

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ,
НЕСУЩИХ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ МАССЫ

В. П. ЧИРКОВ

(Москва)

Методами статистической динамики [1, 2] строится решение задачи об искажении случайного поля перемещений в тонких пластинах и оболочках вследствие внесения сосредоточенных масс. Эти задачи имеют практическое применение в связи с обработкой виброметрических данных, полученных при помощи датчиков ускорений [3]. Рассматриваются системы со сплошным и дискретным спектрами собственных частот.

Свободные колебания пластин и оболочек с сосредоточенными параметрами рассматривались во многих работах, например, в [4, 5].

1. Рассмотрим тонкую упругую оболочку, несущую сосредоточенные массы и находящуюся в поле нормальных случайных сил. Пусть колебания цилиндрической или сферической оболочки описываются разрешающим уравнением

$$(1.1) \quad Cw + \sum_{i=1}^N M_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ — криволинейные координаты на срединной поверхности оболочки, C — линейный оператор, учитывающий силы инерции и вязкие силы в конструкции, \mathbf{x}_i — координаты точки присоединения массы M_i , $\delta(\mathbf{x})$ — двумерная дельта-функция.

В случае, когда внешняя нагрузка является однородной пространственно-временной функцией, ее можно представить в виде пространственно-временного преобразования Фурье [1]

$$(1.2) \quad q(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)} d\mathbf{k} d\omega$$

Здесь $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$ — волновой вектор, ω — круговая частота, $Q(\mathbf{k}, \omega)$ — обобщенная случайная функция в пространстве преобразования Фурье.

Если конструкция бесконечная или достаточно протяженная (так что влиянием граничных условий можно пренебречь), то решение для функции нормального перемещения естественно искать в виде аналогичного разложения

$$(1.3) \quad w(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)} d\mathbf{k} d\omega$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что поля $w(\mathbf{x}, t)$ и $q(\mathbf{x}, t)$ являются центрированными.

Связь между случайными функциями $W(\mathbf{k}, \omega)$ и $Q(\mathbf{k}, \omega)$ найдем, подставляя выражения (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1)

$$W(\mathbf{k}, \omega) = C^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \left[Q(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{i=1}^N \frac{M_i \omega^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_i}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{k}_i, \omega) e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i} d\mathbf{k}_i \right]$$

где функция $C(\mathbf{k}, \omega)$ есть образ оператора C в пространстве преобразований Фурье. Разрешая полученное уравнение относительно функции $W(\mathbf{k}, \omega)$, получим

$$(1.4) \quad W(\mathbf{k}, \omega) = C^{-1}(\mathbf{k}, \omega) \left[Q(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{M_i \omega^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_i}}{4\pi^2} \frac{A_{ji}}{\det A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\mathbf{k}_i, \omega) e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_j} d\mathbf{k}_i}{C(\mathbf{k}_i, \omega)} \right]$$

Здесь A_{ij} — алгебраические дополнения матрицы A , элементы которой имеют вид

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{M_j \omega^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} d\mathbf{k}}{C(\mathbf{k}, \omega)}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера, $\det A(\omega)$ — определитель этой матрицы.

В случае, когда область изменения координат на срединной поверхности конечная, для функций $w(\mathbf{x}, t)$ и $q(\mathbf{x}, t)$ будем использовать разложение в виде рядов по формам собственных колебаний оболочки без масс и стохастических интегралов Фурье по времени

$$(1.5) \quad w(\mathbf{x}, t) = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} W_m(\omega) \varphi_m(\mathbf{x}) e^{i\omega t} d\omega, \quad q(\mathbf{x}, t) = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\omega) \varphi_m(\mathbf{x}) e^{i\omega t} d\omega$$

Здесь $W_m(\omega)$ и $Q_m(\omega)$ — случайные функции в пространстве преобразований (1.5). Система функций $\varphi_m(\mathbf{x})$ является полной и удовлетворяет всем необходимым граничным условиям.

Подставляя формулы (1.5) в исходное уравнение, получим уравнение, связывающее функции $W_m(\omega)$ и $Q_m(\omega)$

$$W_m = C_m^{-1} \left[Q_m + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{M_i \omega^2 \varphi_m(\mathbf{x}_i)}{v_m^2} \frac{B_{ji}}{\det B} \sum_n \frac{Q_n \varphi_n(\mathbf{x}_j)}{C_n} \right]$$

где $C_m(\omega)$ — образ оператора C в пространстве преобразований (1.5), v_m^2 — квадраты норм собственных функций $\varphi_m(\mathbf{x})$, B_{ij} и $\det B$ — соответственно алгебраическое дополнение и определитель матрицы B , элементы которой вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \delta_{ij} - M_j \omega^2 \sum_m \frac{\varphi_m(\mathbf{x}_i) \varphi_m(\mathbf{x}_j)}{v_m^2 C_m}$$

2. Вычислим функцию $S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$, являющуюся временным преобразованием Фурье от корреляционной функции нормальных перемещений [1]

$$(2.1) \quad S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle w^*(\mathbf{x}, t) w(\mathbf{x}', t + \tau) \rangle e^{-i\omega \tau} d\tau$$

Звездочка означает переход к комплексно-сопряженной величине, угловые скобки — осреднение по ансамблю реализаций.

