

$$(8) \quad \sigma_{sj}^{(R)} |_{x_2 \geq 0} = (2\pi)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{hl=1}^2 [B_{sj}^{hl} Q_l \Delta (\Delta \alpha')^{-1}]_{\alpha=p_R} \times \right. \\ \left. \times \gamma^2 [\Omega_q - i(\gamma p_{hR})''_{\gamma\gamma} \gamma^2 r]^{-1/2} \exp[i\gamma(p_{hR}r - t)] \right\} \quad \gamma = \gamma_{hR}, \quad q=1$$

Здесь $\gamma = \gamma_1^{(q)}$ ($\gamma = \gamma_2^{(q)}$, $\gamma = \gamma_{21}^{(q)}$, $\gamma = \gamma_1^{(q)}|_{x_2=0}$, $\gamma = \gamma_{kR}^{(q)}$) — корень уравнения

$$(9) \quad \{i\gamma(p_{hR}r - t) + \Omega_q \ln \gamma\}'_{\gamma} = 0, \quad p=p_1, \quad p=p_2, \quad p=p_{21}, \quad p=p_1, \quad p=p_{hR}$$

Ω_q — наименьший вещественный корень уравнения $\Gamma(q+1) = \Omega_q^{q+1/2} e^{-\Omega_q}$.

Можно доказать, что уравнение (9) имеет только один корень $\gamma = \gamma^{(q)}$ и что $\gamma^{(q)}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(10) \quad i\gamma^{(q)} \approx \{F_1^{(q)} \varepsilon^{-2} + \Omega_q (t - p^{(0)}r - oi)^{-1}\}_{\gamma=\gamma^{(q)}}, \quad |t - p^{(0)}r| < \varepsilon$$

$$(11) \quad i\gamma^{(q)} \approx \{F_2^{(q)} \varepsilon^{-1} (t - p^{(0)}r)^{-1/2} + F_3^{(q)} (t - p^{(0)}r - oi)^{-1}\}_{\gamma=\gamma^{(q)}}$$

$$|t - p^{(0)}r| > \varepsilon, \quad 0 < F_m^{(q)} < \text{const} \quad (m=1,2), \quad p^{(0)} = p|_{\varepsilon=+\infty}$$

Если подставить выражения (10), (11) в (5)–(8), то получим формулы, оценивающие влияние вязкости на поля напряжений.

Формы (5)–(8) основаны на следующем асимптотическом равенстве:

$$+ \infty \\ \int_0^{\infty} (\gamma)^q \exp[i\gamma(p_{hR}r - t)] d\gamma \approx (2\pi)^{1/2} [-(i\gamma(p_{hR}r - t) + \Omega_q \ln \gamma)''_{\gamma\gamma}]^{-1/2} (\gamma)^q \exp[i\gamma(p_{hR}r - t)]$$

$$(r \gg 1) \quad \gamma = \gamma^{(q)}, \quad (\gamma)^q = (\gamma^{(q)})^q$$

Последнее доказывается методом перевала. При $\varepsilon = +\infty$ формулы (5)–(8) соответствуют случаю идеально упругой среды.

Работа выполнена в лаборатории фотоупругости при МИСИ им. В. В. Куйбышева. Автор благодарит коллектив лаборатории за полезные дискуссии.

Поступила 3 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Брук С. З. Поверхностные волны Рэлея в вязкоупругой среде. Докл. АН СССР, 1974, т. 198, № 2.
2. Брук С. З. Обобщенное решение задачи Лэмба в вязкоупругой полуплоскости. Докл. АН СССР, 1970, т. 197, № 3.
3. Брук С. З. Задача Лэмба для вязкоупругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТГ, 1972, № 3.
4. Петрашень Г. И., Марчук К. И., Огурцов Г. И. Задача Лэмба в упругом полупространстве. Уч. зап. ЛГУ, 1951, вып. 24.
5. Newlands M. Lamb's problem with internal dissipation. J. Acoust. Soc. America, 1954, vol. 26, No. 3.

