МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1975

УДК 539.3:534.1

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И УПРУГОЙ СРЕДЫ

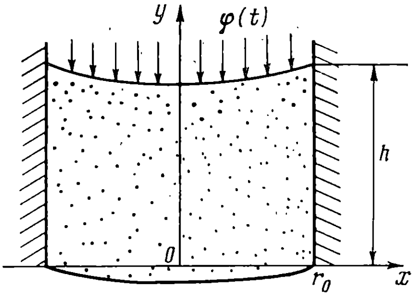
О. А. ЕГОРЫЧЕВ, И. Г. ФИЛИППОВ

(Москва)

Решается осесимметричная динамическая задача о колебаниях пологих упругих сферических крышки и днища круглого цилиндрического бака, заполненного упругой средой (например, грунт), при воздействии на крышку бака импульсивной нагрузки. Стенки бака считаются абсолютно жесткими, трение между стенкой бака и упругой средой отсутствует. Считается, что контакт между крышкой бака и упругой средой в любой момент времени не нарушается. Крышка и днище бака жестко соединены со стенкой бака.

1. Рассмотрим круглый цилиндрический бак радиуса r_0 с пологими сферическими упругими днищами радиуса R_2 и крышкой радиуса R_1, полость между крышкой бака и днищем заполнена упругой средой (наполнитель) (фиг. 1).

Пусть в некоторый момент времени $t_0=-h/a$, где a — скорость продольной волны в наполнителе, к крышке бака прикладывается импульсное давление интенсивности $\varphi(t)$. Необходимо определить напряженное и деформированное состояние наполнителя и колебания крышки и днища бака.



Фиг. 1

Для решения введем следующие предположения:

При определении возмущенного поля в упругом наполнителе граничное условие на крышке заменяется соответствующим условием на плоскости сечения $y=h$, а граничное условие на днище — условием на плоскости $y=0$.

Возмущенное поле в упругом наполнителе приближенно принимается соответствующим плоскому деформированному состоянию, так как стенки бака считаются абсолютно жесткими.

Производными от компонент вектора перемещения частиц наполнителя по координате r, в силу малости их по сравнению с производными по координате y, в уравнениях движения частиц наполнителя будем пренебрегать.

Введем безразмерные переменные, принимая за размерные параметры высоту h и скорость продольной волны a. Возмущенное поле в наполнителе определяется из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial \tau^2} \qquad (0<y<1,\ \tau>-1) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=w_1 \qquad (y=1) \tag{1.2}$$

$$(1.3)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=w_2\qquad (y=0)$$

$$(1.4)\qquad \Phi=\Phi_\tau'=0\qquad (\tau\leqslant-1)$$

где $\tau=at/h$; w_1 и w_2 — безразмерные величины прогиба соответственно крышки и днища, Φ — безразмерный потенциал продольной волны; все величины с индексом *1* относятся к крышке, а с индексом *2* — к днищу.

Запишем решение уравнения (1.1) в виде

$$(1.5)\qquad \Phi(y,\tau)=\Phi_0(\tau+y-1)+\Phi_1(\tau-y+1)$$

где Φ_0, Φ_1 — произвольные функции, определяемые из условий (1.2) и (1.3).

Для определения величин прогиба $w_1(r,\tau)$ и $w_2(r,\tau)$ имеем уравнения [1, 2]

$$(1.6)\qquad D_1\nabla^4 w_1(r,\tau)+h^4(K_1-\rho g)w_1(r,\tau)+a^2\rho_1 h_1 h^2 w_1^{\cdot\cdot}(r,\tau)=$$
$$=q_1(r,\tau)+h^3\varphi(\tau)H(\tau+1),\quad q_1(r,\tau)=-h^3(\sigma_{yy})_{y=1}$$

$$(1.7)\qquad D_2\nabla^4 w_2(r,\tau)+h^4(K_2-\rho g)w_2(r,\tau)+a^2\rho_2 h_2 h^2 w_2^{\cdot\cdot}(r,\tau)=q_2(r,\tau)$$
$$q_2(r,\tau)=h^3(\sigma_{yy})_{y=0}$$

