

3. Лужин О. В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях. В сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 11. М., Госстройиздат, 1962.
4. Лизарев А. Д. О низких частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. Инж. ж., МТТ, 1967, № 3.
5. Неронов В. С. К определению частот собственных колебаний сферических куполов с заземленным краем. Строительная механика и расчет сооружений, 1968, № 3.
6. Шмаков В. П. О колебаниях непологих сферических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Лизарев А. Д. О влиянии изменения длины оси на свободные колебания круговых арок. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1967, № 2.

УДК 539.3:534.1

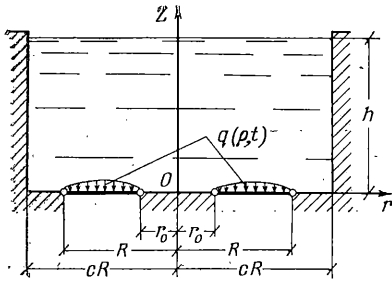
КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Е. М. ГЕРШУНОВ

(Москва)

Рассматриваются свободные и вынужденные колебания тонкой упругой кольцевой пластинки под слоем идеальной несжимаемой жидкости, который ограничен жесткой цилиндрической поверхностью. Уравнения движения пластинки (для случая шарнирного опирания) и жидкости интегрируются с помощью конечного преобразования Ханкеля. При формулировании граничных условий коэффициент Пуассона полагается равным нулю.

1. Пусть кольцевая однородная и изотропная пластинка $r_0 \leq r \leq R$, лежащая в горизонтальной плоскости $z=0$, находится под слоем идеальной несжимаемой жидкости; занимающей ограниченный объем $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq cR$, $c \geq 1$ (фиг. 1). Дифференциальное уравнение поперечных осесимметричных вынужденных колебаний пластинки в безразмерных координатах $\rho = r/R$, $\xi = z/h$ имеет вид (гидростатическая составляющая давления жидкости не учитывается)



Фиг. 1

$$\frac{D}{R^4} \nabla \nabla w(\rho, t) + m \frac{\partial^2 w(\rho, t)}{\partial t^2} = -\gamma \left. \frac{\partial \varphi(\rho, \xi; t)}{\partial t} \right|_{\xi=0} + q(\rho, t) \quad (\rho_0 \leq \rho \leq 1)$$

Потенциал скоростей жидкости удовлетворяет уравнению ($h^* = h/R$)

$$(h^* \nabla^2 + \partial^2 / \partial \xi^2) \varphi(\rho, \xi, t) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, \quad 0 \leq \xi \leq 1)$$

Пусть для потенциала скоростей выполняются следующие граничные условия:

$$\partial \varphi(\rho, \xi, t) / \partial t = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, \quad \xi = 1)$$

$$\partial \varphi(\rho, \xi, t) / \partial \rho = 0 \quad (\rho = c, \quad 0 \leq \xi \leq 1)$$

$$\frac{\partial \varphi(\rho, \xi, t)}{\partial \xi} = -hH(\rho) - \frac{\partial w(\rho, t)}{\partial t}, \quad H(\rho) = \begin{cases} 1 & (\rho_0 \leq \rho \leq 1) \\ 0 & (0 \leq \rho < \rho_0, \quad 1 < \rho \leq c) \end{cases}$$

Кроме того, должны выполняться граничные условия для пластинки на опорных контурах.

Сформулируем поставленную гидроупругую задачу: определить потенциал скоростей жидкости и прогиб пластинки в зависимости от граничных условий задачи и возмущающей нагрузки.

2. Предварительно рассмотрим задачу о свободных колебаниях системы пластинка — жидкость. Положим

$$q(\rho, t) = 0, \quad w(\rho, t) = w(\rho) \sin \omega_i t, \quad \varphi(\rho, \xi, t) = \varphi(\rho, \xi) \cos \omega_i t$$

где ω_i — частота собственных колебаний системы.

