

О ФОРМАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Д. ЛИЗАРЕВ

(Гомель)

Число работ, в которых приводятся надежные численные результаты определения частот и форм собственных колебаний сферических оболочек точным методом, до сих пор невелико. В то же время многочисленные приближенные методы решения этой задачи, развитые за последние годы, не всегда позволяют выявить некоторые интересные закономерности колебаний сферических оболочек. Ниже исследованы точным методом формы собственных колебаний односрезных сферических оболочек с шарнирно опертым или жестко защемленным краем.

Принципиальные стороны решения известного дифференциального уравнения колебаний сферической оболочки [1]

$$(1) \quad \Delta \Delta W + (4 + k_n^2) \Delta W + c^2 \left(1 - \frac{k_n^2}{1 - \nu^2} \right) \Delta W + c^2 \left[2 + \frac{(1 + 3\nu) k_n^2 - k_n^4}{1 - \nu^2} \right] W = 0$$

рассмотрены во многих работах, например [2-6]. В случае односрезной оболочки интеграл уравнения (1) имеет вид

$$(2) \quad W = \left[\sum_{i=1}^3 A_i P_{n_i}^m(\cos \theta) \right] \cos m\varphi$$

где $P_{n_i}^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Используя известную процедуру составления системы однородных уравнений относительно постоянных A_i и приравнивания нулю определителя, составленного из коэффициентов при A_i , получим уравнение, из которого может быть определен частотный параметр k_n .

Результаты решения на БЭСМ-2М частотных уравнений при $\nu = 1/3$, $m = 0$, $\pi/12 \leq \alpha \leq \pi/2$ и $R/\delta = 20$ показаны на фиг. 1, а при тех же параметрах ν , m и α , но $R/\delta = 100$ — на фиг. 2. По оси ординат отложена величина k , связанная с k_n соотношением $k_n^2 = k^2(1 - \nu^2)$. Пунктирные линии соответствуют частотам собственных колебаний жестко защемленных оболочек, сплошные — шарнирно опертых. При $\nu = 1/3$ и $R/\delta = 20$ характеристическое уравнение имеет кратные корни при $k = 1.129$; таким образом, при $k > 1.129$ все корни уравнения вещественны, а при $k < 1.129$ один корень вещественный, а два других — комплексно-сопряженные. При $\nu = 1/3$ и $R/\delta = 100$ характеристическое уравнение имеет кратные корни при $k = 1.044$.

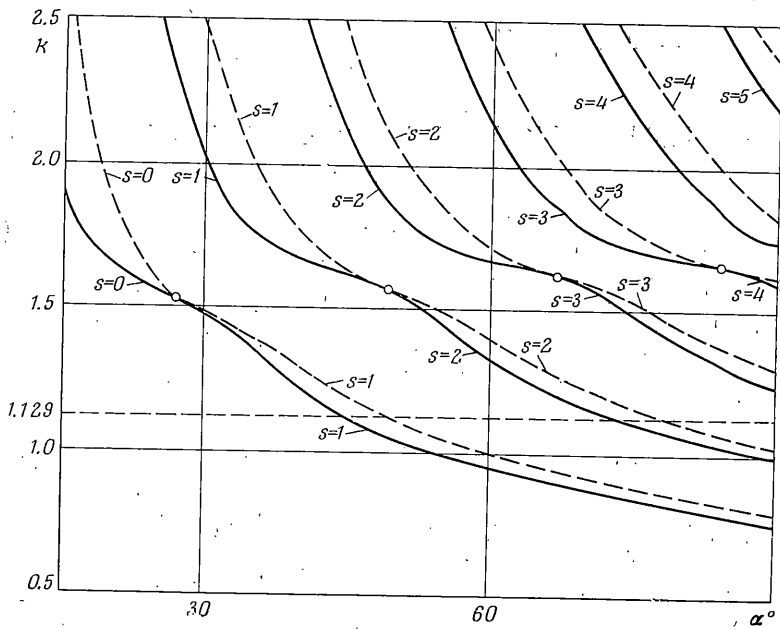
Полагая параметр k_n известным, можно с точностью до постоянного множителя определить форму собственных колебаний, используя уравнение (2) и учитывая соответствующие граничные условия. Таким образом, определены указанные на фиг. 1, 2, числа узловых параллелей s (в число s не включается узловая параллель, совпадающая с закреплением оболочки).