Используя закон Гука и соотношения (1.2), (1.3), (1.5), выразим нормальное напряжение через функции прогиба

$$(1.8)\qquad (\sigma_{yy})_{y=0}=(\lambda+2\mu)\Big[w_2^{\cdot}(r,\tau)+$$
$$+2\sum_{n=0}^{n_0}w_1^{\cdot}(r,\tau-2n-1)-2\sum_{n=0}^{n_0}w_2^{\cdot}(r,\tau-2n)\Big]$$

$$(1.9)\qquad (\sigma_{yy})_{y=1}=-(\lambda+2\mu)\Big[w_1^{\cdot}(r,\tau)-$$
$$-2\sum_{n=0}^{n_0}w_1^{\cdot}(r,\tau-2n)+2\sum_{n=0}^{n_0}w_2^{\cdot}(r,\tau-2n-1)$$

причем λ, μ — модули упругости наполнителя; $n_0=[{}^1/_2\tau]$ — целая часть числа, заключенного в скобки.

Подставляя в уравнения (1.6) и (1.7) значения $(\sigma_{yy})_{y=1}$ и $(\sigma_{yy})_{y=0}$ из (1.8) и (1.9), получим

$$(1.10)\qquad \nabla^4 w_1(r,\tau)+D_3 w_1(r,\tau)+D_4 w_1^{\cdot\cdot}(r,\tau)-D_5\Big[w_1(r,\tau)-$$
$$-2\sum_{n=0}^{n_0}w_1^{\cdot}(r,\tau-2n)+2\sum_{n=0}^{n_0}w_2^{\cdot}(r,\tau-2n-1)\Big]=D_6\varphi(\tau)H(\tau+1)$$

$$(1.11)\qquad \nabla^4 w_2(r,\tau)+D_7 w_2(r,\tau)+D_8 w_2^{\cdot\cdot}(r,\tau)-D_9\Big[w_2^{\cdot}(r,\tau)+$$
$$+2\sum_{n=0}^{n_0}w_1^{\cdot}(r,\tau-2n-1)-2\sum_{n=0}^{n_0}w_2^{\cdot}(r,\tau-2n)\Big]=0$$

$$D_3=h^4(K_1-\rho g)/D_1,\quad D_4=a^2\rho_1 h_1 h^2/D_1,\quad D_5=h^3(\lambda+2\mu)/D_1$$
$$D_6=h^3/D_1,\quad D_7=h^4(K_1-\rho g)/D_2,\quad D_8=a^2\rho_2 h_2 h^2/D_2,$$
$$D_9=h^3(\lambda+2\mu)/D_2$$

Здесь $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда, D_1 и D_2 — коэффициенты жесткости, ρ_1, ρ_2, h_1, h_2 — плотности и толщины, ρ, g — плотность и ускорение силы тяжести упругого наполнителя, ∇^4 — бигармонический оператор, зависящий от r. Точки над w_1 и w_2 обозначают дифференцирование по τ, $K_1=E_1h_1R_1^{-2}$, $K_2=E_2h_2R_2^{-2}$, E_1 и E_2 — модули упругости.

Начальные и граничные условия для w_1 и w_2 имеют вид

(1.12) $$w_1=\dot{w}_1=0\,(\tau=-1),\quad w_1=\frac{\partial w_1}{\partial r}=0\left(r=r_{10}=\frac{r_0}{h}\right)$$

$$w_2=\dot{w}_2=0\,(\tau=0),\quad w_2=\frac{\partial w_2}{\partial r}=0\,(r=r_{10})$$

Решение уравнений (1.10) и (1.11) будем искать в виде

(1.13) $$w_1(r,\tau)=w_{11}(r,\tau)+w_{12}(\tau),\qquad w_2(r,\tau)=w_{21}(r,\tau)+w_{22}(\tau)$$

где w_{11} и w_{21} — решения соответственно однородных уравнений (1.10), (1.11), а w_{12} и w_{22} — частные решения неоднородных уравнений. Для определения w_{12} и w_{22} получим уравнения

(1.14) $$D_3w_{12}(\tau)+D_4\ddot{w}_{12}(\tau)-D_5\left[\ddot{w}_{12}(\tau)-2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{12}(\tau-2n)+\right.$$
$$\left.+2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{22}(\tau-2n-1)\right]=D_6\varphi(\tau)H(\tau+1)$$

