УДК 539.374

# ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

С. З. БРУК

*(Москва)*

Рассматривается динамическая задача для вязкоупругой полуплоскости. Получены асимптотические формулы для волн напряжений.

В полуплоскости $x_2>0$, заполненной вязкоупругой средой, рассматривается динамическая задача

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{kj}}{\partial x_j}=\rho\ddot{u}_k \quad (k=1,2), \qquad \sigma_{2l}=-Q_l\delta(x)\delta(t), \qquad x_2=0 \quad (l=1,2) \tag{1}$$

$$u_m=0, \quad t<0 \quad (m=1,2), \quad \sigma_{kj}=\sigma_{x_kx_j}, \quad \rho=\text{const}, \quad Q_l=\text{const}$$

Относительно тензора напряжений $\sigma$ предполагается, что его компоненты подчиняются соотношениям Вольтерра

$$\sigma_{kk}=P_1\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+2P_2\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \qquad \sigma_{12}=P_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

где $P_k$ – операторы, заданные при помощи свертки (по $t$), с ядрами релаксации $\varphi_k(\varepsilon, t)$, зависящими от параметра $\varepsilon$

$$P_kf(t)=\lambda_kf(t)-\varphi_k(\varepsilon,t)*f(t) \qquad (\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\mu)$$

Через $\varphi_k(\varepsilon, t)$ обозначены функции, полученные из обычных ядер релаксации $\varphi_k(t)$ следующим образом:

$$\varphi_k(\varepsilon,t)=\varepsilon^{-1}\varphi_k(t/\varepsilon) \qquad (0\leqslant\varepsilon\leqslant+\infty) \tag{2}$$

Как известно

$$\varphi_k(t)=\int_0^{+\infty}\tau^{-1}A_k(\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)d\tau+\sum_{k=1}^{m}\tau_k^{-1}a_k\exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right) \quad (t\geqslant0) \quad \varphi_k(t)=0 \quad (t<0)$$

где $A_k(\tau)$, $a_k$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{+\infty}A_k(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{m}a_k=\lambda_k$$

Параметр $\varepsilon$ в (2) характеризует степень вязкости среды: $\varepsilon=0$ соответствует идеальной вязкости, $\varepsilon=+\infty$ – идеальный упругости.

Найдем асимптотические формулы при $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\gg1$ для волн напряжений, соответствующих решению задачи (1). Примем следующие обозначения

$$L_k=\lambda_k-\int_0^{+\infty}\varphi_k(t,\varepsilon)\exp(i\gamma t)\,dt, \qquad p_1=[\rho(L_1+2L_2)^{-1}]^{1/2}$$

$$p_2=\sqrt{\rho L_2^{-1}}, \qquad N=p_1^2p_2^{-2}, \qquad \beta_k=\sqrt{p_k^2-\alpha^2}, \qquad p_R=p_2\omega^{-1/2}$$

$\omega$ – корень уравнения

$$\omega^3-8\omega^2+(24-16N)\omega-16(1-N)=0, \qquad \operatorname{Re}\omega<1$$

$$p_{k\alpha}=(\alpha x_1+(p_k^2-\alpha^2)^{1/2}x_2)r^{-1}, \qquad p_{kR}=p_{k\alpha}|_{\alpha=p_R}=(p_Rx_1+(p_k^2-p_R^2)^{1/2}x_2)r^{-1}$$

$$p_{21}=p_{2\alpha}|_{\alpha=p_1}=(p_1x_1+(p_2^2-p_1^2)^{1/2}x_2)r^{-1}, \qquad \Delta=4\alpha^2\beta_1\beta_2+(p_2^2-2\alpha^2)^2$$

$A(\alpha)$ – полуплоскость комплексной плоскости $\alpha$, в которой $x_1\operatorname{Im}\alpha\geqslant0$, $\operatorname{Im}\beta_k\geqslant0$. Уравнение $\Delta=0$ имеет только один корень $\alpha$ в области $A(\alpha)$, равный $p_R$ [1].

Решение $(u_1, u_2)$ задачи (1) можно представить в виде суммы волн: продольной $u_m^{(1)}$, поперечной $u_m^{(2)}$ и Рэлея $u_m^{(R)}$ $(m=1,2)$: $u_m=u_m^{(1)}+u_m^{(2)}+u_m^{(R)}$.

