

УПРУГАЯ КОЛЬЦЕВАЯ ПЛАСТИНА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

М. В. АРИСТОВ, В. А. ТРОИЦКИЙ

(Ленинград)

Рассмотрена задача о минимизации веса кольцевых упругих пластин с произвольной нормальной нагрузкой, различными граничными условиями и с ограничениями на изгибные напряжения, представленная в форме задачи оптимального управления с разрывным функционалом [1]. Численные результаты получены при помощи градиентного метода первого порядка. Приведены оптимальные конструкции пластин для различных нагрузок и граничных условий. В рассмотренных задачах выигрыш по весу составляет от 30 до 55%.

1. Рассмотрим упругую кольцевую пластину под осесимметричной нормальной нагрузкой $p(r)$, где r — радиальная координата, $a \leq r \leq b$. Уравнения равновесия пластины и условие совместности деформаций имеют следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} (Qr)' + rp(r) &= 0, & (rM_r)' - M_\phi - Qr &= 0 \\ (M_r - \nu M_\phi) / D &= [r(M_\phi - \nu M_r) / D]' \end{aligned}$$

Здесь Q — перерезывающая сила, M_r , M_ϕ — радиальный и тангенциальный изгибающие моменты, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $h = h(r)$ — толщина пластины, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ — ее изгибная жесткость; штрихом обозначено дифференцирование по r . Граничные условия в общем случае представляются соотношениями

$$\varphi_i(Q, M_r, M_\phi, w', w) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

где w — прогиб пластины, $w' = -r(M_\phi - \nu M_r) / D(1 - \nu^2)$ — угол поворота срединной поверхности. Вес пластины дается функционалом

$$v = 2\pi \int_a^b rh(r) dr$$

а ограничения на величину кольцевых и радиальных напряжений можно записать в форме $\max \sigma_\phi = 6|M_\phi| / h^2 \leq \sigma_0$, $\max \sigma_r = 6|M_r| / h^2 \leq \sigma_0$.

Введем следующие безразмерные переменные и величины:
 $t = r / b$, $u = D / D_0$, $D_0 = Eh_0^3 / 12(1 - \nu^2)$, $q = p(r)b^3 / D_0$, $k = 2(1 - \nu^2)b\sigma_0 / Eh_0$,
 $s_1 = \sigma_r / \sigma_0$, $s_2 = \sigma_\phi / \sigma_0$, $J = \nu / \pi h_0(b^2 - a^2)$, $x_1 = -w'(1 - \nu^2)$, $x_2 = rM_r / D_0$,
 $x_3 = rbQ / D_0$

Тогда изгиб пластины будет описываться уравнениями (точка означает дифференцирование по t) при $t_0 = a / b \leq t \leq 1$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\nu x_1 / t + (1 - \nu^2)x_2 / tu \\ \dot{x}_2 &= ux_1 / t + \nu x_2 / t + x_3(t), \quad \dot{x}_3 = -tq(t) \end{aligned}$$

с ограничениями

$$(1.2) \quad |s_1| = |x_2| / tu^{2/3}k \leq 1, \quad |s_2| = |ux_1 + \nu x_2| / tu^{2/3}k \leq 1$$

и функционалом

$$J = \frac{2}{1-t_0^2} \int_{t_0}^1 u^{1/2} t dt$$

Заметим, что третье уравнение (1.1) может быть проинтегрировано отдельно.

Рассмотрим видоизмененный функционал

$$J_1 = \frac{2}{1-t_0^2} \int_{t_0}^1 u^{1/2} t dt + K_1 \int_{t_0}^1 \mu_1(t) (s_1^2 - 1) dt + K_2 \int_{t_0}^1 \mu_2(t) (s_2^2 - 1) dt$$

Здесь K_1, K_2 — некоторые постоянные

$$\mu_i(t) = \begin{cases} 0 & t \in \{[t_0, 1] : |s_i(t)| < 1\} \\ 1 & t \in \{[t_0, 1] : |s_i(t)| \geq 1\} \end{cases} \quad (i=1,2)$$