(1.15) $$D_7w_{22}(\tau)+D_8\ddot{w}_{22}(\tau)-D_9\left[\dot{w}_{22}(\tau)-2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{22}(\tau-2n)+\right.$$
$$\left.+2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{12}(\tau-2n-1)\right]=0$$

Применив к уравнениям (1.14) и (1.15) преобразование Лапласа по τ, имеем

(1.16) $$w_{120}(p)=B_1\varphi_0(p)f_{10}(p),\qquad w_{220}(p)=B_8\varphi_0(p)f_{20}(p)$$

(1.17) $$f_{10}(p)=\frac{1}{B_2}(1-e^{-2p})\left[1-\frac{p^2-B_3p+B_4}{p^2+B_3p+B_4}\right]e^{-2p}\sum_{n=0}^{\infty}F_{1n}(p)e^{-2np}$$

$$f_{20}(p)=\frac{2}{B_2}p(1-e^{-2p})e^{-p}\sum_{n=0}^{n_0}F_{2n}(p)e^{-2np}$$

$$F_{1n}(p)=Q_1(p)(p^2+B_3p+B_4)^{-n}(p^2+B_5p+B_6)^{-(n+1)}$$
$$Q_1(p)=[(p^2-B_3p+B_4)(p^2+B_5p+B_6)+(p^2+B_3p+B_4)(p^2-B_5p+B_6)+4B_7p^2]^n$$
$$F_{2n}(p)=F_{1n}(p)(p^2+B_3p+B_4)^{-1},\qquad B_1=D_6D_8,\qquad B_2=D_4D_8$$
$$B_3=D_9D_8^{-1},\quad B_4=D_7D_8^{-1},\quad B_5=D_5D_4^{-1},\quad B_6=D_3D_4^{-1},\quad B_7=D_5D_9,\quad B_8=D_6D_9$$

Обращая по p выражения (1.17), получим [3]

$$f_1(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f_{10}(p)e^{p\tau}dp=\frac{2}{B_2}\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{l=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{4}\frac{e^{p_k(\tau-2n)}}{(n+1-l)!\,(l-1)!}\times$$
$$\times\{[(\tau-2n)^{n+1-l}-(\tau-2n-1)^{n+1-l}e^{-p_k}]N_{1kl}(p_k)-$$
$$-[(\tau-2n-1)^{n+1-l}-(\tau-2n-2)^{n+1-l}e^{-2p_k}]N_{2kl}(p_k)\}$$

$$f_2(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f_{20}(p)e^{p\tau}\,dp=\frac{4}{B_2}\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{l=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{4}\frac{e^{p_k(\tau-2n-{}^1/_2)}}{(n+1-l)!\,(l-1)!}\times$$

$$\times N_{3kl}(p_k)\left[\left(\tau-2n-\frac{1}{2}\right)^{n+1-l}-\left(\tau-2n-\frac{3}{2}\right)^{n+1-l}e^{-p_k}\right]$$

$$N_{1kl}(p_k)=\frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}}\left[\frac{Q_1(p)}{P_{1k}(p)}\right]_{p=p_k},\qquad N_{2kl}(p_k)=\frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}}\left[\frac{Q_2(p)}{P_{2k}(p)}\right]_{p=p_k}$$

$$P_{11}(p)=(p-p_2)^n(p-p_3)^{n+1}(p-p_4)^{n+1},\qquad P_{12}(p)=(p-p_1)^n(p-p_3)^{n+1}(p-p_4)^{n+1}$$

$$P_{13}(p)=(p-p_1)^n(p-p_2)^n(p-p_4)^{n+1},\qquad P_{14}(p)=(p-p_1)^n(p-p_2)^n(p-p_3)^{n+1}$$

$$Q_2(p)=Q_1(p)\,(p^2-B_3p+B_4),\qquad P_{2k}=P_2(p)\,(p-p_k)^{-(n+1)}$$

$$P_2(p)=[\,(p-p_1)\,(p-p_2)\,(p-p_3)\,(p-p_4)\,]^{n+1}$$

$$N_{3kl}(p_k)=\frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}}\left[\frac{Q_3(p)}{P_{2k}(p)}\right]_{p=p_k},\qquad Q_3(p)=pQ_1(p)$$

Здесь p_1 и p_2 — корни уравнения $p^2+B_3p+B_4=0$, а p_3 и p_4 — корни уравнения $p^2+B_5p+B_6=0$.