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

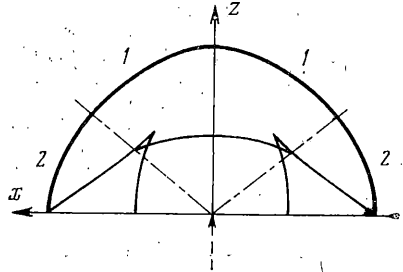
В. С. БУДАЕВ

(Москва)

Предлагаемая статья является продолжением работы [1], в которой получено замкнутое решение задачи Лэмба для упругой анизотропной полуплоскости и приводятся кривые смещений для точек поверхности. Проведен расчет поля смещений во внутренних точках полуплоскости. Впервые задача была рассмотрена в работе [2] для случая трех упругих постоянных.

1. Рассматриваемая задача сводится к решению системы уравнений движения упругих анизотропных сред в условиях плоской деформации

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$



Фиг. 1

где u, w — компоненты смещений вдоль осей x и z соответственно; ρ — плотность; t — время; коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 для трансверсально изотропных сред выражаются через упругие постоянные следующим образом: $c_1 = a_{11}, c_2 = a_{13} + a_{44}, c_3 = a_{44}, c_4 = a_{33}$. Решение ищется в полуплоскости $z \geq 0$ при граничных условиях для напряжений $\sigma_{zz} = -P\delta(x)\delta(t), \tau_{xz} = 0, z = 0$ и нулевых начальных условиях. Компоненты тензора напряжений записываются в виде

$$\sigma_{zz} = (c_2 - c_3) \frac{\partial u}{\partial x} + c_4 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = c_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Полученное в работе [1] решение задачи имеет вид (область 1 на фиг. 1)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u &= u_1 + u_2, & w &= w_1 + w_2 \\ u_1 &= \frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[\frac{\theta_1 \alpha_2(\theta_1)}{F(\theta_1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right], & u_2 &= \frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[-\frac{\alpha_1(\theta_2) \Omega_2(\theta_2)}{F(\theta_2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right] \\ w_1 &= \frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[-\frac{\alpha_2(\theta_1) \Omega_1(\theta_1)}{F(\theta_1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right], & w_2 &= \frac{P}{\pi c_3} \operatorname{Im} \left[-\frac{\theta_2 \alpha_1(\theta_2)}{F(\theta_2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \alpha_1 \gamma_2 - \gamma_1 \alpha_2, \quad \alpha_2 = \Omega_2 \mu_2 - \theta^2, \quad \alpha_1 = \theta(\mu_1 + \Omega_1), \quad \gamma_1 = b^2 p^{-2} (d^2 \theta^2 + \mu_1 \Omega_1) - 2\theta^2 \\ d^2 &= p^2 (bc)^{-2} (b^2 + c^2), \quad p^2 = \rho c_4^{-1}, \quad c^2 = \rho c_2^{-1}, \quad \gamma_2 = \theta [b^2 p^{-2} (d^2 \Omega_2 - \mu_2) - 2\Omega_2] \end{aligned}$$

$$\Omega_1 = -\theta \chi_1, \quad \Omega_2 = \theta \chi_2^{-1}, \quad \mu_n = \mu_n(\theta), \quad \chi_n = \chi_n(\theta), \quad \Omega_n = \Omega_n(\theta)$$

$$\chi_n = \frac{c_2 \theta \mu_n(\theta)}{c_4 \mu_n^2(\theta) + c_3 (\theta^2 - b^2)} = \frac{c_3 \mu_n^2(\theta) + c_1 (\theta^2 - a^2)}{c_2 \theta \mu_n(\theta)}$$

$$u_1 = w_1 = 0 \quad \text{при } t < t_1, \quad u_2 = w_2 = 0 \quad \text{при } t < t_2$$

