МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1975

УДК 539.3

ИЗГИБ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗАМИ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ ИЛИ ДУГ ОКРУЖНОСТИ

В. А. МЕРКУЛОВ

(Волжский)

Первая основная граничная задача изгиба бесконечной тонкой пластины, содержащей конечное число сквозных разрезов (трещин) вдоль одной прямой или вдоль дуг одной окружности, решается приведением к задаче линейного сопряжения граничных значений аналогично тому, как это сделано в плоской теории упругости [1].

Решение поясняется примерами для одного разреза; приводятся коэффициенты интенсивности напряжений.

1. Для ограниченности усилий и моментов в бесконечной многосвязной пластине необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $P_z{}^*$ изгибающих нагрузок, приложенных ко всей совокупности внутренних контуров, был равен нулю, а функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, определяющие напряженное состояние пластины, были голоморфными и при достаточно большом $|z|$ имели вид [2]:

$$\Phi(z)=\Gamma+\frac{M_x{}^*+iM_y{}^*}{i8\pi D}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\Psi(z)=\Gamma'-\frac{M_x{}^*-iM_y{}^*}{i8\pi D}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Здесь $M_x{}^*+iM_y{}^*$ — главный момент изгибающих нагрузок, приложенных ко всей совокупности внутренних контуров, D — цилиндрическая жесткость пластины. Постоянные $\Gamma=B$ (B — вещественная) и $\Gamma'=B'+iC'$ задаются однородным полем напряжений на бесконечности

$$B=-\frac{M_x{}^\infty+M_y{}^\infty}{4D(1+\nu)},\quad B'=\frac{M_y{}^\infty-M_x{}^\infty}{2D(1-\nu)},\quad C'=\frac{H_{xy}{}^\infty}{D(1-\nu)} \tag{1.2}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

В случае первой основной задачи на контуре, внешняя нормаль к которому есть $\mathbf{n}$, задаются изгибающий момент $M_n(s)$ и обобщенная поперечная сила $Q_n(s)=N_n+\partial H_{nt}/\partial s$

$$\varkappa\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}=\frac{1}{D(1-\nu)}\left(M_n+i\int\limits_a^s Q_n\,ds\right)+iC$$

где s — длина дуги контура, отсчитываемая от взятой за начальную точки a, C — вещественная постоянная, не задаваемая заранее, $\varkappa=-(3+\nu)/(1-\nu)$.

2. Пусть пластина имеет разрезы $L_j=a_jb_j$ ($j=1, 2, \ldots, n$) вдоль одной прямой, которую примем за вещественную ось Ox. Совокупность разрезов L_j обозначим L. Главный вектор $P_{zj}{}^*$ на каждом разрезе L_j считаем равным нулю. Введем функцию

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi'}(z)+\overline{\Psi}(z) \tag{2.1}$$

голоморфную в разрезанной области и имеющую при большом $|z|$ вид

$$\Omega(z)=\Gamma+\overline{\Gamma'}+\frac{M_x^*+iM_y^*}{i8\pi D}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

В дальнейшем считаем, что $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфные функции [1] и для всех x, принадлежащих L, но не совпадающих с концами a_j, b_j, $\lim y\Phi'(z)=0$ при $z\to x$.

На основании последнего условия и формулы (2.1) граничные условия рассматриваемой задачи запишем следующим образом:

$$\varkappa\Phi^\pm(x)+\Omega^\mp(x)=\frac{1}{D(1-\nu)}\left(M_n^\pm+i\int\limits_{a_j}^{s}Q_n^\pm\,ds\right)+iC(x) \tag{2.2}$$

где a_j — точка, принятая за начало отсчета s на разрезе L_j, $C(x)$ — вещественная кусочно-постоянная функция на L, не задаваемая заранее, $C(x)=C_j$ на L_j. Знаками плюс и минус отмечены граничные значения на верхнем и нижнем берегах разрезов.

