \sin s\xi \right) e^{-r\xi} \quad \left( w_{10}' = \frac{dw_1(0)}{d\xi} \right)$$

Вторая и третья производные при  $\xi=0$  выражаются через  $w_{10}'$  согласно (4)

$$(5) \quad w_{10}'' = 2(1 - r w_{10}'), \quad w_{10}''' = 2(1 - 2v_1^2) w_{10}' - 4r$$

Обратимся к участку  $BC$ , считая, что величина  $\lambda$  задана. На этом участке безразмерные прогибы балки выражаются так:

$$(6) \quad w_1 = \frac{1 - \cos 2v_1 \xi}{4v_1^2} \left( w_{10}'' - \frac{1}{v_1^2} \right) - \frac{w_{10}'''}{8v_1^3} \sin 2v_1 \xi + \left( w_{10}' + \frac{1}{4v_1^2} w_{10}''' \right) \xi + \frac{\xi^2}{2v_1^2}$$

Подставляя в (6) выражения  $w_{10}''$  и  $w_{10}'''$  согласно (5) и требуя, чтобы при  $\xi = -\lambda$  величина  $w_1$  равнялась нулю, получаем

$$w_{10}' = \frac{b}{h}, \quad b = \frac{r}{v_1} \sin 2v_1 \lambda + \frac{1 - 2v_1^2}{2v_1^2} (1 - \cos 2v_1 \lambda) - \lambda^2 - 2r\lambda$$

$$h = \frac{1 - 2v_1^2}{2v_1} \sin 2v_1 \lambda - r(1 - \cos 2v_1 \lambda) - \lambda$$

Для построения решения задачи на участке  $AB$  определим значения функции и ее производных при  $\xi = -\lambda$

$$(7) \quad \begin{aligned} w_1(-\lambda) &= 0, \quad w_1'(-\lambda) = -\frac{\sin 2\nu_1\lambda}{2\nu_1} \left( w_{10}'' - \frac{1}{\nu_1^2} \right) - \frac{w_{10}''''}{4\nu_1^2} \cos 2\nu_1\lambda + w_{10}' + \frac{w_{10}''''}{4\nu_1^2} - \frac{\lambda}{\nu_1^2} \\ w_1''(-\lambda) &= \frac{1}{\nu_1^2} - \frac{w_{10}''''}{2\nu_1} \sin 2\nu_1\lambda + \left( w_{10}'' - \frac{1}{\nu_1^2} \right) \cos 2\nu_1\lambda \\ w_1'''(-\lambda) &= w_{10}'''' \cos 2\nu_1\lambda + \left( w_{10}'' - \frac{1}{\nu_1^2} \right) 2\nu_1 \sin 2\nu_1\lambda \end{aligned}$$

где  $w_{10}''$  и  $w_{10}''''$  вычисляются по (5).

Далее удобно использовать систему координат с началом в точке  $B$  и осью, направленной влево (фиг. 1). Безразмерную абсциссу точки балки в этой подвижной системе обозначим  $\beta$ . Заметим, что уравнение (2) при использовании переменной  $\beta$  сохраняет свой вид, так что вместо  $\xi$  в (2) можно подставить  $\beta$ . Ниже все функции считаются функциями аргумента  $\beta$ . При  $\beta=0$  на основании (7) можно считать известными значениями функции  $w_1$  и ее производных, следует только поменять знак у значений нечетных производных  $w_1'$  и  $w_1'''$  по (7) в связи с изменением направления оси.

С учетом выражений (3) для корней характеристического уравнения решение уравнения (2) (при замене  $\xi$  на  $\beta$ ) для участка  $AB$  можно представить в виде

$$(8) \quad w_1(\beta) = w_1'(0)f_1(\beta) + w_1''(0)f_2(\beta) + w_1'''(0)f_3(\beta) + 4\psi(\beta) + 4 \int_0^\beta q_1(\tau)f_3(\beta-\tau) d\tau$$

$$f_1(\beta) = \frac{1}{2rs} [r(1+2\nu_1^2) \operatorname{ch} r\beta \sin s\beta + s(1-2\nu_1^2) \operatorname{sh} r\beta \cos s\beta], \quad f_2(\beta) = \frac{1}{2rs} \operatorname{sh} r\beta \sin s\beta$$

$$f_3(\beta) = \frac{1}{4rs} (r \operatorname{ch} r\beta \sin s\beta - s \operatorname{sh} r\beta \cos s\beta)$$

$$\psi(\beta) = \int_0^\beta f_3(\tau) d\tau = \frac{1 - \operatorname{ch} r\beta \cos s\beta}{4} - \frac{\nu_1^2}{4rs} \operatorname{sh} r\beta \sin s\beta$$