где t_1, t_2 — моменты вступления фронтов волн в точку наблюдения x, z ; θ_1 и θ_2 — корни уравнения

$$(1.2) \quad t - \theta_n x - \mu_n(\theta_n) z = 0 \quad (n=1, 2)$$

Здесь $\mu_1(\theta), \mu_2(\theta)$ — корни характеристического уравнения [1]

$$\mu_n(\theta) = i\theta q_n(\varepsilon), \quad \varepsilon = \theta^{-1} (n=1, 2), \quad q_1 = (-M_1 + \sqrt{M_1^2 - M_2})^{1/2}, \quad q_2 = (-M_1 - \sqrt{M_1^2 - M_2})^{1/2}$$

$$M_1 = \frac{c_2^2 + c_3 (\rho \varepsilon^2 - c_3) + c_4 (\rho \varepsilon^2 - c_1)}{2c_3 c_4}, \quad M_2 = \frac{(\rho \varepsilon^2 - c_1) (\rho \varepsilon^2 - c_3)}{c_3 c_4}$$

В области 2 (фиг. 1) решение имеет тот же вид, что и (1.1), но время вступления квазипоперечной волны будет иным, а именно: квазипоперечная волна вступает в момент $t_3 = ax + \mu_2(a)z$ — момент вступления головной волны. Предполагается, что коэффициенты уравнений c_1, c_2, c_3, c_4 удовлетворяют условиям

$$(1.3) \quad \gamma > \alpha(\beta + 1), \quad \gamma^2 \geq 4\alpha\beta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$$

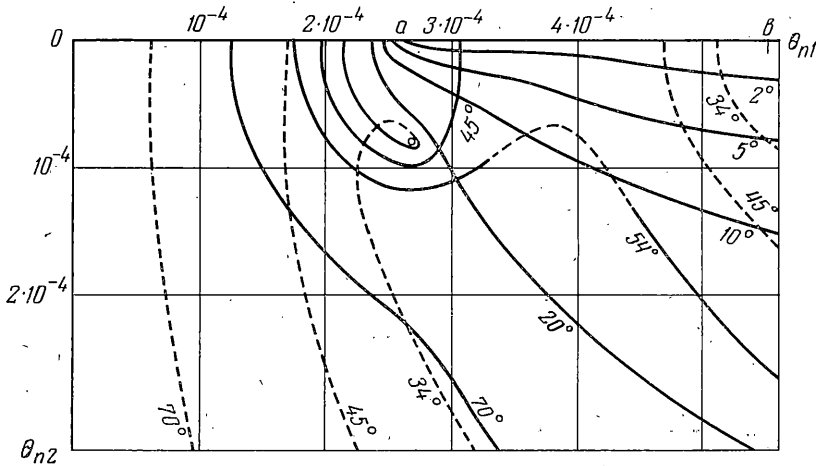
$$[2\beta(1 + \alpha) - \gamma(1 + \beta)] \geq -|1 - \beta| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}, \quad \alpha = c_3/c_1, \quad \beta = c_3/c_4, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - c_2^2/c_1 c_4$$

При выполнении условий (1.3) можем установить, что $\mu_1(\theta)$ — вещественная величина при $|\theta| < a$ и чисто мнимая при $|\theta| > a$; точками ветвления внешнего радикала в вы-

ражении $\mu_1(\theta)$ являются значения $\theta = \pm a$, $a^2 = \rho c_1^{-1}$; точками ветвления внешнего радикала в выражении $\mu_2(\theta)$ являются значения $\theta = \pm b$, $b^2 = \rho c_3^{-1}$; точки ветвления внутреннего радикала в выражениях $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ являются комплексными и располагаются симметрично относительно действительной и мнимой осей [1, 3].

К данному типу сред относятся многие анизотропные материалы (каменная соль, силивин, полевой шпат, лед, берилл, песчаник и др.), а также все изотропные среды. Волновая картина для льда приведена на фиг. 1.