Поставленная задача сводится к следующей относительно амплитудных значений прогиба и потенциала скоростей:

$$(2.1) \quad (h_*^2 \nabla + \partial^2 / \partial \xi^2) \varphi(\rho, \xi) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, \quad 0 \leq \xi \leq 1)$$

$$(2.2) \quad \varphi(\rho, \xi) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, \quad \xi = 1)$$

$$(2.3) \quad \partial \varphi(\rho, \xi) / \partial \rho = 0 \quad (\rho = c, \quad 0 \leq \xi \leq 1)$$

$$(2.4) \quad \partial \varphi(\rho, \xi) / \partial \xi = -hH(\rho) \omega_i w(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq c, \quad \xi = 0)$$

$$(2.5) \quad (D/R^4) \nabla \nabla w(\rho) - m \omega_i^2 w(\rho) = \gamma \omega_i \varphi(\rho, \xi) |_{\xi=0} \quad (\rho_0 \leq \rho \leq 1)$$

Введем конечное интегральное преобразование Ханкеля с ядром $J_0(\rho \xi_n)$, являющимся функцией Бесселя первого рода индекса нуль

$$(2.6) \quad \Phi(\xi_n, \xi) = \int_0^c \rho \varphi(\rho, \xi) J_0(\rho \xi_n) d\rho$$

Здесь $\{\xi_n\}$ — множество неотрицательных корней уравнения $J_1(c \xi_n) = 0$. Применяя это преобразование к уравнению (2.1) и используя граничное условие (2.3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение [1]: $d^2 \Phi(\xi_n, \xi) / d\xi^2 - h_*^2 \xi_n^2 \Phi(\xi_n, \xi) = 0$ относительно трансформанты (2.6). Его решение запишем в виде: $\Phi(\xi_n, \xi) = C_{1n} e^{h_* \xi_n \xi} + C_{2n} e^{-h_* \xi_n \xi}$.

Для определения произвольных постоянных сначала воспользуемся граничным условием (2.2). Получим: $\Phi(\xi_n, \xi) = C(\xi_n) \text{sh}[h_* \xi_n (1 - \xi)]$.

Применим к этой зависимости формулу обращения [1]

$$(2.7) \quad \varphi(\rho, \xi) = \frac{2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\xi_n) \text{sh}(h_* \xi_n [1 - \xi])}{J_0^2(c \xi_n)} J_0(\rho \xi_n)$$

Введем обозначение для выражения

$$C_n = \frac{2 \xi_n C(\xi_n) \text{ch} h_* \xi_n}{\omega_i c^2 R J_0^2(c \xi_n)}$$

Используя граничное условие (2.4), получим ряд Дини для отыскания коэффициентов C_n

$$(2.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\rho \xi_n) = H(\rho) w(\rho)$$

На основании свойства ортогональности имеем

$$(2.9) \quad C_n = \frac{2}{c^2 J_0^2(c \xi_n)} \int_{\rho_0}^1 \rho w(\rho) J_0(\rho \xi_n) d\rho$$

Подставляя значения (2.9) в зависимость (2.7) и используя (2.8), получим для потенциала скоростей

$$(2.10) \quad \varphi(\rho, \xi) = \frac{2 \omega_i R}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho \xi_n) \text{sh}[h_* \xi_n (1 - \xi)]}{\xi_n \text{ch} h_* \xi_n J_0^2(c \xi_n)} \int_{\rho_0}^1 \rho w(\rho) J_0(\rho \xi_n) d\rho$$

Пусть $G(\rho \mu_i)$ — собственная функция краевой задачи (2.5). Тогда $w(\rho) = a_i G(\rho \mu_i)$. Введем конечное интегральное преобразование Ханкеля, ядром которого является $G(\rho \mu_i)$. Обозначим

$$(2.11) \quad W(\mu_i) = \int_{\rho_0}^1 \rho w(\rho) G(\rho \mu_i) d\rho$$

Здесь $\{\mu_i\}$ — множество положительных корней некоторого уравнения;