Последнее слагаемое в правой части (8) при  $\beta < \Delta = d(k/4EI)^{1/4}$  равно нулю. В рассматриваемом случае, используя дельта-функцию, запишем

$$q_1(\beta) = P_1 \sum_{h=0}^{\infty} \delta(\beta - \Delta - k\alpha), \quad P_1 = \frac{P}{q_0} \left( \frac{k}{4EI} \right)^{1/4}, \quad \alpha = a \left( \frac{k}{4EI} \right)^{1/4}$$

При  $\beta \geq \Delta$  последнее слагаемое в правой части (8) можно записать в виде

$$(9) \quad 4P_1 \sum_{h=0}^N f_3(\beta - \Delta - k\alpha)$$

где  $N$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $(\beta - \Delta)/\alpha$ . Считая, что зона  $AB$  простирается неограниченно, найдем  $P_1$  и  $\Delta$ , приравняв нулю сумму экспоненциально растущих слагаемых в (8) при  $\beta \rightarrow \infty$ . Такого рода слагаемые в (9) при  $N \rightarrow \infty$  имеют вид

$$(10) \quad \begin{aligned} & -P_1 e^{-r\Delta} (K_1 \sin s\Delta + K_2 \cos s\Delta) \frac{e^{r\beta} \cos s\beta}{2} - \\ & -P_1 e^{-r\Delta} (K_2 \sin s\Delta - K_1 \cos s\Delta) \frac{e^{r\beta} \sin s\beta}{2} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{1}{2s} \left( 1 + \frac{\text{sh } \alpha r}{\text{ch } \alpha r - \cos \alpha s} \right) - \frac{1}{2r} \frac{\sin \alpha s}{\text{ch } \alpha r - \cos \alpha s}$$

$$K_2 = \frac{1}{2s} \frac{\sin \alpha s}{\text{ch } \alpha r - \cos \alpha s} + \frac{1}{2r} \left( 1 + \frac{\text{sh } \alpha r}{\text{ch } \alpha r - \cos \alpha s} \right)$$

Выражение (10) и входящие в него коэффициенты  $K_1, K_2$  получены с использованием формул суммирования рядов вида [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \cos kx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t - \cos x} \right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \sin kx = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\text{ch } t - \cos x}$$

Система уравнений, определяющая  $P_1$  и  $\Delta$ , такова:

$$(11) \quad P_1 e^{-r\Delta} (K_1 \sin s\Delta + K_2 \cos s\Delta) = D_1, \quad P_1 e^{-r\Delta} (K_2 \sin s\Delta - K_1 \cos s\Delta) = D_2$$

$$D_1 = w_1'(0) \frac{1-2v_1^2}{2r} - w_1'''(0) \frac{1}{4r} - 1$$

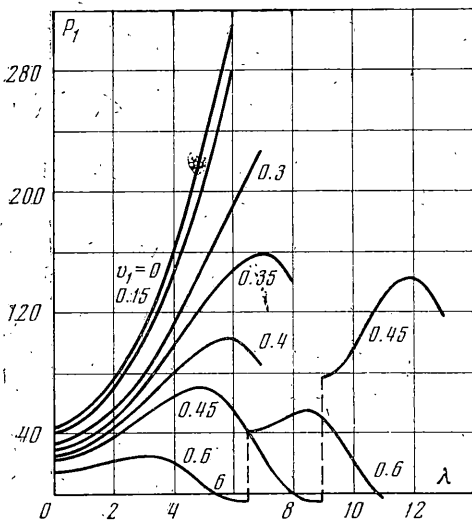
$$D_2 = w_1'(0) \frac{1+2v_1^2}{2s} + w_1''(0) \frac{1}{2rs} + w_1'''(0) \frac{1}{4s} - \frac{v_1^2}{rs}$$

Из (11) находим

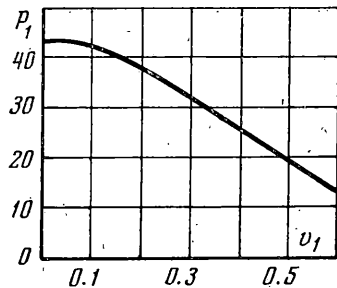
$$(12) \quad \text{tg } s\Delta = \frac{D_2 K_2 + D_1 K_1}{D_1 K_2 - D_2 K_1}, \quad P_1 = \frac{D_1 e^{r\Delta}}{(K_1 \sin s\Delta + K_2 \cos s\Delta)}$$

Искомое значение  $\Delta$  определяется как наименьший положительный корень первого уравнения (12).