2. Согласно приведенным выше результатам, определение смещений в точках, не лежащих на осях координат, сводится к нетривиальной задаче определения корней



Фиг. 2

θ_1 и θ_2 уравнений (1.2), причем в первую очередь представляют интерес комплексные корни. Предлагается следующий алгоритм для определения комплексных корней уравнений (1.2), упрощающий расчет поля смещений в точках, где $x \neq 0$, $z \neq 0$.

Уравнения (1.2) записываем в виде

$$(2.1) \quad T - \theta_n C S - \mu_n(\theta_n) S N = 0 \quad (n=1, 2)$$

где $T = t/Ra$, $C S = a^{-1} \cos \varphi$, $S N = a^{-1} \sin \varphi$; в полярных координатах $x = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$.

Полагая $n=1$, $\theta_1 = \theta_{11} + i\theta_{12}$ и подставляя в (2.1), получаем

$$(2.2) \quad T - (\theta_{11} + i\theta_{12}) C S - \mu_1(\theta_{11} + i\theta_{12}) S N = 0$$

Уравнение (2.2) распадается на два

$$(2.3) \quad T = f_{11}(\theta_{11}, \theta_{12}), \quad f_{12}(\theta_{11}, \theta_{12}) = 0$$

$$f_{11} = \operatorname{Re}[\theta_1 C S + \mu_1(\theta_1) S N], \quad f_{12} = \operatorname{Im}[\theta_1 C S + \mu_1(\theta_1) S N]$$

Начиная от точек на границе полуплоскости ($\varphi=0$), где $1 < T < \infty$, $a < \theta_{11} < \infty$, $\theta_{12}=0$ для каждого последующего φ легко определяются интервалы для T , θ_{11} и порядок θ_{12} . Задавая ряд значений θ_{11} из данного интервала и подставляя их во второе из уравнений (2.3), находим для каждого из θ_{11} значение θ_{12} , где $f_{12}(\theta_{11}, \theta_{12})$ обращается в нуль (меняет знак). Подставляя θ_{11} и θ_{12} в уравнение $T = f_{11}(\theta_{11}, \theta_{12})$, определяем значение T . Так устанавливается взаимно однозначное соответствие между величинами T , θ_{11} , θ_{12} . Функции $\theta_{11}(T)$, $\theta_{12}(T)$ определяют решение для квазипродольной волны. Аналогично устанавливается соответствие между T , θ_{21} , θ_{22} для квазипоперечной волны. Значения производных $\partial \theta_1 / \partial T$, $\partial \theta_2 / \partial T$ следует определять по правилу дифференцирования неявных функций.

На фиг. 2 приводятся построенные по указанному методу кривые $\theta_n = \theta_n(T)$ ($n=1, 2$) для льда. Коэффициенты c_i равны $c_i = c_i^0 10^{10}$ н/м², $c_1^0 = 1.429$, $c_2^0 = 0.78$, $c_3^0 = -0.3$, $c_4^0 = 1.51$. По оси абсцисс отложены θ_{n1} и по оси ординат — θ_{n2} . Сплошной линией обозначены значения $\theta_1 = \theta_1(T)$, которые лежат на первом листе поверхности Римана ($n=1$), и штриховой линией — значения $\theta_2 = \theta_2(T)$, лежащие на втором листе ($n=2$). При некоторых углах φ осуществляется переход с первого листа на второй через разрез, соединяющие точки ветвления внутреннего радикала в выражениях для $\mu_n(\theta)$. Разрезы на фиг. 2 не приводятся, так как их положение зависит от значе-