Слагаемые волны можно получить подобно тому, как это сделано для аналогичных задач в [2–5]

(3)

$$u_m^{(k)}=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{b\to+0}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\exp(-b\gamma)(iL_2)^{-1}d\gamma\int_\Gamma\sum_{l=1}^{2}A_m^{kl}Q_l\exp[i\gamma(\alpha x_1+\beta_k x_2-t)]d\alpha\quad(k=1,2)$$

где $\Gamma\subset A(\alpha)$ — контур, «переброшенный» через полюс $\alpha=p_R$

(4)

$$u_m^{(R)}=\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to+0}\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\exp(-b\gamma)L_2^{-1}\sum_{kl=1}^{2}\{\Delta(\Delta_\alpha')^{-1}A_m^{kl}Q_l\exp[i\gamma(\alpha x_1+\beta_k x_2-t)]\}_{\alpha=p_R}d\gamma$$

$$A_1^{11}=2\alpha^2\beta_2\Delta^{-1},\quad A_1^{12}=(p_2^2-2\alpha^2)\alpha\Delta^{-1},\quad A_1^{21}=(p_2^2-2\alpha^2)\beta_2\Delta^{-1},\quad A_1^{22}=-2\alpha\beta_1\beta_2\Delta^{-1}$$

$$A_2^{11}=2\alpha\beta_1\beta_2\Delta^{-1},\quad A_2^{12}=(p_2^2-2\alpha^2)\beta_1\Delta^{-1},\quad A_2^{21}=-(p_2^2-2\alpha^2)\alpha\Delta^{-1},\quad A_2^{22}=2\alpha^2\beta_1\Delta^{-1}$$

Обозначим через $\overset{(k)}{\sigma}_{sj}$ $(k=1,2)$, $\overset{(R)}{\sigma}_{sj}$ компоненты тензоров напряжений, соответствующих волнам (3), (4).

Применяя метод перевала к внутреннему интегралу по $\alpha$ в (3) и затем к внешнему интегралу по $\gamma$ в (3), (4), получим асимптотические формулы для $\overset{(k)}{\sigma}_{sj}$, $\overset{(R)}{\sigma}_{sj}$ при $r\gg1$. Обозначим

$$B_{11}^{kl}=[A_1^{kl}\alpha+(1-2N)A_2^{kl}\beta_k]N^{-1},\qquad B_{22}^{kl}=[(1-2N)A_1^{kl}\alpha+A_2^{kl}\beta_k]N^{-1}$$

$$B_{12}^{kl}=B_{21}^{kl}=A_1^{kl}\beta_k+A_2^{kl}\alpha,\qquad [\overset{onl}{B_{sj}}]^{(k)}=[\alpha^{-2}\sqrt{p_k^2-\alpha^2}(B_{sj}^{nl})\alpha']_{\alpha=p_k\pm0}$$

$$[B_{sj}^{kl}]^{(k)}=[B_{sj}^{kl}]_{\alpha=p_kx_1r^{-1}}$$

Тогда искомые формулы запишутся так (сравни [4, 5]):

(5)
$$\overset{(1)}{\sigma}_{sj}\big|_{x_2>0}=(2\pi)^{-1}x_2r^{-3/2}\operatorname{Re}\Big\{\sum_{l=1}^{2}[B_{sj}^{1l}]^{(1)}Q_l(i\gamma)^{3/2}\times$$
$$\times p_1^{1/2}[\Omega_q-i(\gamma p_1)''_{\gamma\gamma}\gamma^2r]^{-1/2}\exp[i\gamma(p_1r-t)]\Big\},\qquad \gamma=\gamma_1^{(q)},\qquad q=1/2$$

(6)
$$\overset{(2)}{\sigma}_{sj}\big|_{x_2>0}=(2\pi)^{-1}x_2r^{-3/2}\operatorname{Re}\Big\{\sum_{l=1}^{2}[B_{sj}^{2l}]^{(2)}Q_l(i\gamma)^{3/2}p_2^{1/2}[\Omega_q-i(\gamma p_2)''_{\gamma\gamma}\gamma^2r]^{-1/2}\times$$
$$\times\exp[i\gamma(p_2r-t)]\Big\}_{\gamma=\gamma_2^{(q)},\ q=1/2}+(4\pi)^{-1}\operatorname{Re}\Big\{\sum_{l=1}^{2}[\overset{o2l}{B_{sj}}]^{(1)}Q_l(i\gamma)^{1/2}(p_1\sqrt{p_2^2-p_1^2})^{3/2}\times$$
$$\times(\sqrt{p_2^2-p_1^2}\,x_1-p_1x_2)^{-3/2}[\Omega_q-i(\gamma p_{21})''_{\gamma\gamma}\gamma^2r]^{-1/2}\exp[i\gamma(p_{21}r-t)]\Big\}_{\gamma=\gamma_{21}^{(q)},\ q=-1/2}$$