Складывая и вычитая равенства (2.2), приходим к двум задачам линейного сопряжения, общие решения которых с учетом условий на бесконечности даются формулами

$$\varkappa\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi iX(z)}\int\limits_L\frac{X^+(x)p(x)}{x-z}dx+\frac{2P_n(z)}{X(z)} \tag{2.3}$$

$$\varkappa\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{q(x)}{x-z}dx-(1-\varkappa)\Gamma-\overline{\Gamma'}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ — заданные на L с точностью до постоянной $C(x)$ функции

$$p(x)=\frac{1}{2D(1-\nu)}\left[M_n^++M_n^-+i\int\limits_{a_j}^{s}(Q_n^++Q_n^-)\,ds\right]+iC(x)$$

$$q(x)=\frac{1}{2D(1-\nu)}\left[M_n^+-M_n^-+i\int\limits_{a_j}^{s}(Q_n^+-Q_n^-)\,ds\right]$$

Будем считать [1], что $p(x)$, $q(x)$ удовлетворяют на L условию H. Из формул (2.3) следует

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\frac{P_n(z)}{\varkappa X(z)}-\frac{1}{2\varkappa}[(1-\varkappa)\Gamma+\overline{\Gamma'}]$$

$$\Omega(z)=\Omega_0(z)+\frac{P_n(z)}{X(z)}+\frac{1}{2}[(1-\varkappa)\Gamma+\overline{\Gamma'}]$$

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i\varkappa X(z)}\int\limits_L\frac{X^+(x)p(x)}{x-z}dx+\frac{1}{2\pi i\varkappa}\int\limits_L\frac{q(x)}{x-z}dx$$

$$\Omega_0(z)=\frac{1}{2\pi iX(z)}\int\limits_L\frac{X^+(x)p(x)}{x-z}dx-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{q(x)}{x-z}dx$$

$$X(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{1/2}(z-b_j)^{1/2},\qquad P_n(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\ldots+C_n$$

Для определенности будем считать, что под $X(z)$ подразумевается ветвь, имеющая при большом $|z|$ вид $X(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots$. Тогда коэффициент C_0 полинома $P_n(z)$ определяется по условию $\Phi(\infty)=\Gamma$: $C_0=[(1+\varkappa)\Gamma+\overline{\Gamma'}]/2$.

Постоянные $C(x)=C_j$ и коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ полинома $P_n(z)$ должны быть определены из условий однозначности перемещений при обходе замкнутых контуров, охватывающих отрезки $L_j=a_jb_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Используя формулы для перемещений [2], эти условия можно представить в виде

$$\int\limits_{L_j}\left[F(x)-\frac{1}{4}(1+\nu)q(x)\right]dx=0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Re}\int\limits_{L_j}\left\{\frac{a_j-x}{\varkappa}[2F(x)+q(x)]+\int\limits_x^{b_j}[2F(t)-q(t)]dt\right\}dx=0 \tag{2.5}$$

$$F(x)\equiv\frac{P_n(x)}{X^+(x)}+\frac{1}{2\pi iX^+(x)}\int\limits_L\frac{X^+(\tau)p(\tau)}{\tau-x}d\tau$$

где t, τ — вещественные переменные интегрирования.

Равенства (2.4), (2.5) образуют систему $3n$ вещественных линейных уравнений относительно коэффициентов полинома $\operatorname{Re} C_k$, $\operatorname{Im} C_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и вещественных постоянных $C(x)=C_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Эта система всегда однозначно разрешима, так как однородная система, получаемая в случае $\Gamma=\Gamma'=0$, $M_n^\pm=Q_n^\pm=0$, не может иметь иного решения, кроме тривиального на основании теоремы единственности решения граничной задачи теории изгиба тонкой пластины с разрезами.

Рассмотрим некоторые примеры для одного разреза $|x|\leqslant l$.

1. Пластина под действием равномерного крутящего момента на бесконечности $H_{xy}{}^\infty=H$.

В данном случае $\Gamma=0$, $\Gamma'=iH/D(1-\nu)$, $C_0=-iH/2D(1-\nu)$. Из условий однозначности перемещений (2.4), (2.5) найдем соответственно $C_1=0$, $C=-2\operatorname{Re} iC_0=-H/D(1-\nu)$. Искомое решение примет вид

$$\Phi(z)=0,\qquad \Omega(z)=-iH/[D(1-\nu)],\qquad \Psi(z)=iH/[D(1-\nu)]$$

т. е. равномерный крутящий момент $H_{xy}{}^\infty=H$ не создает изгибающей нагрузки при данной форме трещины; концентрация напряжений в пластине отсутствует.