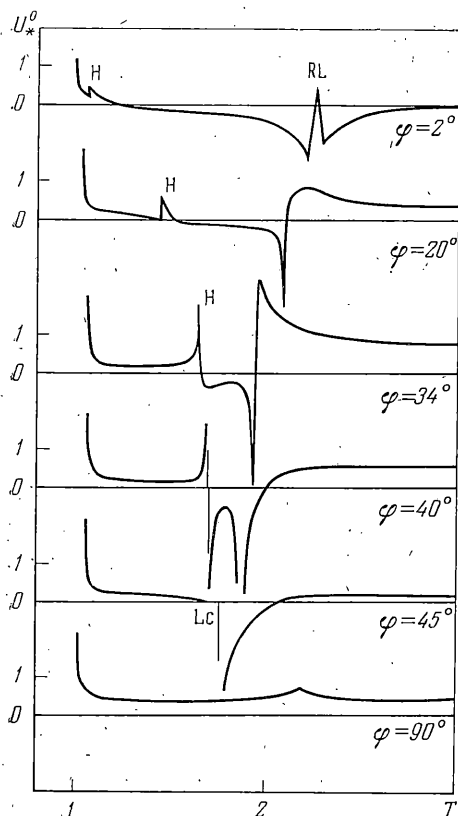
ний угла φ (значений x и z). Кривые $\theta_n(T)$ даны для указанных на фиг. 2 значений угла φ .

Выражения для радиальных u_R и тангенциальных u_t смещений удобно представить в виде

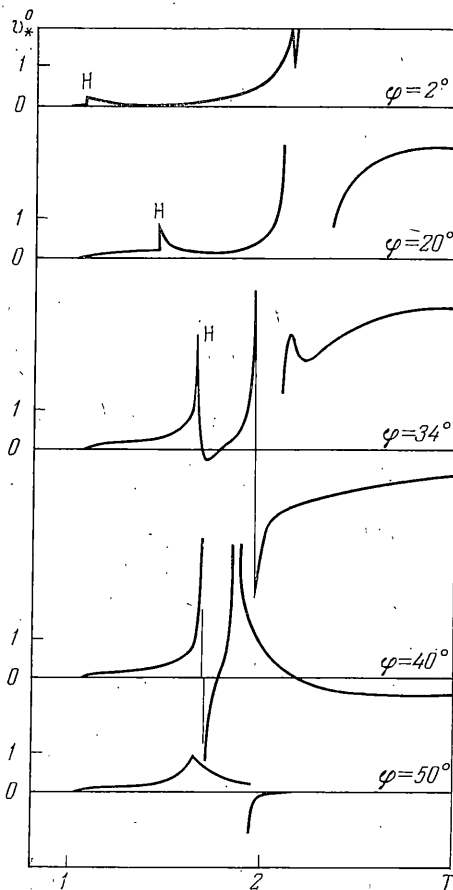
$$u_R = \frac{P}{\pi c_3 R a} u_{**}(\varphi, T), \quad u_t = \frac{P}{\pi c_3 R a} w_{**}(\varphi, T)$$

Величины u_{**} , w_{**} при заданном φ определяют характер изменения во времени компонент смещений u_R , u_t в точках, лежащих на луче, проходящем под заданным углом к оси x , т. е. являются сейсмограммами смещений.

На фиг. 3 приводятся кривые $u_*(T)$ и на фиг. 4 кривые $w_*(T)$ для льда (для ряда значений угла φ , обозначенных рядом с кривыми). Функции $u_*(T)$, $w_*(T)$ связаны с $u_{**}(T)$, $w_{**}(T)$ формулами $u_*(T) = T u_{**}(T)$, $w_*(T) = T w_{**}(T)$, $\varphi = \text{const}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3, 4 использованы следующие условные обозначения: H — головная волна, RL — волна Рэлея, LC — лагуна. По оси абсцисс на фиг. 3, 4 отложено безразмерное время T .

Основная особенность сред рассматриваемого вида по сравнению с изотропными средами состоит в наличии лакун. Кривые радиальных смещений для льда на интервале $0 < \varphi < 5^\circ$ качественно не отличаются от соответствующих кривых для изотропных сред.