Результаты числовых расчетов представлены на фиг. 2-4. На фиг. 2 для нескольких значений безразмерной скорости  $v_1$  и для  $\alpha=2$  (это значение  $\alpha$  соответствует расстоянию около двух метров при параметрах, обычных для железнодорожного пути) представлены значения  $P_1$  в зависимости от величины  $\lambda$ . Точки разрыва функции соответствуют перемене знака правой части уравнения (12). Для каждого значения  $v_1$  существует серия значений  $\lambda$ , соответствующих свободным колебаниям на-



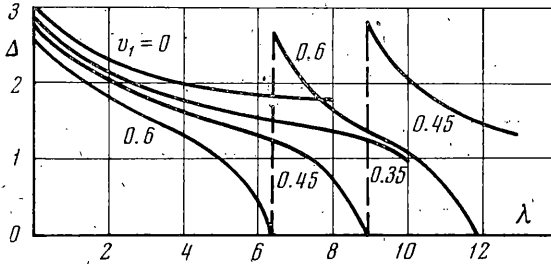
Фиг. 2



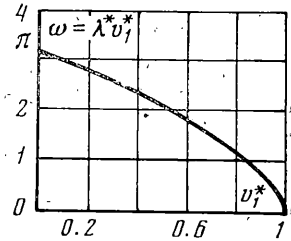
Фиг. 3

груженной давлением  $q_0$  балки ( $P_1=0$ ), которые представлены бегущей волной с некоторым участком отрыва от основания. Эти колебания, видимо, неустойчивы, поскольку при отсутствии подвижной нагрузки физически реализуемым движением при  $t \rightarrow \infty$  должно быть состояние равновесия балки. Неустойчивы, вероятно, и колебания, отвечающие точкам нисходящих ветвей графиков на фиг. 2. Для этих ветвей увеличение нагрузки  $P_1$  приводит к уменьшению зоны отрыва балки от основания. Вопросы устойчивости требуют специального исследования.

Проследим за поведением балки при медленном увеличении нагрузки  $P_1$ . Пусть скорость движения  $v_1$  фиксирована. Пока  $P_1$  меньше значения, соответствующего  $\lambda=0$ , балка всюду находится в контакте с основанием. Затем при достижении указанного значения (эти значения для  $\alpha=2$  представлены на фиг. 3) появляется зона отрыва балки от основания, которая увеличивается по мере роста величины  $P_1$ . В этом случае решение задачи строится по приведенным выше формулам, причем  $\lambda$  берется по графикам на фиг. 2, а  $\Delta$  определяется по найденному  $\lambda$  в соответствии с фиг. 4. ( $\alpha=2$ ). При достижении значения  $P_1$ , соответствующего первому максимуму



Фиг. 4



Фиг. 5

на графике фиг. 2, происходит скачкообразное увеличение зоны отрыва балки от основания и переход на графике в точку на нисходящей ветви графика. В случае неустойчивости этих новых состояний будет происходить дальнейшее увеличение зоны отрыва и рост прогибов точек балки в этой зоне.

Следует иметь в виду также возможность потери устойчивости из плоскости, в которой действует на балку подвижная нагрузка. Пусть при прогибах балки в направлении, перпендикулярном плоскости действия подвижной нагрузки, коэффициент постели основания, воспринимающего как сжимающие, так и растягивающие напряжения, равен  $k^*$ , а момент инерции сечения балки  $I^*$ . Параметры, соответствующие потере устойчивости из плоскости действия нагрузки, найдем, исследуя возможность существования формы изгиба из этой плоскости в подвижной системе координат для балки, некоторый участок которой (отделившийся от основания в плоскости действия нагрузки) не имеет связи с основанием. Решение подобной задачи, в которой поперечная нагрузка считается равной нулю, строится по аналогии с изложенным выше для основной задачи. Наименьшая длина  $l$  не связанного с основанием участка балки, при которой теряется устойчивость из плоскости действия нагрузки, определяется согласно фиг. 5, на которой обозначено

$$v_1^* = v \left( \frac{m^2}{4k^*EI^*} \right)^{1/4} = v_1 \left( \frac{kI}{k^*I^*} \right)^{1/4}$$

$$\lambda^* = l \left( \frac{k^*}{4EI^*} \right)^{1/4} = \lambda \left( \frac{k^*I}{kI^*} \right)^{1/4}, \quad \omega = v_1^* \lambda^* = v_1 \lambda \left( \frac{I}{I^*} \right)^{1/2}$$

Таким образом, соответствующее значение  $\lambda$  определяется по формуле

$$(13) \quad \lambda = \frac{\omega}{v_1} \left( \frac{I^*}{I} \right)^{1/2}$$

При  $k^* \rightarrow \infty$  имеем  $v_1^* \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \pi$ , что отвечает заделке концов участка балки, не имеющего связи с основанием. Если  $\lambda$ , определяемая по фиг. 2, достигает значения по формуле (13), то произойдет потеря устойчивости из плоскости действия подвижной нагрузки.