Используя формулы (1.3), (1.4) и (2.1), для функции $S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ получим следующее выражение:

$$(2.2) \quad S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_q(\mathbf{k}, \omega)}{|C(\mathbf{k}, \omega)|^2} F^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) F(\mathbf{x}', \mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}$$

Здесь $S_q(\mathbf{k}, \omega)$ — пространственно-временная спектральная плотность нагрузки; кроме того, введены обозначения

$$(2.3) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_i}$$

$$f_{ij}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{M_i \omega^2 A_{ji}}{4\pi^2 \det A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)} d\mathbf{k}}{C(\mathbf{k}, \omega)}$$

Для случая конечной области изменения координат на срединной поверхности выражение для функции $S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ имеет вид

$$(2.4) \quad S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \sum_m \sum_n S_{q_m q_n}(\omega) F_m^*(\mathbf{x}, \omega) F_n(\mathbf{x}', \omega)$$

где $S_{q_m q_n}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности обобщенных сил, которые выражаются через функцию $S_q(\mathbf{k}, \omega)$ известным образом [1]. Функция $F_m(\mathbf{x}, \omega)$ равна

$$F_m(\omega) = C_m^{-1} \left[\varphi_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij}(\mathbf{x}, \omega) \varphi_m(\mathbf{x}_j) \right]$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \omega) = M_i \omega^2 \frac{B_{ji}}{\det B} \sum_m \frac{\varphi_m(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}_i)}{\nu_m^2 C_m}$$

Определим функцию, характеризующую поправку от внесения сосредоточенных масс

$$(2.5) \quad \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = S_w(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) [S_w^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)]^{-1}$$

где $S_w^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ — временная спектральная плотность поля нормальных перемещений однородной оболочки ($M_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$). В общем случае поправка, как видно из формул (2.2) и (2.4), существенно зависит от спектрального состава нагрузки.

3. Применим формулы (2.2), (2.4) и (2.5) к расчету вероятностных характеристик поля перемещений в пластинах и оболочках. Остановимся на случае одиночной сосредоточенной массы $M_1 = M$, приложенной в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ срединной поверхности.

В частном случае $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{x}_0$ формула (2.2) определяет спектральную плотность перемещения в точке присоединения сосредоточенной массы

$$S_w(\mathbf{x}_0, \omega) = |1 + f(\mathbf{x}_0, \omega)|^2 S_w^\circ(\mathbf{x}_0, \omega)$$

где функция $f(\mathbf{x}_0, \omega)$ определяется по формуле (2.3) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, N = 1$. При этом поправка от внесения сосредоточенной массы (2.5) не зависит от спектрального состава нагрузки и от координат точки приложения массы,

а целиком определяется параметрами системы

$$(3.1) \quad \alpha(\omega) = \left| 1 - \frac{M\omega^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{C(k, \omega)} \right|^{-2}$$

Для бесконечной пластины имеем $C(k, \omega) = D(\omega)k^4 - \rho h\omega^2$, где $D(\omega)$ — образ Фурье от линейного вязкоупругого оператора $D(\partial / \partial t)$, соответствующего цилиндрической жесткости. В результате вычислений для функции $\alpha(\omega)$ получим формулу

$$\alpha(\omega) = (1 + 2aM_*\omega_* \sin^{1/2}\psi + a^2M_*^2\omega_*^2)^{-1}$$

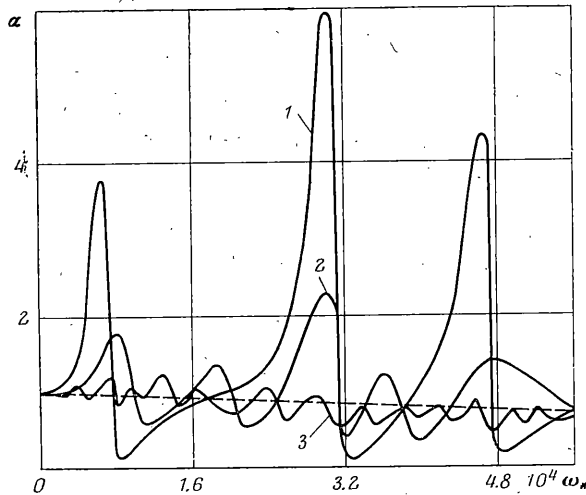
Здесь обозначено: $a^2 = \frac{3}{16}(1 - \nu^2)(1 + \eta^2)^{-1/2}$, $\psi = \text{arctg } \eta$, $M_* = M / \rho h^3$, $\omega_* = \omega h (\rho / E_R)^{1/2}$, где ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластины, h — толщина, η — тангенс потерь в материале пластины, E_R — действительная часть модуля упругости.