Рассмотрим некоторые особенности форм собственных колебаний сферических оболочек. При $s > 0$, определенном числе узловых меридианов m , заданном отношении R/δ и угле α имеются две различных частоты собственных колебаний оболочки, которым соответствует одинаковое число узловых параллелей s , но разное их положение.

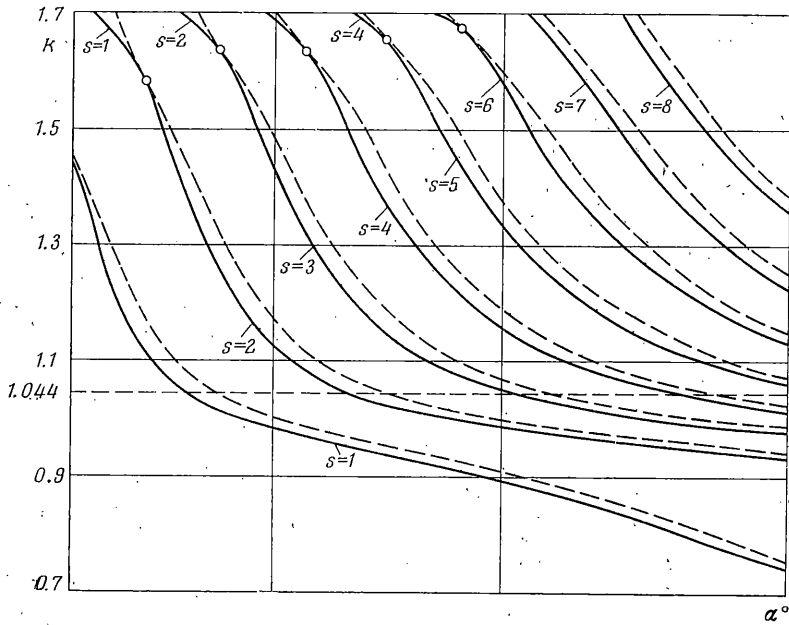
Если коэффициент ν и отношение R/δ заданы, то форме с m узловыми меридианами и s узловыми параллелями соответствуют два определенных значения угла α_1 и α_2 , при которых $\omega_1 = \omega_2$, где ω_1 — частота собственных колебаний шарнирно опертой и ω_2 — жестко защемленной оболочек. Если $s = 0$, то существует единственное значение α , при котором $\omega_1 = \omega_2$.

В качестве примера были получены формы собственных колебаний шарнирно опертой оболочки с центральным углом дуги, изменяющимся в интервале $45^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$ при $m = 0$, отношении $R/\delta = 20$ и коэффициенте $\nu = 1/3$. При уменьшении угла α одна из узловых параллелей формы колебаний приближается к контуру оболочки, а при угле $\alpha \approx 49^\circ$ эта узловая параллель сливается с узловой параллелью, совпадающей с закреплением оболочки, образуя двукратную узловую параллель. При дальнейшем уменьшении угла α форма собственных колебаний оболочки имеет на одну узловую параллель меньше.

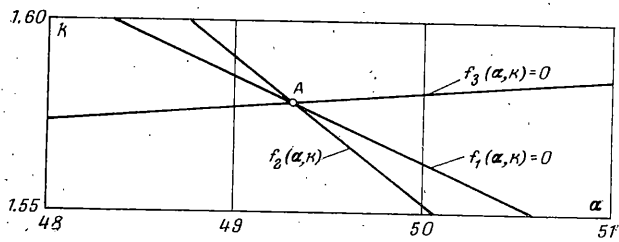
Двукратные узловые параллели форм колебаний сферических оболочек возможны при условии растяжимости срединной поверхности. Интересно отметить, что дву-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

кратные узлы форм колебаний и потери устойчивости круговых арок также возможны лишь в случае изменения длины оси арки [7].