Применим к дифференциальному уравнению (2.5) это интегральное преобразование. Используя результаты работы [2], получим

$$(2.12) \quad a_i [D\mu_i^4 - (m + m_i)R^4\omega_i^2] = 0$$

$$m_i = \frac{2\gamma R}{c^2 \|G(\mu_i)\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th } h_* \xi_n}{\xi_n J_0^2(c\xi_n)} \left[\int_{\rho_0}^1 \rho G(\rho\mu_i) J_0(\rho\xi_n) d\rho \right]^2$$

Здесь $\|G(\mu_i)\|$ — норма собственной функции, а m_i является присоединенной массой жидкости. Из выражения (2.12) получаем частоту собственных колебаний пластинки с учетом влияния жидкости (где ω_i^* — частота колебаний пластинки в воздухе).

$$(2.13) \quad \omega_i = \frac{\mu_i^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{m(1+m_i m^{-1})}} \quad \text{или} \quad \sqrt{1+m_i m^{-1}} \omega_i = \omega_i^*$$

3. Оценим влияние различных факторов на величину присоединенной массы жидкости. Для этого рассмотрим кольцевую пластинку, шарнирно опертую по внешнему и внутреннему контурам. Используя результаты [2] и формулы Ломмеля — Ханкеля [3], получим

$$m_i = \frac{4\gamma R\mu_i^2}{c^2 [J_0^2(\rho_0\mu_i) - J_0^2(\mu_i)]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th } h_* \xi_n [J_0(\xi_n) J_0(\rho_0\mu_i) - J_0(\mu_i) J_0(\rho_0\xi_n)]^2}{\xi_n J_0^2(c\xi_n) (\mu_i^2 - \xi_n^2)^2}$$

Здесь $\{\mu_i\}$ — множество положительных корней уравнения $J_0(\mu_i) Y_0(\rho_0\mu_i) - J_0(\rho_0\mu_i) Y_0(\mu_i) = 0$, в котором $Y_0(x)$ — функция Бесселя второго рода индекса нуля. Корни этого уравнения для некоторых значений ρ_0 , а также рекомендации по их вычислению для других значений ρ_0 приведены в работе [2].

Для оценки влияния на величину m_i относительного радиуса c цилиндрической поверхности рассмотрим предельный случай, когда кольцевая пластинка колеблется под неограниченным в плане слоем жидкости ($c \rightarrow \infty$). Не вдаваясь в подробности получения решения, приведем лишь окончательный результат. Присоединенная масса жидкости в этом случае для пластинки с шарнирным опиранием по обоим контурам описывается зависимостью

$$(3.1) \quad m_i = \frac{2\gamma R\mu_i^2}{J_0^2(\rho_0\mu_i) - J_0^2(\mu_i)} \int_0^{\infty} \frac{\text{th } h_* \xi}{(\mu_i^2 - \xi^2)^2} [J_0(\xi) J_0(\rho_0\mu_i) - J_0(\mu_i) J_0(\rho_0\xi)]^2 d\xi.$$

Для анализа зависимости m_i от различных факторов проведены вычисления на ЭВМ. Интеграл (3.1) при этом вычислялся по квадратурным формулам, основанным на применении интерполяционных полиномов Лагерра пятнадцатой степени.

Результаты исследования зависимости m_i от c при различных $0 \leq \rho_0 < 1$ и $i \geq 1$ имеют один и тот же качественный характер и представлены на фиг. 2, 3 ($\rho_0 = 0.5$ и 0.83 соответственно). Суть этой зависимости состоит в том, что присоединенная масса жидкости достигает наибольшей величины для $c=1$. При увеличении относительного радиуса c присоединенная масса жидкости резко убывает, стремясь к некоторому предельному значению, соответствующему m_i при колебаниях пластинки под неограниченным в плане слоем жидкости. Не внося погрешности в расчет, слой жидкости можно считать неограниченным в плане, если $c \geq 5$.