2. Сосредоточенная пара из изгибающего и крутящего моментов на берегу разреза. Для определенности будем считать, что моменты $-M_0$, $-H_0$ приложены в точке x_0 верхнего берега. Тогда

$$M_n{}^+=-M_0\delta(x-x_0),\qquad Q_n{}^+=-H_0\frac{d}{dx}\delta(x-x_0),\qquad M_n{}^-=Q_n{}^-=\Gamma=\Gamma'=0$$

$$p(x)=-\frac{(M_0+iH_0)}{2D(1-\nu)}\delta(x-x_0)+iC,\qquad q(x)=-\frac{(M_0+iH_0)}{2D(1-\nu)}\delta(x-x_0)$$

Здесь $\delta(x-x_0)$ — дельта-функция Дирака. Условия (2.4), (2.5) дают соответственно

$$C_1=\frac{(H_0-iM_0)(1+\nu)}{8\pi D(1-\nu)},\qquad C=\frac{2H_0\sqrt{l^2-x_0^2}+M_0(1+\nu)x_0}{2\pi Dl^2(1-\nu)}$$

Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ в этом случае имеют вид

$$\Phi(z)=\frac{(M_0+iH_0)\sqrt{l^2-x_0^2}}{4\pi D\varkappa(1-\nu)(z-x_0)\sqrt{z^2-l^2}}+\frac{H_0-iM_0}{4\pi D\varkappa(1-\nu)(z-x_0)}+ \tag{2.6}$$

$$+\frac{(H_0-iM_0)(1+\nu)}{8\pi D\varkappa(1-\nu)\sqrt{z^2-l^2}}+\frac{i[2H_0\sqrt{l^2-x_0^2}+M_0(1+\nu)x_0](\sqrt{z^2-l^2}-z)}{4\pi Dl^2\varkappa(1-\nu)\sqrt{z^2-l^2}}$$

$$\Omega(z)=\varkappa\Phi(z)-(H_0-iM_0)/2\pi D(1-\nu)(z-x_0)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений найдем по формуле, введенной впервые для задач изгиба тонкой пластины в работе [3]: $K_1-iK_2=-12\sqrt{2}h^{-2}D(3+\nu)\lim\limits_{z\to l}\sqrt{z-l}\,\Phi(z)$, где h – толщина пластины. Отсюда

$$K_1=\frac{3M_0}{\pi h^2\sqrt{l}}\sqrt{\frac{l+x_0}{l-x_0}}+\frac{3H_0(1+\nu)}{2\pi h^2\sqrt{l}},\quad K_2=\frac{3M_0(1+\nu)(l+2x_0)}{2\pi h^2l\sqrt{l}}+\frac{3H_0(l-2x_0)}{\pi h^2l\sqrt{l}}\sqrt{\frac{l+x_0}{l-x_0}}$$

Оба рассмотренных примера были решены ранее в работе [4] методом конформного отображения трещины длиной $2l$ на круглое отверстие единичного радиуса. Следует отметить, что если в приведенных решениях не удовлетворять условию однозначности прогиба пластины (2.5) и положить априори вещественную постоянную $C(x)$ в граничных условиях (2.2) равной нулю, то получим результаты, которые совпадают с указанными в работе [4]. Однако решения, получаемые таким образом, с точки зрения изложенного выше метода представляются неправильными.