Применяя к выражениям (1.16) теорему свертки, получим

$$w_{12}(\tau)=B_1\int\limits_{-1}^{\tau}\varphi(\tau-\xi)f_1(\xi)\,d\xi,\qquad w_{22}(\tau)=B_8\int\limits_{0}^{\tau}\varphi(\tau-\xi)f_2(\xi)\,d\xi$$

Перейдем к определению w_{11} и w_{21}, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^4 w_{11}(r,\tau)+D_3w_{11}(r,\tau)+D_4\ddot{w}_{11}(r,\tau)-D_5\Big[\dot{w}_{11}(r,\tau)-$$
$$-2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{11}(r,\tau-2n)+2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{21}(r,\tau-2n-1)\Big]=0 \tag{1.18}$$

$$\nabla^4 w_{21}(r,\tau)+D_7w_{21}(r,\tau)+D_8\ddot{w}_{21}(r,\tau)-D_9\Big[\dot{w}_{21}(r,\tau)+$$
$$+2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{11}(r,\tau-2n-1)-2\sum_{n=0}^{n_0}\dot{w}_{21}(r,\tau-2n)\Big]=0$$

Применяя к (1.18) преобразование Лапласа по τ и сделав ряд преобразований, получим

$$\nabla^8 w_{j\,10}(r,\,p)+A(p)\,\nabla^4 w_{j\,10}(r,\,p)+B(p)\,w_{j\,10}(r,\,p)=0\qquad (j=1,\,2)$$

$$A(p)=A_1(p)+A_2(p),\qquad B(p)=A_1(p)A_2(p)-A_3(p)A_4(p)$$

$$A_1(p)=D_4p^2+D_5p\operatorname{cth}p+D_3,\qquad A_3(p)=D_5p\operatorname{csch}p$$

$$A_2(p)=D_8p^2+D_9p\operatorname{cth}p+D_7,\qquad A_4(p)=D_9p\operatorname{csch}p$$

Таким образом, решение задачи свелось к нахождению решения двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Рассмотрим, например, упрощенную задачу, когда крышка бака отсутствует и импульсивное давление действует непосредственно на поверхность упругого наполнителя.

Сохраняя приведенные выше предположения, определение возмущения в наполнителе сводится к решению следующей задачи:

$$(2.1)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\qquad (0<y<1,\ \tau>-1)$$

$$\sigma_{yy}=-\varphi(\tau)H(\tau+1)\qquad (y=1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=w_2(r,\tau)\qquad (y=0),\qquad \Phi=\Phi^{\cdot}=0\qquad (\tau\leqslant-1)$$

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид $\Phi(\tau,\ y)=\Phi_0(\tau+y)+$ $+\Phi_1(\tau-y)$.

Тогда, используя общее решение и условия (2.1), для нормального напряжения при $y=0$ получим выражение

$$(2.2)\qquad (\sigma_{yy})_{y=0}=(\lambda+2\mu)\left[w_2^{\cdot}(r,\tau)-\right.$$

$$\left.-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n w_2^{\cdot}(r,\tau-2n)\right]-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n\varphi(\tau-2n)$$

Используя выражение (2.2), уравнение (1.7) для определения прогиба днища $w_2(r,\ \tau)$ принимает вид

$$(2.3)\qquad \nabla^4 w_2(r,\tau)+D_7 w_2(r,\tau)+D_8 w_2^{\cdot\cdot}(r,\tau)=D_9\left[w_2^{\cdot}(r,\tau)-\right.$$

$$\left.-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n w_2^{\cdot}(r,\tau-2n)\right]-2D_{10}\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n\varphi(\tau-2n)$$

где $D_{10}=h^3/D_2$ с граничными условиями (1.12).

Так же, как и в п. 1, решение уравнения (2.3) будем искать в виде суммы двух функций (1.13).