Можно сказать, что в пространстве $R(x_1, x_2, u, t)$ заданы гиперповерхности ϑ_i , делящие R на части, в которых подынтегральная функция имеет разный вид

$$\vartheta_1(x_1, x_2, u, t) = (x_2 / tu^{2/3}k)^2 - 1 = 0, \quad \vartheta_2(x_1, x_2, u, t) = ((ux_1 + vx_2) / tu^{2/3}k)^2 - 1 = 0$$

Введя обозначение

$$(1.3) \quad J_1 = \int_{t_0}^1 f_0(x_1, x_2, u, t) dt$$

получим, что f_0 может быть представлена соотношением

$$(1.4) \quad f_0 = \frac{2u^{1/2}t}{1-t_0^2} + \begin{cases} 0 & \text{при } \vartheta_1 < 0, \vartheta_2 < 0 \\ K_1(s_1^2 - 1) & \text{при } \vartheta_1 > 0 \\ K_2(s_2^2 - 1) & \text{при } \vartheta_2 > 0 \end{cases}$$

Получена следующая задача оптимального управления с разрывным функционалом: в классе кусочно-непрерывных фазовых координат x_1, x_2 и управлений u найти такие, которые удовлетворяют системе (1.1) и минимизируют функционал (1.3). Минимизация выражения (1.3) будет означать также выполнение ограничений (1.2).

2. Необходимые условия оптимальности для задач этого класса получены в работе [1] для случая, когда $\vartheta_{1,2}$ не зависят от управлений. При помощи использованных в [1] приемов можно построить необходимые условия оптимальности и в случае, когда $\vartheta_{1,2}$ явно зависят от u . Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные результаты.

Положим для определенности, что фазовая траектория пересекает поверхность $\vartheta_1 = 0$ при $t = t_1$, поверхность $\vartheta_2 = 0$ при $t = t_2$. Составим расширенный функционал

$$I = v_1 \vartheta_1(t_1) + v_2 \vartheta_2(t_2) + \int_{t_0}^1 (\lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \dot{x}_2 - H) dt$$

где $v_1, v_2, \lambda_1(t), \lambda_2(t)$ — неопределенные множители Лагранжа, H — гамильтониан системы, имеющий вид

$$H = -f_0 + \lambda_1[-vx_1/t + (1-v^2)x_2/tu] + \lambda_2[ux_1/t + vx_2/t + x_3]$$

Тогда необходимое условие стационарности будет включать уравнения (причем форма их различна для разных значений t вследствие разрыва f_0)

$$(2.1) \quad \lambda_1^* = -\partial H / \partial x_1, \quad \lambda_2^* = -\partial H / \partial x_2, \quad \partial H / \partial u = 0$$

Концевые условия

$$\lambda_1(t_0) \delta x_1(t_0) + \lambda_2(t_0) \delta x_2(t_0) - \lambda_1(1) \delta x_1(1) - \lambda_2(1) \delta x_2(1) = 0$$

условия Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_i^-(t_k) - \lambda_i^+(t_k) + v_k \partial \theta_k / \partial x_i(t_k) = 0 \quad (i, k=1, 2)$$

и дополнительные соотношения, которые должны выполняться в точках $t=t_1$ и $t=t_2$

$$(2.2) \quad v_i \partial \theta_i / \partial u(t_i) = 0, \quad v d \theta_i / dt |_{t=t_i} = 0 \quad (i=1, 2)$$

Первое из них показывает, что если $\partial \theta_1 / \partial u(t_1) \neq 0$ и $\partial \theta_2 / \partial u(t_2) \neq 0$, то множители Лагранжа $\lambda_{1,2}$ сохраняют непрерывность в точках выхода на ограничение, в противном случае возможны разрывы их непрерывности.

3. Для численного решения задачи используем градиентный метод первого порядка [3], внося в него дополнения, учитывающие особенности задачи. Решение состоит в том, что по выбранному приближению \bar{u} «точно» интегрируются уравнения системы (1.2) и первые два из уравнений (2.1), вытекающие из условий оптимальности. Третье уравнение (2.1) при выбранном управлении \bar{u} не удовлетворяется, так что $\partial H / \partial \bar{u} \neq 0$. Оно используется для построения вариации управления $\delta u = -\varepsilon \partial H / \partial \bar{u}$, $0 < \varepsilon < 1$, которая уменьшает функционал. Постоянные K_1 и K_2 , входящие в правую часть (1.4), играют роль штрафных функций. Целесообразно первые «шаги» по градиенту осуществлять с большим ε ($\varepsilon \sim 0.5$) и малым $K_{1,2}$ ($K_{1,2} \sim 1$), а затем увеличивать $K_{1,2}$ и уменьшать ε , добиваясь желаемой точности. Как показывает опыт вычислений, использование изменяемых $K_{1,2}$ и ε сокращает машинное время в два-три раза.