Для углов больших $\varphi = 5^\circ$ на кривых радиальных смещений наблюдается резкий всплеск, занимающий узкую зону вблизи фронта квазипоперечной волны, амплитуда которого увеличивается по мере увеличения угла φ . В остальном ход кривых радиальных смещений у льда до 25° такой же, как у изотропных сред. Картина начинает резко отличаться от изотропных сред при приближении к $\varphi = 30^\circ$. Это значение угла, при приближении к которому кривая $\theta_1(T)$ вплотную подходит к точке ветвления

внутреннего радикала и начиная с которого кривая $\theta_1(T)$, огибая точку ветвления, переходит в кривую $\theta_2(T)$ (фиг. 2) (т. е. на второй лист римановой поверхности). Для значений угла φ , соответствующих лучам, проходящим через лауну, кривая $\theta_1(T)$, огибая точку ветвления, достигает вещественной оси и в течение всего времени прохождения лакуны через данную точку значения $\theta_1(T)$ остаются вещественными (фиг. 2). Внутри лакуны смещения равны нулю (фиг. 3, 4). Вблизи оси z кривые смещений ведут себя так же, как и в случае изотропных сред. Приведенные кривые для льда отражают все качественные особенности кривых смещений для сред рассматриваемого вида.

Автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 14 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамики упругих анизотропных сред. В сб.: Динамика сплошной среды. Изд-во СО АН СССР, 1973, вып. 14.
2. Свейло В. А. О динамических задачах теории упругости анизотропного тела. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
3. Будаев В. С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 2.

УДК 624.07:534.1

ДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ НА БАЛКУ, ЛЕЖАЩУЮ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Г. Б. МУРАВСКИЙ

(Москва)

Изучаются установившиеся колебания бесконечной балки, опирающейся на винклеровское основание, при движении с постоянной скоростью по балке бесконечной системы одинаковых сил. Кроме этого, на балку действует равномерно распределенная нагрузка, прижимающая балку к основанию. Разработан алгоритм расчета, учитывающий возможность появления зоны отрыва балки от основания. Выяснено соотношение между параметрами задачи, при котором появляется такая зона. Приводятся результаты числовых расчетов для широкого диапазона параметров. Исследована возможность потери устойчивости балки из плоскости, в которой действует подвижная нагрузка.

В известных решениях задачи о действии подвижной нагрузки на бесконечную балку, лежащую на упругом основании [1-3], использовалась предположка о том, что связь между балкой и основанием — двусторонняя. Лишь в работе [4] ставится вопрос о возможности отрыва балки от основания при движении по балке сосредоточенной силы P и при некоторой постоянной равномерно распределенной нагрузке q , прижимающей балку к основанию. Однако решения задачи при наличии зон отрыва не дается.

Ниже рассматривается действие на бесконечную балку, лежащую на винклеровском основании, бесконечной системы одинаковых сил P , движущихся по балке с постоянной скоростью v , а также равномерно распределенной нагрузки q_0 (фиг. 1). Такая расчетная схема позволяет выяснить картину взаимодействия пути и длинно-го поезда на участке вблизи головной его части.

Будем считать, что давление балки на основание не может быть отрицательным. Это условие порождает зоны отрыва балки от основания при достижении некоторых значений параметров задачи. Будем предполагать, что прогибы w точек балки с фиксированной координатой $z = x - vt + \text{const}$ в подвижной системе координат, движущейся поступательно с той же скоростью, что и нагрузка, не зависят от времени (постоянство формы прогибов в подвижной системе). Для участков, где контакт между балкой и основанием не нарушен, можно записать

$$(1) \quad EI \frac{d^4 w(z)}{dz^4} + kw(z) + mv^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = q(z) + q_0$$

Здесь EI — изгибная жесткость балки, m — масса единицы длины балки, k — коэффициент постели основания, $q(z)$ — функция, выражающая подвижную нагрузку.