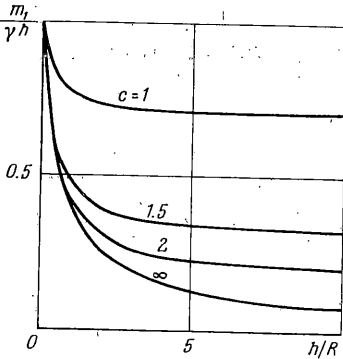
Для любого произвольного относительного внутреннего радиуса пластинки ρ_0 величина присоединенной массы жидкости меньше, чем для сплошной круглой пластинки, имеющей тот же радиус. С увеличением ρ_0 величина присоединенной массы уменьшается, стремясь к нулю при $\rho_0 \rightarrow 1$.

Величина m_i при прочих равных условиях принимает наибольшее значение для основной формы собственных колебаний ($i=1$). С увеличением номера обертона присоединенная масса жидкости уменьшается, приближаясь к нулю. Эта закономерность, ранее найденная и проанализированная для круглых пластинок с различными граничными условиями [4], справедлива и для кольцевых пластинок. Следует при этом отметить, что уже при $i=2$ величина присоединенной массы не превышает 10% от m_i и поэтому, по-видимому, в большинстве расчетов может не учитываться.

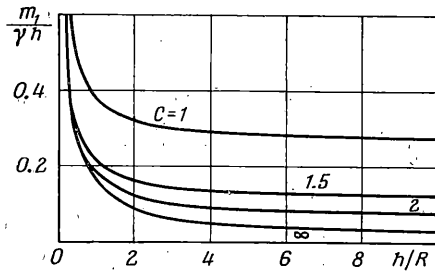
4. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания пластинки, вызванные осесимметричной возмущающей нагрузкой

$$q(\rho, t) = q(\rho) \sin pt \quad (p \neq \omega_i, t > -\infty)$$

Решение задачи можно получить, используя методику, примененную при рассмотрении задачи о собственных колебаниях. Амплитудное значение потенциала скоростей получаем в форме (2.10) (вместо ω_i следует понимать p). К дифференциальному уравнению применяем конечное интегральное преобразование Ханкеля, ядром



Фиг. 2



Фиг. 3

которого является собственная функция $G(\rho\mu_i)$, при этом амплитуду прогиба представим в виде ряда

$$w(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i G(\rho\mu_i)$$

Получаем алгебраическое уравнение относительно трансформанты искомого прогиба (2.11), из которого следует

$$(4.1) \quad W(\mu_i) = Q(\mu_i) / [(m + m_i)(\omega_i^2 - p^2)]^{-1}$$

Здесь $Q(\mu_i)$ — интегральная трансформанта возмущающей нагрузки

$$Q(\mu_i) = \int_{\rho_0}^1 \rho q(\rho) G(\rho\mu_i) d\rho$$

Применяя к трансформанте (4.1) формулу обращения, основанную на свойстве ортогональности собственных функций, имеем

$$(4.2) \quad w(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q(\mu_i) G(\rho\mu_i)}{(m + m_i)(\omega_i^2 - p^2) \|G(\mu_i)\|^2}$$

Полученные результаты распространяются на колебания пластинки, лежащей на сплошном винклеровом упругом основании и растянутой (сжатой) радиальным давлением интенсивностью p_0 .

Окончательные результаты имеют тот же вид (4.2), (2.10) с учетом сделанных выше замечаний. При этом круговую частоту собственных колебаний следует принять в форме (где k — коэффициент постели)

$$(4.3) \quad \omega_i = \frac{\mu_i^2}{R^2} \left[\frac{D}{m + m_i} \left(1 + \frac{R^2 p_0}{D \mu_i^2} + \frac{k R^4}{D \mu_i^4} \right) \right]^{1/2}$$

Таким образом, все полученные результаты могут быть применены и к рассматриваемому расчетному случаю, если вместо (2.13) понимать (4.3).

Поступила 18 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
2. Гершунов Е. М. Расчет круглых и кольцевых пластинок на действие произвольной динамической нагрузки. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
3. Корнеев В. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., «Наука», 1971.
4. Гершунов Е. М. Определение присоединенной массы жидкости при расчете днищ резервуаров. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 6.