4. Рассмотрим пластину, опертую по наружному краю. В этом случае граничные условия для (1.4) и (2.1) запишутся в виде

$$(4.1) \quad x_2(t_0) = x_2(t_1) = 0, \quad \lambda_1(t_0) = \lambda_1(1) = 0, \quad x_3(t_0) = 0$$

Интегрирование системы (1.1), (2.1) осуществлялось методом прогонки. В качестве начального приближения для управления использовалась функция $\bar{u} = 1$. Из соображений удобства счета управление было ограничено снизу малой величиной $u \geq 0.001$. Для постоянной распределенной нагрузки были проведены расчеты по разностным схемам, включающим 20 или 5 точек по радиальной координате; полученные результаты практически совпадают. На фиг. 1 и 2 показаны безразмерные напряжения для оптимальной пластины (сплошные кривые) и для пластин, приближающихся к оптимальным (тонкие пунктирные кривые). Цифры рядом с кривыми указывают долю веса этих пластин по отношению к пластине постоянной толщины. Вес оптимальной пластины составляет 57.4% веса пластины постоянной толщины. Жирными пунктирными кривыми нанесены для сравнения безразмерные напряжения в пластине постоянной толщины.

На фиг. 3 приведены безразмерные зависимости толщины от радиуса для оптимальной пластины (сплошная кривая) и промежуточных пластин (пунктирные кривые). Кружками нанесены точки, полученные при расчете по разностной схеме с пятью узлами.

Следует отметить резкое возрастание толщины на свободном краю пластины. Однако если проанализировать первые из соотношений (2.2), то оказывается, что в точке выхода на ограничение $|s_2| = 1$ множитель Лагранжа λ_1 теряет непрерывность. Действительно, в силу граничных условий (4.1) $x_2(t_0) = 0$, $\lambda_1^-(t_0) = 0$ и условия оптимальности (2.2), принимающего в изучаемом случае вид $v_2 x_1(t_0) = 0$, найдем, что разрывы $\lambda_{1,2}$ определяются соотношениями

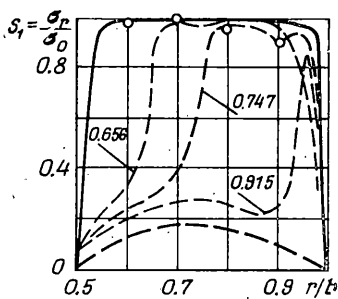
$$\lambda_2^-(t_0) = \lambda_2^+(t_0) - 2v v_2 x_1(t_0) / t^2 k^2 u^{1/2}(t_0)$$

$$\lambda_1^-(t_0) = \lambda_1^+(t_0) - 2v_2 x_1(t_0) u^{2/3}(t_0) / t^2 k^2$$

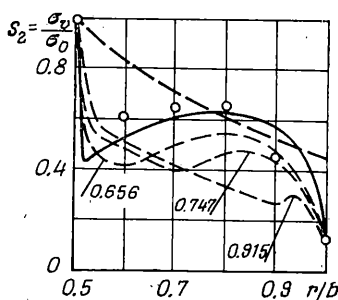
Поэтому если предположить, что для оптимальной конструкции производство $v_2 x_1$ убывает при $t \rightarrow t_0$ как α ($\alpha \rightarrow 0$), то при возрастании u не менее чем $1/\alpha^3$ придем к зависимостям $\lambda_2^-(t_0) = \lambda_2^+(t_0)$, $\lambda_1^-(t_0) = \lambda_1^+(t_0) - 1/\alpha$.

Они показывают, что бесконечное значение управления не противоречит условиям оптимальности и вызывает разрыв множителя λ_1 в точке t_0 . Это иллюстрирует зависимость $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, полученная при расчете и приводимая на фиг. 4.