В качестве примеров систем с дискретным спектром собственных частот рассмотрим колебания прямоугольных в плане пластины, цилиндрической и сферической панелей. Пусть по кромкам $x_1 = \pm a_1 / 2$, $x_2 = \pm a_2 / 2$ реализуются граничные условия В. З. Власова. Спектральная плотность перемещения в точке присоединения сосредоточенной массы равна

$$S_w(x_0, \omega) = \alpha(x_0, \omega) S_w^0(x_0, \omega)$$

$$(3.2) \quad \alpha(x_0, \omega) = \left| 1 - \frac{4M\omega^2}{a_1 a_2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{jk}^2(x_0)}{C_{jk}(\omega)} \right|^{-2}$$

На фиг. 1–3 изображены графики функции $\alpha(x_0, \omega)$ для пластины и пологих цилиндрической и сферической панелей, несущих сосредоточенные массы в начале координат. Фиг. 1 соответствует значениям параметров $h=2$ мм, $\nu=0.3$, $\eta=0.05$, $M_* =$



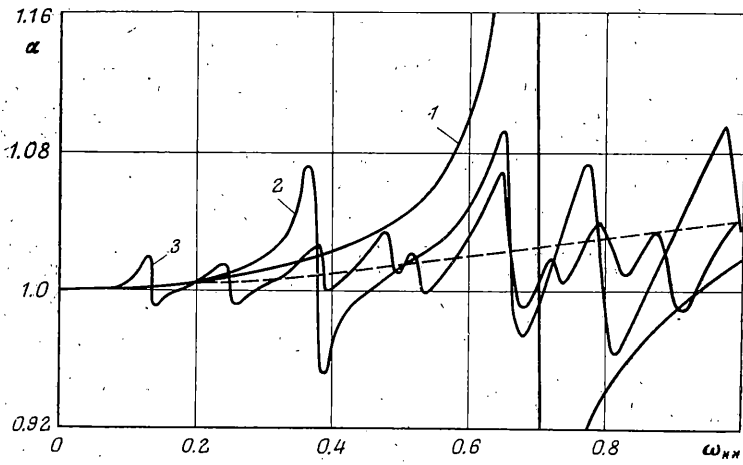
Фиг. 1

$= 1150$, $a_1 = 0.8a_2$. Кривая 1 построена для значения $a_1 = 0.5$ м, кривая 2 — для $a_1 = 1.0$ м, кривая 3 — для $a_1 = 2.0$ м.

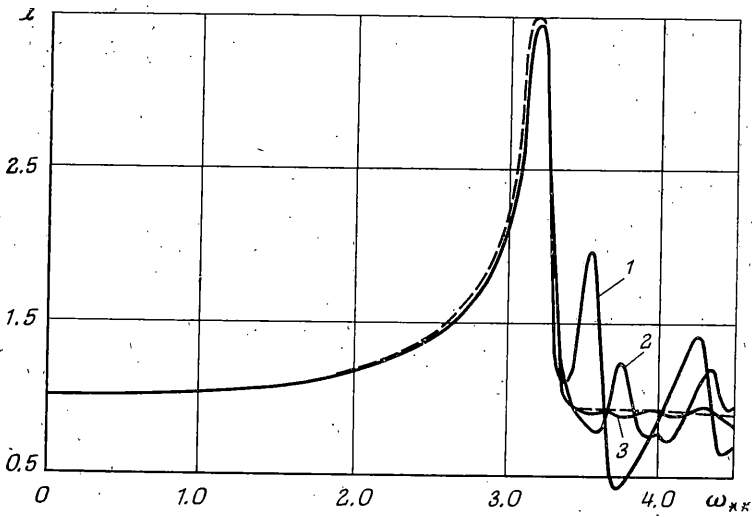
Безразмерные параметры массы и частоты для цилиндрической и сферической панелей введем следующим образом:

$$M_{**} = M / \rho \lambda^3, \quad \omega_{**} = \omega \lambda^2 (\rho h / D_R)^{1/2}, \quad \lambda = (Rh)^{1/2}$$