Величина $w_{22}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.4)\qquad D_7 w_{22}(\tau)+D_8 w_{22}^{\cdot\cdot}(\tau)-D_9\left[w_{22}^{\cdot}(\tau)-\right.$$

$$\left.-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n w_{22}^{\cdot}(\tau-2n)\right]=-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n D_{10}\varphi(\tau-2n)$$

Применяя к (2.4) преобразование Лапласа по τ, получим

$$(2.5)\qquad w_{220}(p)=-D_{10}/D_8\varphi_0(p)f_0(p)$$

$$f_0(p)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2np}(p^2-B_3p+B_4)^n(p^2+B_3p+B_4)^{-(n+1)}$$

Обращая $f_0(p)$, имеем [3]

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f_0(p)e^{\tau p}\,dp=$$

$$=2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n\sum_{l=1}^{n+1}\left[\frac{N_{1l}(p_1)}{(n+1-l)!\,(l-1)!}(\tau-2n)^{n+1-l}e^{p_1(\tau-2n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{N_{2l}(p_2)}{(n+1-l)!\,(l-1)!}(\tau-2n)^{n+1-l}e^{p_2(\tau-2n)}\right]$$

где p_1, p_2 — корни уравнения $p^2+B_3p+B_4=0$

$$N_{jl}(p_j)=\frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}}\left[\frac{Q(p)}{P_j(p)}\right]_{p=p_j} \qquad (j=1,2)$$

$$Q(p)=(p^2-B_3p+B_4)^n, \qquad P_j(p)=(p-p_j)^{n+1}$$

Применяя к (2.5) теорему свертки, находим

$$w_{22}(\tau)=\frac{D_{10}}{D_8}\int_0^\tau \varphi(\tau-\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{2.6}$$

Перейдем к определению $w_{21}(r, \tau)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4 w_{21}(r,\tau)+D_7 w_{21}(r,\tau)+D_8 w_{21}^{\cdot\cdot}(r,\tau)-$$
$$-D_9\left[w_{21}^{\cdot}(r,\tau)-2\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n w_{21}^{\cdot}(r,\tau-2n)\right]=0 \tag{2.7}$$

Применяя преобразование Лапласа по τ к уравнению (2.7), получим

$$\nabla^4 w_{210}(r,p)+A(p)w_{210}(r,p)=0, \qquad A(p)=D_8p^2+D_9p\operatorname{th}p+D_7 \tag{2.8}$$

Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$w_{210}(r,p)=C_1J_0(r\sqrt[4]{A})+C_2N_0(r\sqrt[4]{A})+C_3I_0(r\sqrt[4]{A})+C_4K_0(r\sqrt[4]{A}) \tag{2.9}$$

где $J_0(\zeta)$, $N_0(\zeta)$, $I_0(\zeta)$, $K_0(\zeta)$ — функции Бесселя первого и второго рода действительного и мнимого аргумента.

Постоянные C_1 C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий (1.12) относительно $w_{20}(r,p)=w_{210}(r,p)+w_{220}(p)$ и условий регулярности $w_{20}(r,p)$ при $r=0$.

Учитывая, что прогиб $w_{20}(r,p)$ — величина конечная, и зная свойства функции Бесселя, из выражения (2.9) следует, что постоянные C_2 и C_4 должны равняться нулю. Тогда, подставив (2.9) в граничное условие (1.12), найдем, что

$$C_1=-w_{220}(p)I_1(z)\,[J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)]^{-1} \tag{2.10}$$
$$C_2=-w_{220}(p)J_1(z)\,[J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)]^{-1}, \qquad z=r_{10}\sqrt[4]{A(p)}$$

Подставив выражение (2.10) в соотношение (2.9), получим

$$w_{20}(r,p)=w_{220}(p)\left[1-\frac{J_0(r\sqrt[4]{A})I_1(z)+J_1(z)I_0(r\sqrt[4]{A})}{J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)}\right] \tag{2.11}$$

Обращая (2.11) по p, получим

$$w_2(r,\tau)=\int_0^\tau w_{22}(\tau-\xi)W(r,\xi)\,d\xi \tag{2.12}$$

$$W(r,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[1-\frac{J_0(r\sqrt[4]{A})I_1(z)+J_1(z)I_0(r\sqrt[4]{A})}{J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)}\right]e^{p\tau}\,dp \tag{2.13}$$

Для того чтобы проанализировать решение, необходимо вычислить квадратуру в формуле (2.13). Интеграл (2.13) будем вычислять методом вычетов, для чего исследуем вначале знаменатель подынтегрального выражения.