При свободных колебаниях оболочки на любом ее меридиане при пересечении его с двукратной узловой параллелью образуется точка перегиба. В этой точке равны нулю угол поворота касательной к меридиану, т. е. $\psi=0$, а также кривизна, т. е. производная $d\psi/d\theta=0$. Учитывая, что $\psi=R^{-1}(u-dw/d\theta)$ и внося выражение ψ в уравнение изгибающих моментов в меридиональной плоскости

$$M = -\frac{D}{R^2} \left[\frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{du}{d\theta} - \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) \nu \operatorname{ctg} \theta \right]$$

где u — перемещение в направлении меридиана, получим

$$M = \frac{D}{R} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \nu\psi \operatorname{ctg} \theta \right)$$

Отсюда следует, что во всех точках двукратной узловой параллели равны нулю как угол поворота касательной к меридиану, так и момент в меридиональной плоскости. Этим объясняется отмеченное равенство при определенных условиях частот собственных колебаний шарнирно опертых и жестко зацементированных оболочек.

При наличии двукратной узловой параллели определители

$$(3) \quad D_1 = D_2 = 0$$

Здесь $D_1=0$ — уравнение, из которого могут быть определены частоты собственных колебаний шарнирно опертой оболочки; $D_2=0$ — уравнение, из которого определяются частоты собственных колебаний жестко зацементированной оболочки. Для вычисления кратных частот $\omega_1 = \omega_2$ будем рассматривать уравнения (3) при заданном отношении R/δ как систему двух уравнений относительно неизвестных угла α и частотного параметра k_n .

Рассматривая область, в которой все корни характеристического уравнения вещественны, и исключая из уравнений (3) отношение $F_3(\cos \alpha) = P_{n3}'(\cos \alpha)/P_{n3}(\cos \alpha)$, после упрощений получим

$$(4) \quad f_1(\alpha, k_n) = [p_3(1+\eta_3) - p_1(1+\eta_1)](\eta_3 - \eta_2)F_2(\cos \alpha) + [p_3(1+\eta_3) - p_2(1+\eta_2)](\eta_1 - \eta_3)F_1(\cos \alpha) = 0$$

$$F_1(\cos \alpha) = \frac{P_{n1}'(\cos \alpha)}{P_{n1}(\cos \alpha)}, \quad F_2(\cos \alpha) = \frac{P_{n2}'(\cos \alpha)}{P_{n2}(\cos \alpha)}, \quad p_i = n_i(n_i+1)$$

$$\eta_i = -\frac{\lambda_i}{p_i}, \quad \lambda_i = \frac{p_i^2 - 2p_i + c^2[2(1+\nu) - k_n^2](1-\nu^2)^{-1}}{c^2(1-\nu)^{-1} + 2k_n^2}$$

Исключая далее из уравнений (3) отношения $F_2(\cos \alpha)$ и $F_1(\cos \alpha)$, получим при помощи циклической перестановки индексов еще два уравнения

$$(5) \quad f_2(\alpha, k_n) = [p_2(1+\eta_2) - p_3(1+\eta_3)](\eta_2 - \eta_1)F_1(\cos \alpha) + [p_2(1+\eta_2) - p_1(1+\eta_1)](\eta_3 - \eta_2)F_3(\cos \alpha) = 0$$

$$(6) \quad f_3(\alpha, k_n) = [p_1(1+\eta_1) - p_2(1+\eta_2)](\eta_1 - \eta_3)F_3(\cos \alpha) + [p_1(1+\eta_1) - p_3(1+\eta_3)](\eta_2 - \eta_1)F_2(\cos \alpha) = 0$$

Из трех уравнений (4)–(6) независимыми являются любые два, а третье может быть использовано для контроля правильности вычислений. Отметим, что графики функций $f_i(\alpha, k_n) = 0$ ($i=1, 2, 3$), построенные в координатах $\alpha - k_n$, в окрестности точки $A(\alpha_0, k_{n0})$, удовлетворяющей уравнениям (4)–(6), очень близки к прямым. Например, на фиг. 3 показаны графики функций $f_i(\alpha, k_n) = 0$ для второй осесимметричной формы колебаний оболочки с отношением $R/\delta = 20$. Все три линии пересекаются в точке с координатами $\alpha \approx 49.3^\circ$ и $k \approx 1.579$.

Как показывают вычисления, при уменьшении относительной толщины оболочки δ/R частотные параметры k_n , соответствующие кратным частотам $\omega_1 = \omega_2$, изменяются незначительно, но они определяются при меньших значениях угла α .