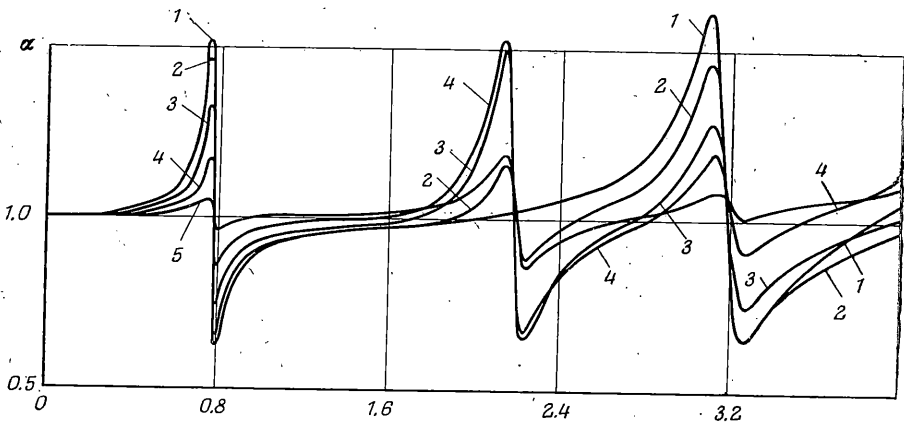
При построении графиков на фиг. 2, 3 использовались значения параметров $R = 0.5$ м, $h = 2$ мм, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.05$, $M_{**} = 0.025$. На фиг. 2, построенной для цилиндриче-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ской панели, кривая 1 соответствует $a_1=0.5$ м, кривая 2 — $a_1=1.0$ м, кривая 3 — $a_1=2.0$ м, причем $a_2=1.25a_1$. Фиг. 3 соответствует сферической панели со сторонами $a_1=a_2$; при этом кривая 1 построена для значения $a_1=0.25$ м, кривая 2 — для $a_1=0.5$ м, кривая 3 — для $a_1=1.0$ м.

Как и в случае бесконечных областей изменения координат на срединной поверхности, поправочная функция для конечных пластин и оболочек не зависит от вида спектральной плотности нагрузки в случае $x=x'=x_0$.

На фиг. 1–3 штриховая линия построена для случая бесконечных пластин и оболочек по формуле (3.1). При увеличении размеров пластины или оболочки график функции $\alpha(\omega)$ приближается к соответствующему графику для бесконечной области изменения координат на срединной поверхности. Таким образом, при определенных условиях открывается возможность приближенной замены пластины или оболочки конечных размеров бесконечной моделью, для которых вычисления значительно проще.

На фиг. 4 изображена функция $\alpha(x_1, \omega)$, характеризующая поправку от внесения двух сосредоточенных масс $M_1=M_2=M$, приложенных соответственно в точках $x_1=\{\xi_1, 0\}$, $x_2=\{-\xi_1, 0\}$. Вычисления проводились для прямоугольной пластины с параметрами $h=2$ мм, $a_1=0.5$ м, $a_2=0.625$ м, $\nu=0.3$, $\eta=0.05$, $M_*=460$. Координата ξ_1 точки присоединения сосредоточенной массы варьировалась. Кривая 1 построена для значения $\xi_1=0$, кривая 2 — для значения $\xi_1=0.1 a_1$, кривая 3 — для значения $\xi_1=0.2 a_1$, кривая 4 — для $\xi_1=0.3 a_1$ и кривая 5 — для $\xi_1=0.4 a_1$.

4. Пусть массы M_i ($i=1, 2, \dots, N$) присоединены к конструкции при помощи упругих элементов с коэффициентами жесткости c_i и вязких элементов с коэффициентами вязкости b_i . Предположим, что крепление масс осуществляется таким образом, что они совершают колебания в направлении, ортогональном срединной поверхности конструкции. В случае, когда внешняя нагрузка является стационарной функцией времени, для функции $S_w(x, x', \omega)$ получим выражения, совпадающие по виду с (2.2) и (2.4), если вместо величин M_k рассматривать комплексные параметры

$$m_k = [(c_k + i\omega b_k)M_k] (c_k + i\omega b_k - M_k\omega^2)^{-1}$$

В частности, для одиночной массы M , присоединенной при помощи подвески с параметрами c, b в точке $x=x_0$ срединной поверхности, получим следующее выражение для спектральной плотности перемещения массы:

$$S_u(\omega) = S_w^\circ(x_0; \omega) \left| \frac{c + i\omega b}{c + i\omega b - M\omega^2} \right|^2 \alpha(\omega)$$

где $\alpha(\omega)$ — поправочная функция, вычисляемая по формуле (3.1) либо по формуле (3.2).

Поступила 19 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Стохастические краевые задачи в теории пластин и оболочек. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
2. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
3. Болотин В. В. Планирование виброизмерений на конструкциях, испытывающих случайные колебания. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
4. Лиходед А. И., Малинин А. А. Колебания подкрепленных оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
5. Chen R. Vibration of cylindrical panels carrying a concentrated mass. Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. E, 1970, т. 37, № 3.)