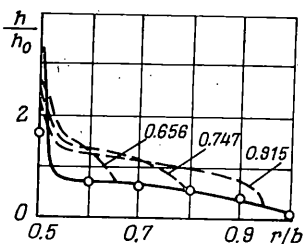
Обозначим A равномерно распределенную нагрузку, B — нагрузку, распределенную по закону $q(t) = q_0(1-t_0-2t)/(1-t_0)$ и C — нагрузку в виде



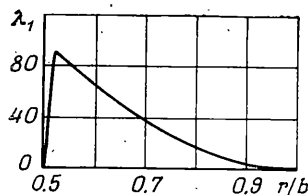
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



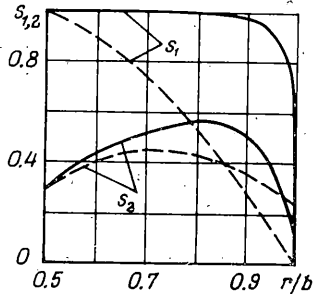
Фиг. 4

кольцевого усилия, приложенного к свободному краю пластины. Для нагрузок типа B и C результаты расчетов качественно такие же, как и для типа A , т. е. для оптимальной пластины ограничение $|s_2| \leq 1$ реализуется в виде равенства в точке $t=t_0$, а ограничение $|s_1| \leq 1$ в остальных точках. Зависимость толщины от радиуса для этих пластин (h/h_0) приведена ниже. Отношение веса оптимальной пластины к весу пластины постоянной толщины v_*/v_0 для нагрузок типов A, B, C соответственно равно 0,574, 0,535, 0,475.

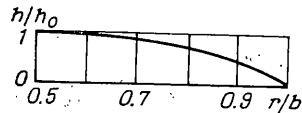
r/b	A	B	C
0.5	1.678	1.710	1.730
0.6	0.690	0.698	0.618
0.7	0.633	0.617	0.509
0.8	0.556	0.489	0.400
0.9	0.426	0.323	0.274
1.0	0.100	0.100	0.108

5. Рассмотрим пластину с жестким ядром, опертую по наружному краю. В этом случае граничные условия для (1.1) и (2.1) запишутся в виде $x_1(t_0) = x_2(1) = 0$, $\lambda_2(t_0) = \lambda_1(1) = 0$. Задача решалась аналогично предыдущей, однако характер граничных условий в данном случае не вызывает разрыва множителей Лагранжа и бесконечных значений управления. На-

пряжения и толщина для полученной оптимальной пластины при нагрузке типа *A* даны на фиг. 5 и 6. Сплошными линиями нанесены оптимальные значения, пунктирными — для сравнения даны напряжения в пластине постоянной толщины. Как и в предыдущем случае, управления ограничены снизу $u \geq 0.001$, счет проведен для разностной схемы с пятью узлами.



Фиг. 5



Фиг. 6

В данной задаче, в отличие от рассмотренной в п. 4, ограничение $|s_1| \leq 1$ выполняется в виде равенства во всех точках, кроме $t=1$ (опертый край), а ограничение $|s_2| \leq 1$ реализуется во всей пластине в виде строгого неравенства. Для нагрузок типа *B* и *C* качественно результаты совпадают. Приводим численные значения толщин. При этом отношение v_*/v_c для нагрузок типов *A*, *B*, *C* соответственно равно 0.705, 0.649, 0.562.

r/b	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
0.5	1.035	1.042	1.043
0.6	0.973	0.979	0.862
0.7	0.856	0.853	0.705
0.8	0.764	0.672	0.551
0.9	0.567	0.441	0.376
1.0	0.119	0.109	0.115

Рассмотренные задачи проектирования оптимальных пластин содержат ограничения по изгибным напряжениям. Учет ограничений по касательным напряжениям не вносит усложнений, поскольку касательные напряжения определяются только нагрузкой. Таким образом, учет их эквивалентен введению ограничения на u снизу $u \geq u_0(q)$. Следует ожидать, что в этом случае экономия веса будет меньше.

Все результаты приведены для кольцевых пластинок с отношением внутреннего и наружного радиусов $a/b=0.5$. Численные результаты для других значений отношения a/b здесь не приводятся. Отметим, что получающиеся результаты качественно сходны, отношение v_*/v_c изменяется на 10–15% и уменьшается с уменьшением a/b .

Поступила 4 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.
3. Келли Дж. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М., «Наука», 1965.