Поступила 23 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Federhofer K. Zur Berechnung der Eigneschwingungen der Kugelschale. Mitteilung. Wiener. Ber. 1937, Bd 146, [2A], Nr 1/2.
2. Kalnins A., Naghdi P. M. Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells. J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, No. 3.

3. Лужин О. В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях. В сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 11. М., Госстройиздат, 1962.
4. Лизарев А. Д. О низких частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. Инж. ж., МТТ, 1967, № 3.
5. Неронов В. С. К определению частот собственных колебаний сферических куполов с заземленным краем. Строительная механика и расчет сооружений, 1968, № 3.
6. Шмаков В. П. О колебаниях непологих сферических оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Лизарев А. Д. О влиянии изменения длины оси на свободные колебания круговых арок. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1967, № 2.

УДК 539.3:534.1

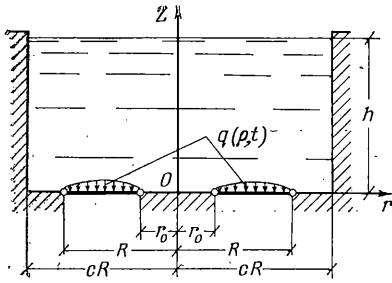
КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Е. М. ГЕРШУНОВ

(Москва)

Рассматриваются свободные и вынужденные колебания тонкой упругой кольцевой пластинки под слоем идеальной несжимаемой жидкости, который ограничен жесткой цилиндрической поверхностью. Уравнения движения пластинки (для случая шарнирного опирания) и жидкости интегрируются с помощью конечного преобразования Ханкеля. При формулировании граничных условий коэффициент Пуассона полагается равным нулю.

1. Пусть кольцевая однородная и изотропная пластинка $r_0 \leq r \leq R$, лежащая в горизонтальной плоскости $z=0$, находится под слоем идеальной несжимаемой жидкости; занимающей ограниченный объем $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq cR$, $c \geq 1$ (фиг. 1). Дифференциальное уравнение поперечных осесимметричных вынужденных колебаний пластинки в безразмерных координатах $\rho = r/R$, $\xi = z/h$ имеет вид (гидростатическая составляющая давления жидкости не учитывается)



Фиг. 1

$$\frac{D}{R^4} \nabla \nabla w(\rho, t) + m \frac{\partial^2 w(\rho, t)}{\partial t^2} = -\gamma \left. \frac{\partial \varphi(\rho, \xi, t)}{\partial t} \right|_{\xi=0} + q(\rho, t) \quad (\rho_0 \leq \rho \leq 1)$$

Потенциал скоростей жидкости удовлетворяет уравнению ($h^* = h/R$)

$$(h^* \nabla^2 + \partial^2 / \partial \xi^2) \varphi(\rho, \xi, t) = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, 0 \leq \xi \leq 1)$$

Пусть для потенциала скоростей выполняются следующие граничные условия:

$$\partial \varphi(\rho, \xi, t) / \partial t = 0 \quad (0 \leq \rho \leq c, \xi = 1)$$

$$\partial \varphi(\rho, \xi, t) / \partial \rho = 0 \quad (\rho = c, 0 \leq \xi \leq 1)$$

$$\frac{\partial \varphi(\rho, \xi, t)}{\partial \xi} = -hH(\rho) - \frac{\partial w(\rho, t)}{\partial t}, \quad H(\rho) = \begin{cases} 1 & (\rho_0 \leq \rho \leq 1) \\ 0 & (0 \leq \rho < \rho_0, 1 < \rho \leq c) \end{cases}$$

Кроме того, должны выполняться граничные условия для пластинки на опорных контурах.

Сформулируем поставленную гидроупругую задачу: определить потенциал скоростей жидкости и прогиб пластинки в зависимости от граничных условий задачи и возмущающей нагрузки.

2. Предварительно рассмотрим задачу о свободных колебаниях системы пластинка — жидкость. Положим

$$q(\rho, t) = 0, \quad w(\rho, t) = w(\rho) \sin \omega_i t, \quad \varphi(\rho, \xi, t) = \varphi(\rho, \xi) \cos \omega_i t$$

где ω_i — частота собственных колебаний системы.