Определим корни уравнения

$$J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)=0 \tag{2.14}$$

Первые двадцать корней, с точностью до четвертого знака после запятой, равны: $z_1=3.1965$, $z_2=6.3065$, $z_3=9.4395$, $z_4=12.5771$, $z_5=15{,}7164$, $z_6=18.8580$, $z_7=22.0000$, $z_8=25.1390$, $z_9=28.2800$, $z_{10}=31.4200$, $z_{11}=34.5610$, $z_{12}=37.7020$, $z_{13}=40.8440$, $z_{14}=43.9850$, $z_{15}=47.1270$, $z_{16}=50.2680$, $z_{17}=53.4096$, $z_{18}=56.4096$, $z_{19}=59.6930$, $z_{20}=62.8344$.

Остальные корни (2.14) приближенно вычисляются из асимптотических выражений для $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ при больших z и равны $z_m=\pi(m-{}^1/_4)$, $m=21, \ldots$. Погрешность при расчете по данной формуле не превышает 1%.

Таким образом, определение корней уравнения (2.14) сводится к решению трансцендентного уравнения

$$D_8p^2+D_9\, p\,\mathrm{th}\, p=[(z_m/r_{10})^4-D_7] \tag{2.15}$$

Заметим, что уравнение (2.15) относительно p является четным, а коэффициенты D_8 и D_9 всегда положительны.

Рассмотрим, при каких условиях уравнение (2.15) имеет корни на действительной и мнимой оси в плоскости $p=\eta+i\xi$.

На действительной оси, т. е. при $\xi=0$, имеем

$$D_8\eta^2+D_9\eta\;\mathrm{th}\;\eta=[(z_m/r_{10})^4-D_7] \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) имеет действительные корни лишь при

$$[(z_m/r_{10})^4-D_7]\geqslant 0 \tag{2.17}$$

На мнимой оси, т. е. при $\eta=0$, уравнение (2.15) примет вид

$$D_8\xi^2+D_9\xi\;\mathrm{tg}\;\xi=-[(z_m/r_{10})^4-D_7] \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) имеет действительные корни при условии

$$[(z_m/r_{10})^4-D_7]\leqslant 0 \tag{2.19}$$

Из выражений (2.17) и (2.19) следует, что при тех значениях z_m, при которых (2.16) имеет действительные корни, уравнение (2.18) действительных корней не имеет и наоборот.

Кроме того, корень $p=0$ уравнения (2.15) существует лишь при $[(z_m/r_{10})^4-D_7]=0$, т. е. при заданных значениях параметров упругого наполнителя и упругого днища корень $p=0$ существует лишь при дискретных значениях r_{10}.

Рассмотрим интеграл

$$T=\int_L \frac{J_0(r\sqrt[4]{A})I_1(z)+J_1(z)I_0(r\sqrt[4]{A})}{J_0(z)I_1(z)+J_1(z)I_0(z)}\, e^{p\tau}\, dp$$

Используя метод вычетов, получим следующее выражение:

$$T=\frac{4\pi i}{r_{10}}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} e^{p_{d_j}\tau}\,[J_0(r\sqrt[4]{A_j})\,I_1(z_j)+J_1(z_j)\,I_0(r\sqrt[4]{A_j})]\times$$
$$\times\frac{[D_8p_{d_j}^2+D_7+D^9p_{dj}\,\mathrm{th}\,p_{dj}]^{3/4}}{J_0(z_j)\,I_0(z_j)[2D_8p_{d_j}+D_9(e^{2p_{dj}}-e^{-2p_{dj}}-4p_{d_j})\,(e^{p_{dj}}+e^{-p_{dj}})^{-2}]} \tag{2.20}$$

Зная выражения для $w_{22}(\tau)$ (2.6) и подставляя (2.20) в (2.13), получим значение функции прогиба $w_2(r, \tau)$ в аналитическом виде.

Аналогично решается задача, когда днище бака считается жестким и жестко соединенным со стенками бака, а импульс воздействует на крышку бака.