В заключение рассмотрим пример расчета для случая параметров, близких к параметрам железнодорожного пути. Пусть  $k=300 \text{ кг/см}^2$ ,  $E=2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $I=4000 \text{ см}^4$ ,  $m=0.007 \text{ кг сек}^2/\text{см}^2$ ,  $q_0=6.87 \text{ кг/см}$ ,  $v_1=0.4$ ,  $\alpha=2$ . Безразмерное расстояние  $\alpha=2$  соответствует расстоянию  $a=206.5 \text{ см}$ , а безразмерная скорость  $v_1=0.4$  — скорости движения  $85.2 \text{ м/сек}$  или  $307 \text{ км/час}$ . Такие скорости станут широко реализуемыми в ближайшем будущем. Отрыв балки от основания наступит при значении  $P_1=26.1$  или  $P=P_1 q_0 (4EI/k)^{1/4}=48500 \text{ кг}$ . По формуле (13), принимая  $I^*=830 \text{ см}^4$  и  $k^*=\infty$  (за наименьшим данными), получаем  $\lambda=3.58$ . Такое значение  $\lambda$  будет достигнуто при  $P_1=71$  и  $P=50300 \text{ кг}$ . Поскольку  $k^*$  взято завышенным, то можно заключить, что потеря устойчивости из плоскости действия нагрузки (выброс пути вбок) произойдет при меньших значениях давлений на путь. Эти результаты показывают, что в связи

с ростом величин подвижных нагрузок и скоростей движения необходимо учитывать возможность отрыва балки от основания и, как следствие этого, потери устойчивости формы изгиба в подвижной системе координат. Заметим, что предположение о наличии только одной зоны отрыва впереди движущейся нагрузки выполняется, по крайней мере для диапазонов изменения  $\lambda$  от нуля до значений, при которых  $P_1$  обращается в нуль (при каждом значении  $v_1$ ). При  $\alpha < \pi/s$  заведомо не будет зон отрыва и на участке приложения движущихся сил при любых их значениях.

Поступила 27 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kenney J. T. Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No. 4.
2. Mathews P. M. Vibrations of a beam on elastic foundation. Z. angew. Math. und Mech., Pt. 1, 1958, Bd. 38, H. 3/4; pt. 2, 1959, Bd. 39, H. 1/2.
3. Муравский Г. Б. Неустановившиеся колебания балки, лежащей на упругом основании, при действии подвижной нагрузки. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Weitsmann Y. Onset of separation between a beam and a tensionless elastic foundation under a moving load. Internat. J. Mech. Sci., 1971, vol. 13, No. 8.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

УДК 534.061.3

#### МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ СЕМИНАРЫ

Теоретический семинар под руководством Ю. Н. Работнова, Л. А. Галина, Г. С. Шапиро, В. Д. Ключникова

9 IX 1974. А. И. Зобнин (Москва). *Некоторые задачи механики разрушения.*

Решена задача по растяжению ортотропной полосы с центральной поперечной трещиной. Показано, что для длинных образцов с поперечными разрезами влияние анизотропии материала на коэффициент интенсивности напряжения невелико и что в испытаниях на вязкость разрушения даже существенно ортотропных материалов можно использовать стандартные изотропные  $K$ -тарировки. Приведены результаты экспериментального определения характеристик вязкости разрушения изотропных и анизотропных графитовых материалов.

Представлено решение задачи о растяжении ортотропных плоскостей, ослабленных двумя ортогональными трещинами, результаты которого использованы для анализа условий распространения вторичной трещины вдоль волокон однонаправленного композита.

Построена модель разрушения полимерного материала, описывающая кинетику роста макротрещины в результате накопления субмикротрещин во всем объеме тела.

16 IX 1974. Э. И. Гольденгершель (Москва). *О принципе предельного модуля для первой краевой задачи линейной вязкоупругости.*

Рассматривается первая краевая задача линейной вязкоупругости для однородной изотропной среды

$$\Delta U + ((1-2\nu)I - V_\nu)^{-1} \text{grad div } U = -(\mu I - V_\mu)^{-1} K \\ U = U(x, t); K = K(x, t); x \in \Omega; t \in [0, \infty); U/\partial\Omega = 0.$$

Здесь  $\Omega$  — конечная область, заполненная вязкоупругой средой с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  — мгновенный коэффициент Пуассона вязкоупругой среды,  $U(x, t)$  — вектор смещений,  $K(x, t)$  — вектор объемной силы,  $V_\nu, V_\mu$  — вязкоупругие операторы, действующие по  $t$ . Предполагается, что  $K(x, t) \in L^2(\Omega)$  почти при каждом фиксированном  $t$ . Решение ищется в том же классе. Краевая задача называется асимптотически-устойчивой, если существование конечного по норме  $L^2(\Omega)$  предела  $\lim K(x; t) = LK$  влечет за собой существование конечного в том же смысле предела