В случае полубесконечного разреза, расположенного вдоль отрицательной полуоси Ox, решение задачи изгиба пластины сосредоточенной парой моментов можно получить непосредственно из формул (2.6). Сделаем в них замену переменного $z=z_1+l$ $(x_0=x_1+l)$ и перейдем к пределу при $l\to+\infty$. Область, занятая пластиной, становится односвязной, и слагаемые, зависящие от постоянных C_1, C, исчезают. Переходя затем к прежним обозначениям, получаем

$$\Phi(z)=\frac{(M_0+iH_0)\sqrt{-x_0}}{4\pi D\varkappa(1-\nu)\sqrt{z}(z-x_0)}+\frac{H_0-iM_0}{4\pi D\varkappa(1-\nu)(z-x_0)}$$

$$\Omega(z)=\frac{(M_0+iH_0)\sqrt{-x_0}}{4\pi D(1-\nu)\sqrt{z}(z-x_0)}-\frac{H_0-iM_0}{4\pi D(1-\nu)(z-x_0)}$$

$$K_1=\frac{3\sqrt{2}M_0}{\pi h^2\sqrt{-x_0}},\qquad K_2=-\frac{3\sqrt{2}H_0}{\pi h^2\sqrt{-x_0}}\qquad (x_0<0)$$

3. Пусть теперь пластина имеет разрезы $L_j=a_jb_j$ $(j=1, 2,\ldots, n)$ вдоль дуг окружности радиуса R. Поместим начало координат в центр окружности и отнесем координаты к радиусу R. Переходя к безразмерным полярным координатам $z=re^{i\theta}$, представим изгибающий момент $M_r(s)$ и обобщенную поперечную силу $Q_r(s)$ в форме

$$\varkappa\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'(z)}-\frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi(z)}=\frac{1}{D(1-\nu)}\left(M_r+i\int\limits_a^s Q_r\,ds\right)+iC$$

Вместо $\Psi(z)$ введем функцию

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z}\overline{\Phi'}\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right)\tag{3.1}$$

В дальнейшем будем считать, что для всех $t=e^{i\theta}$ на L, кроме концов a_j, b_j, функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ непрерывно продолжимы на L слева и справа и что $\lim\,(r-1)\Psi(z)=0$ при $z\to t$, а вблизи любого конца c, обозначающего соответствующий конец a_j, b_j, выполнены неравенства

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^\alpha},\quad |\Omega(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^\alpha}\qquad (0\leqslant\alpha<1)$$

При обходе единичной окружности против часовой стрелки примем, что концы разрезов L_j расположены в последовательности $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_1$. Граничные значения на левом и правом берегах разрезов будем отмечать знаками плюс и минус. Тогда на основании формулы (3.1), учитывая, что $\lim(r-1)\Psi(z)=0$ при $z \to t$, граничные условия для моментов $M_r^{\pm}(s)$ и поперечных сил $Q_r^{\pm}(s)$ примут вид (2.2), если заменить x на t.

Функция $\Omega(z)$ голоморфна всюду в разрезанной вдоль L бесконечной области, кроме точки $z=0$, где она может иметь полюс не выше второго порядка, а именно

$$\Omega(z) = -\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} - \frac{M_x^*+iM_y^*}{i8\pi D}\frac{1}{z} + O(1) \quad \text{при} \quad |z|<1 \tag{3.2}$$

Для голоморфности функции $\Psi(z)$ в окрестности точки $z=0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_0 = \overline{B}_0, \quad B_1 = 0 \tag{3.3}$$

где A_0, B_0, B_1 — коэффициенты разложений

$$\Phi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots \quad \text{при} \quad |z|<1$$

$$\Omega(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots \quad \text{при} \quad |z|>1$$

Принимая во внимание условие (3.2), решение задачи можем написать аналогично случаю разрезов вдоль прямой

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{\varkappa X(z)}\left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}\right] + \frac{1}{2\varkappa}\left[D_0 + \frac{M_x^*+iM_y^*}{i8\pi D}\frac{1}{z} + \frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}\right]$$

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{1}{X(z)}\left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}\right] - \frac{1}{2}\left[D_0 + \frac{M_x^*+iM_y^*}{i8\pi D}\frac{1}{z} + \frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}\right]$$

где $\Phi_0(z)$, $\Omega_0(z)$ определяются по тем же формулам, что и в случае разрезов вдоль прямой после замены x на t. Будем считать, что $p(t)$, $q(t)$ также удовлетворяют на L условию H.