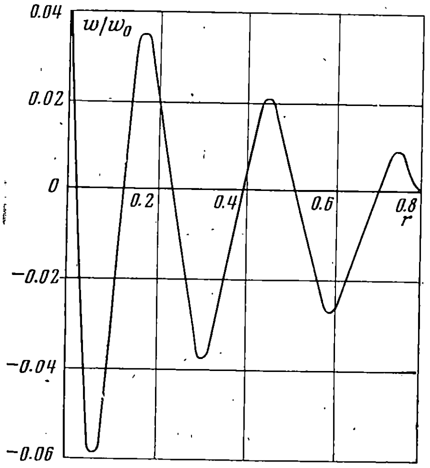
3. Рассмотрим пример численного расчета динамической задачи о колебании упругого днища цилиндрического бака, заполненного упругой средой. Решение задачи получено в п. 2. Расчет ведется с использованием ЭВМ.

Характерные геометрические размеры: $R_2=30$ *м*, $h_2=0.04$ *м*, $h=2$ *м*, $r_0=3$ *м*. Упругие свойства наполнители и днища таковы: $\lambda=1.03\cdot10^{10}$ *кГ/м²*, $\mu=1.5\cdot10^{10}$ *кГ/м²*, $\rho=1.5\cdot10^3$ *кГсек²/м⁴*, $a=4\cdot10^3$ *м/сек*, $\rho_2=7.8\cdot10^3$ *кГсек²/м⁴*, $E_2=20.6\cdot10^{10}$ *кГ/м²*.

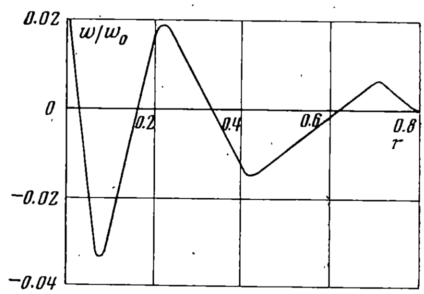
Для нахождения численного решения задачи следует найти корни трансцендентного уравнения (2.15).

Корни z_m приведены в п. 2. Величины действительных корней равны: $p_1=0.083046$, $p_2=-0.083046$, $p_3=0.328688$, $p_4=-0.328688$, $p_5=0.792509$, $p_6=-0.792509$, $p_7=1.742197$, $p_8=-1.742197$, $p_9=3.926732$, $p_{10}=-3.926732$, $p_{11}=7.866539$, $p_{12}=-7.866539$.

Зная корни уравнения (2.15) и используя соотношение (2.20), получим изменение функции прогиба $w_2(r, \tau)$ в зависимости от r, представленной на графике (фиг. 2), при постоянных значениях безразмерной величины τ.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим задачу, когда высота упругого наполнителя $h=10$ *м*, а остальные размеры и упругие константы остаются неизменными. В этом случае действительные корни уравнения (2.15) равны: $p_1=0.002106$, $p_2=-0.002106$, $p_3=0.012634$, $p_4=-0.012634$, $p_5=0.028806$, $p_6=-0.028806$, $p_7=0.051387$, $p_8=-0.051387$, $p_9=0.080300$, $p_{10}=-0.080300$, $p_{11}=0.115773$, $p_{12}=-0.115773$, $p_{13}=0.157883$, $p_{14}=-0.157883$, $p_{15}=0.206782$, $p_{16}=-0.206782$, $p_{17}=0.262776$, $p_{18}=-0.262776$, $p_{19}=0.326323$, $p_{20}=-0.326323$, $p_{21}=0{,}397956$, $p_{22}=-0.397956$, $p_{23}=0.478743$, $p_{24}=-0.478743$, $p_{25}=0.569753$, $p_{26}=-0.569753$, $p_{27}=0.672587$, $p_{28}=-0.672587$, $p_{29}=0.789686$, $p_{30}=-0.789686$, $p_{31}=0.923950$, $p_{32}=-0.923950$, $p_{33}=1.079650$, $p_{34}=-1.079650$, $p_{35}=1.262204$, $p_{36}=-1.262204$, $p_{37}=1.478780$, $p_{38}=-1.478780$, $p_{39}=1.737544$, $p_{40}=-1.737544$.

Изменение функции прогиба $w_2(r, \tau)$ в зависимости от r представлено на графике (фиг. 3).

Следует отметить, что точность расчета в этих задачах, начиная с 30 членов ряда, практически не возрастает. Так, разница между рядом, состоящим из 30 членов, и рядом, состоящим из 40 членов, составляет всего 0.5%. Это указывает на достаточно быструю сходимость ряда (2.20).

Поступила 14 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее применение в технике. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа и Меллина, т. 1, М., «Наука», 1969.