(7)
$$\overset{(k)}{\sigma}_{11}\big|_{x_2=0}=(4\pi)^{-1}r^{-3/2}\operatorname{Re}\Big\{\sum_{nl=1}^{2}[\overset{onl}{B_{11}}]^{(k)}Q_l(i\gamma)^{1/2}p_k^{3/2}[\Omega_q-i(\gamma p)''_{\gamma\gamma}\gamma^2x_1]^{-1/2}\times$$
$$\times\exp[i\gamma(p_kx_1-t)]\Big\}\qquad \gamma=\gamma_1^{(q)}\big|_{x_2=0},\qquad q=-1/2$$

$$(8)\qquad \sigma_{sj}^{(R)}\,|_{x_2\geqslant 0}=(2\pi)^{-1}\operatorname{Re}\left\{ i\sum_{kl=1}^{2}[B_{sj}^{kl}Q_l\Delta(\Delta_\alpha')^{-1}]_{\alpha=p_R}\times\right.$$

$$\left.\times\,\gamma^2[\Omega_q-i(\gamma p_{kR})''_{\gamma\gamma}\gamma^2 r]^{-1/2}\exp[i\gamma(p_{kR}r-t)]\right\}\qquad \gamma=\gamma_{kR},\qquad q=1$$

Здесь $\gamma=\gamma_1^{(q)}$ ($\gamma=\gamma_2^{(q)}$, $\gamma=\gamma_{21}^{(q)}$, $\gamma=\gamma_1^{(q)}|_{x_2=0}$, $\gamma=\gamma_{kR}^{(q)}$) — корень уравнения

$$(9)\qquad \{i\gamma(pr-t)+\Omega_q\ln\gamma\}_\gamma'=0,\qquad p=p_1,\qquad p=p_2,\qquad p=p_{21},\qquad p=p_1,\qquad p=p_{kR}$$

$\Omega_q$ — наименьший вещественный корень уравнения $\Gamma(q+1)=\Omega^{q+1/2}e^{-\Omega}$.

Можно доказать, что уравнение (9) имеет только один корень $\gamma=\gamma^{(q)}$ и что $\gamma^{(q)}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(10)\qquad i\gamma^{(q)}\approx\{F_1^{(q)}\varepsilon^{-2}+\Omega_q(t-p^{(0)}r-oi)^{-1}\}_{\gamma=\gamma^{(q)}},\qquad |t-p^{(0)}r|<\varepsilon$$

$$(11)\qquad i\gamma^{(q)}\approx\{F_2^{(q)}\varepsilon^{-1}(t-p^{(0)}r)^{-1/2}+F_3^{(q)}(t-p^{(0)}r-oi)^{-1}\}_{\gamma=\gamma^{(q)}}$$

$$|t-p^{(0)}r|>\varepsilon,\qquad 0<F_m^{(q)}<\text{const}\quad (m=1,2),\qquad p^{(0)}=p\,|_{\varepsilon=+\infty}$$

Если подставить выражения (10), (11) в (5) – (8), то получим формулы, оценивающие влияние вязкости на поля напряжений.

Формы (5) – (8) основаны на следующем асимптотическом равенстве:

$$\int_0^{+\infty}(\gamma)^q\exp[i\gamma(pr-t)]d\gamma\approx(2\pi)^{1/2}[-(i\gamma(pr-t)+\Omega_q\ln\gamma)''_{\gamma\gamma}]^{-1/2}(\gamma)^q\exp[i\gamma(pr-t)]$$

$$(r\gg 1)\qquad \gamma=\gamma^{(q)},\qquad (\gamma)^q=(\gamma^{(q)})^q$$

Последнее доказывается методом перевала. При $\varepsilon=+\infty$ формулы (5) – (8) соответствуют случаю идеально упругой среды.

Работа выполнена в лаборатории фотоупругости при МИСИ им. В. В. Куйбышева. Автор благодарит коллектив лаборатории за полезные дискуссии.

Поступила 3 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брук С. З.* Поверхностные волны Рэлея в вязкоупругой среде. Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 2.
2. *Брук С. З.* Обобщенное решение задачи Лэмба в вязкоупругой полуплоскости. Докл. АН СССР, 1970, т. 197, № 3.
3. *Брук С. З.* Задача Лэмба для вязкоупругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
4. *Петрашень Г. И., Марчук К. И. Огурцов Г. И.* Задача Лэмба в упругом полупространстве. Уч. зап. ЛГУ, 1951, вып. 24.
5. *Newlands M.* Lamb's problem with internal dissipation. J. Acoust. Soc. America, 1954, vol. 26, No. 3.

---

УДК 539.3

# К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. С. БУДАЕВ

*(Москва)*

Предлагаемая статья является продолжением работы [1], в которой получено замкнутое решение задачи Лэмба для упругой анизотропной полуплоскости и приводятся кривые смещений для точек поверхности. Проведен расчет поля смещений во внутренних точках полуплоскости. Впервые задача была рассмотрена в работе [2] для случая трех упругих постоянных.