Постоянные D_1, D_2 находятся из разложения (3.2), принимающего вид

$$\frac{1}{X(z)}\left[\frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} + \frac{M_x^*+iM_y^*}{i8\pi D}\frac{1}{z}\right] + O(1) \quad \text{при} \quad |z|<1$$

Остальные постоянные D_0, $M_x^*+iM_y^*$, $C_0, C_1, \ldots, C_n$, $C(t)=C_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ числом $2n+3$ находятся из следующих условий: 1) $\Phi(\infty)=\Gamma$, 2) $A_0=\overline{B}_0$, $B_1=0$, 3) из условий однозначности перемещений, представляющих систему $2n$ линейных уравнений

$$\int_{L_j}\left[F_1(t) - \frac{1}{4}(1+\nu)q(t)\right]dt = 0$$

$$\operatorname{Re}\int_{L_j}\left\{\frac{t-a_j}{a_j\varkappa t}[2F_1(t)+q(t)] + \int_t^{b_j}[2\overline{F_1(\tau)} - \overline{q(\tau)}]\overline{d\tau}\right\}dt = 0$$

$$F_1(t) = \frac{1}{X^+(t)}\left[P_n(t) + \frac{D_1}{t} + \frac{D_2}{t^2}\right] + \frac{1}{2\pi i X^+(t)}\int_L \frac{X^+(\tau_1)\,p(\tau_1)}{\tau_1 - t}d\tau_1$$

где t, τ, τ_1 — комплексные переменные интегрирования.

Основываясь на теореме единственности решения граничной задачи теории изгиба пластины с разрезами, можно показать, что перечисленные условия определяют искомые постоянные однозначно.

Рассмотрим случай, когда пластина, содержащая один разрез вдоль дуги окружности радиуса R, изгибается моментами, приложенными на бесконечности. Имеем $n=1$, $p(t)=iC$, $q(t)=0$, $M_x^*+iM_y^*=0$. Моменты на бесконечности задаются формулами (1.2). Примем для определенности, что концам разреза на единичной окружности соответствуют точки $a=e^{-i\theta_0}$, $b=e^{i\theta_0}$. Будем фиксировать ветвь функции $X(z)$ условием $z^{-1}X(z)\to 1$ при $z\to\infty$. Тогда

$$\frac{1}{X(z)}=\frac{1}{z}+\frac{\cos\theta_0}{z^2}+\frac{1+3\cos 2\theta_0}{4z^3}+\ldots \quad \text{при} \quad |z|>1$$

$$\frac{1}{X(z)}=-1-z\cos\theta_0-\frac{1+3\cos 2\theta_0}{4}z^2+\ldots \quad \text{при} \quad |z|<1$$

$$X^\pm(t)=\mp\sqrt{t^2-2t\cos\theta_0+1}$$

Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ в данном случае имеют вид

$$\Phi(z)=\frac{iC}{2\varkappa X(z)}[X(z)-z+\cos\theta_0]+$$

$$+\frac{1}{\varkappa X(z)}\left[C_0z+C_1+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right]+\frac{1}{2\varkappa}\left[D_0+\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}\right]$$

$$\Omega(z)=\frac{iC}{2X(z)}[X(z)-z+\cos\theta_0]+\frac{1}{X(z)}\left[C_0z+C_1+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right]-\frac{1}{2}\left[D_0+\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}\right]$$

Используя дополнительные условия п. 3, найдем все постоянные

$$D_1=-\frac{\overline{\Gamma'}}{2}\cos\theta_0,\qquad D_2=\frac{\overline{\Gamma'}}{2},$$

$$C_0=\frac{1}{2(\varkappa+\sin^2 {}^1\!/_2\theta_0)}\left[B\varkappa(1+\varkappa)+\frac{1}{4}B'\sin^2\theta_0\right]$$

$$C_1=-C_0\cos\theta_0,\qquad D_0=2(\varkappa B-C_0),\qquad C=C'\cos^2 {}^1\!/_2\theta_0$$

Сместим кончик разреза $b=e^{i\theta_0}$ на действительную ось координат подстановкой $z=e^{i\theta_0}(iz_1+1)$. Тогда коэффициенты интенсивности напряжений будут определяться формулой: $K_1-iK_2=-12\sqrt{2R}h^{-2}D(3+\nu)\lim\limits_{z_1\to 0}\sqrt{z_1}\Phi(z_1)$.

Укажем окончательные результаты решений конкретных задач.

Цилиндрический изгиб моментами $M_y^\infty=M$:

$$B=-M/[4D(1+\nu)],\qquad B'=M/[2D(1-\nu)],\qquad C'=0$$

$$\Phi(z)=-\frac{M(4\varkappa+\sin^2\theta_0)[X(z)-z+\cos\theta_0]}{16D\varkappa(1-\nu)(\varkappa+\sin^2 {}^1\!/_2\theta_0)X(z)}+$$

$$+\frac{M[X(z)+1-z\cos\theta_0]}{4D\varkappa(1-\nu)z^2X(z)}-\frac{M}{4D(1+\nu)}$$

$$\Omega(z)=-\frac{M(4\varkappa+\sin^2\theta_0)[-X(z)-z+\cos\theta_0]}{16D(1-\nu)(\varkappa+\sin^2 {}^1\!/_2\theta_0)X(z)}+$$

$$+\frac{M[-X(z)+1-z\cos\theta_0]}{4D(1-\nu)z^2X(z)}+\frac{M\varkappa}{4D(1+\nu)}$$

$$K_1=\frac{3\sqrt{R}\,M\sin\theta_0(4\varkappa+3\sin^2{}^1/_2\theta_0)}{2h^2(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1-\cos\theta_0)}{2}}$$

$$K_2=-\frac{3\sqrt{R}\,M[\sin^2{}^1/_2\theta_0+\cos\theta_0(4\varkappa+3\sin^2{}^1/_2\theta_0)]}{2h^2(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1-\cos\theta_0)}{2}}$$

Чистый изгиб моментами $M_x{}^\infty=M$, $M_y{}^\infty=M$:

$$B=-M\,/\,[2D(1+\nu)],\qquad B'=C'=0$$

$$\Phi(z)=-\frac{M[X(z)-z+\cos\theta_0]}{2D(1-\nu)(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)X(z)}-\frac{M}{2D(1+\nu)}$$

$$\Omega(z)=-\frac{M\varkappa[-X(z)-z+\cos\theta_0]}{2D(1-\nu)(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)X(z)}+\frac{M\varkappa}{2D(1+\nu)}$$

$$K_1=\frac{6\sqrt{R}\,\varkappa M}{h^2(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1+\cos\theta_0)}{2}}$$

$$K_2=\frac{6\sqrt{R}\,\varkappa M}{h^2(\varkappa+\sin^2{}^1/_2\theta_0)}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1-\cos\theta_0)}{2}}$$

Разность второго и первого случаев дает решение задачи о цилиндрическом изгибе моментами $M_x{}^\infty=M$.

Пластина под действием равномерного крутящего момента $H_{xy}^\infty=H$:

$$B=B'=0,\qquad C'=H\,/\,[D(1-\nu)]$$

$$\Phi(z)=\frac{iH\cos^2{}^1/_2\theta_0}{2D(1-\nu)\varkappa X(z)}[X(z)-z+\cos\theta_0]-\frac{iH[X(z)+1-z\cos\theta_0]}{2D\varkappa(1-\nu)z^2X(z)}$$

$$\Omega(z)=\frac{iH\cos^2{}^1/_2\theta_0}{2D(1-\nu)X(z)}[X(z)-z+\cos\theta_0]-\frac{iH[-X(z)+1-z\cos\theta_0]}{2D(1-\nu)z^2X(z)}$$

$$K_1=\frac{3\sqrt{R}\,H(1+3\cos\theta_0)}{h^2}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1-\cos\theta_0)}{2}}$$

$$K_2=\frac{9\sqrt{R}\,H\sin\theta_0}{h^2}\sqrt{\frac{\sin\theta_0(1-\cos\theta_0)}{2}}$$

В данном случае, в отличие от прямолинейного разреза, коэффициенты интенсивности напряжений отличны от нуля.

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
2. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F.* Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж-механ. Сер. E, 1962, т. 29, № 2.)
4. Прикладные вопросы вязкости разрушения. (Под ред. Б. А. Дроздовского.) М «Мир», 1968.